经典数学综合教材

H·B 格里菲思　　P·U 希尔顿 著
陈应枢 陈信传 译

A Comprehensive Textbook of CLASSICAL MATHEMATICS
A Contemporary Interpretation

贵州人民出版社

A Comprehensive Textbook of
CLASSICAL MATHEMATICS
A Contemporary Interpretation

经典数学综合教材

（上 册）

H.B. 格里菲思
P. J. 希 尔 顿 著

陈 应 枢
陈 信 传 译

贵 州 人 民 出 版 社

译 者 序

随着时代的飞速进步和数学科学的发展，中学数学教材的内容在不断地发展变化着．近二十年来，世界各国都围绕着中学数学课程现代化问题进行了积极的探索，不同观点的论争十分激烈．由于受到多种因素的制约，各国的发展情况很不一样；但是有一点可以肯定，就是在相当长的时期内，中学教材是不可能把经典数学的主要内容排斥在外的．随着微型计算机的普及，中学课程里可能要增添这方面的新内容，但是中学数学教材仍然要以经典数学的材料为主体．问题在于用什么样的观点来选择经典数学的内容和以什么方式来编排这些材料．

H.B. Griffiths 和 P. J. Hilton 合著的《经典数学综合教材》，用近代数学的观点统一处理与中学教材有关的经典数学内容，在内容编排上注意到教学法的需要，采用"螺旋接近"的方式——让同一课题在不同的阶段多次出现，并逐步提高到用近代数学观点来认识它和处理它．本书于七十年代初出

第一版,78年又由 Springer Verlag 公司再版,行销欧美两大洲,是一部有代表性的有影响的著作.近年来我国高师院校中学数学教育研究生多以本书为专业基础课的主要参考书,部分高师院校在数学系高年级学生中开设了以本书为主要内容的选修课.我们认为广大中学教师为了提高教育质量,培养符合四化建设要求的人材,也需要用近代观点来处理中学数学内容,因此本书对他们来讲也是很有参考价值的.

为促进中学数学教育研究工作,贵州师大科研科和数学系领导大力支持我们译出了这本书.油印稿曾在《全国高师院校中学数学教育研究协作组》八三年安顺年会上进行交流,这项工作受到同行们的热情鼓励.在贵州人民出版社的大力支持下,译稿经过修改校订,现在正式出版了,限于译者的水平,不妥之处在所难免,恳请读者批评指正.

全书共三十九章,序言、简介、第一章至第二十二章由陈应枢翻译,第二十三章至三十九章由陈信传翻译.本书的翻译工作得到赵咸云先生、何尊贤先生和周慧娟先生的鼓励和支持.赵先生曾以八十岁之高龄,不辞辛劳,亲自校阅了本书一至五章全部译稿和第十八章的部分译稿,直到病重住院期间还在关心着还项工作.在本书出版之际不能不引起我们对赵先生的深切怀念.何先生在整个翻译过程中从指导思想到技术细节都给以了热心的指导,周先生于百忙中校阅了部分译稿.在此谨向他们表示衷心的感谢.

译者 1986年6月于贵州师大

序　言

这一版在内容上和第一版没有什么不同．第一版发行于一九七〇年，距离现在已好几年了，而在此期间，数学的发展和研究方面都已发生了非常深刻和急剧的变化——特别是与本书构思和写成的年代相比．这些变化的重要影响已逐步渗透到程序数学、信息论、数值分析、计算机科学等学科（当然还有其他一些学科）．但本书并没有包括这些学科，因为在这些学科的探讨中我们没有任何特殊的贡献——虽然我们承认它们是有趣的和重要的．

今天，数学的研究领域之所以得到进一步发展，并居于如此显著的地位，正是由于计算机在教育和社会中起了重要作用的结果．虽然程序数学、信息论等学科已变得非常重要，但它们尚不能取代本书中所包含的更为经典的科目．当然还有应用数学的广大领域——例如微分方程——它们在经典学科中比在现代学科中居于更中心的位置．因此我们可以宣称：本书中所论述的内容，不论是就数学自身而言，还是就它在现实世界的应用而言，都仍然是适用的；纵然数学在急速地发展，而经济现实的需求对数学所施加的压力远较十年前为大，我们仍然必需学习这些内容．事实上，在整本书里，我们都在讨论内容的同时指出其应用．

下面我们对美洲的读者说明一点．我们写本书时，并没有想到本书要供给欧洲和加拿大这样广大的范围（但由于出版部门改变了本书出版的最初打算，供给这样广大范围已成为事实）．目前美国和欧洲体系在学习上的一个重大差别是：美国的大学课程通常是指定教科书，欧洲体系的大学课程是介绍一些教科书，而每一本书又很难构成一门课程的完整部分，因而在后面我们为美国读者提供了一个包括五门课程的目录，它们可以从本书中适当选择材料来组成，其中每一门课程都可以在美国的大学或学院的课程大纲中找到．例如，课程 2（代数）编入了整数算术、线代数、群论介绍、多项式函数和多项式方程的理论以及

一些布尔代数．当然还可以补充其他章节的材料．又例如，课程5(分析)或多或少地讨论了微分学和积分学理论的初步，进而讨论实多元函数、复变函数和实分析中诸如隐函数理论等课题．

为与本书的标题相适应，在课程作业里，我们倾向于形成一个较高的观点．在本书初版序言里我们曾强调指出过，我们应注意到读者已经接触过这些题材的内容，而他(她)们又愿意随着知识的加深和数学修养的提高来回顾这些内容．我们深信本书可以作为美国数学科学学位课程的适当基础，特别是作为硕士级学位课程的必要基础．

对于数学专业的学生，不管是现在和将来都应认真地考虑到他们毕业进入美国社会时其所受教育的适用性问题．人门通常考虑这个问题的观点〔注1〕是：学生把数学应用到工业上并不象数学自身那样具有某些人为的技巧性，而实际问题要求学生以非常审慎的态度来应用数学，使之成为有效适用的手段．因而我们主张从具有硕士学位的学生毕业进入社会时的情况来研究大学的数学(教育)，这也许是最合乎人们的通常看法的．

对于欧洲体系的大学学生来说，上述看法也是完全适用的，因为在那里，许多大学的数学课程高度抽象，而学生所具有的经典数学基础是十分不够的(因为不重视所致)．

我们还认为本书提出的几门课程，对于希望成为数学家的学生也是有用的，当然这需要做很多补充．

这一版除改正了原版中的错误以外，和原版没有什么不同，只增加了少量的分析练习题．对于那些向我们指出原版中错误的读者，我们表示十分感谢．

〔注1〕这些观点在全国应用数学训练调查委员会的成员中讨论过，本书的作者之一(P·J·H)是该委员会的主席。

简　介

1. 本书的源起和宗旨

本书来源于作者们在英国伯明翰大学数学系任教时，在一些同行的协助下所给出的演讲教材．这个教材是为伯明翰地区文法中学的数学教师设计的，虽然它包含了关于“现代数学”在工业、情报理论、统计和计算机科学等方面的应用和专题讲演，但我们原先的宗旨是：介绍在现代的大学数学系里的一些思想动态，并探讨这些思想与中学数学的关系．我们希望这样的讨论能对中学和大学都有帮助，在注意到数学家们成长中的不足之处以后，能使他们的学生在数学准备上完成得更快．讲演在学期中的星期一下午举行，每次持续二至三小时，这种合作（而且是认真执行的）在当时（1961—62）确属罕见，所幸的是现今已经多了起来．这里我们愿意谈谈，在我们与教师听众之间的这种既有付出又有收益的讨论中，我们有多大的收获．看来这样的接触不仅关系到数学系，而且对大学也有巨大的价值．

当然，在本教材中不可能提供一个适应于中学第六年级和大学一年级水平的有关纯数学课程的广泛题材，因而我们决定从经典数学中选取某些题材，而用近代的观点来处理基本概念和理论．谈到“近代”的观点，我们不愿对今日如何教学的某种特殊见解表现出倾向性，甚至我们有意表明想从一个数学专业工作者的观点来处理这些题材，来选用近代数学的语言和标准；同样的宗旨也贯穿于这本书的始终．

然而这本书自然要比那个讲演教材的内容多得多．尽管我们没有引进在该教材中所没有讲过的任何题材，但我们对讲过的每个课题都给予了尽可能多的关注（或者说已够满意了）．在写出这本书的全过程里，我们的愿望是使大致具有一年的大学数学学习水平的学生（不论任何年纪！）能接受这本书，而且在阅读之前不需要通过讲课或课堂练习的间介．

本书所涉及的课题或多或少都已表现在各部分的标题里了，作为例外的是第一、二、三部分，它们可以全部归在这样的课题之下：集合论和基础．除此之外，我们讨论了算术、几何、代数、数系、分析．这样的选择并不意味着除了我们所论及的课题之外，数学中再无其他课题可供这种水平的读者作为复习的内容，我们把它们选出来作为课题的中心内容，是因为它们构成了中学教师和大学教师共同具有的经典（纯）数学基础．我们的原意并不想给读者提供一个初次接触的题材和思想，讲演教材的要旨是鼓午读者用现代数学思想再一次回顾一些相当熟悉的思想，并把它们置于现代数学的结构之中；我们期望能使读者看到某些关键的思想是怎样一次又一次地再现，使读者把早期的数学实践中表面上看来不同的部分，从实质上统一起来．我们还相信在某些情况下，我们的写作方式是介绍和发展某一概念的最好途径，但这既不是我们写这本书的主张，也不是写这本书的动机．

在选择课题时，我们深知现代概率和统计以及信息论在现阶段的重要性．我们当然希望一个学生现今要对数值分析和计算机科学相当熟悉，我们充分肯定计算机在当代社会里所起的重要作用，我们深知它必将在整过教育上发生影响，但是我们没有把它列入本书之中．若加入了这个内容，不仅要使限定了篇幅的教科书增加份量，而且必然要导致题材上一个十分不同的组织方式．此外，这些被排除的题材不像被选入的题材那样为读者所熟知，而且就算他们熟悉这些内容，也可以予料，作为首次介绍给读者的作品，与我们所给出的内容是不会有多大差别的．（看来对作者来说一个好的原则是，如果没有什么新东西可说，最好保持沉默）．然而，我们时常强调某些技巧的算法性质，因为当表述一个论题或为使学生表明他是明瞭一种思想并准备向计算机解释这一思想时，算法性质常是有帮助的．（这只是这样一个概念的延伸，即要想懂得毕达哥拉斯定理最好的办法是让他们把自已设想成毕达哥拉斯，并进行探索和为证明定理而奋斗）．我们希望受鼓午的读者们能承认，利用计算机可导致对数学的某一片段的深入了解；如果他是教师，他将自觉地将这一点传授给他的学生．

2．表述方式

我们的写作风格，反映了这样一种意图，即对所写题材提供一个回顾．（从对一个熟悉的背景作观察开始）我们给出了大量的理论，那是把它们作为特定的知识实体来陈述的．自然，为了推广或是为了给出一个定理的深刻含义，而引进一个新的概念，其动机常常很明显地和我们有关；但是我们采用了实际是阐明定义和结论的教学方式，而明显地留给学生一点选择的余地，使他们能自己接近题材并取得进展．然而我们没有忘记“数学里最重要的存在定理是人的存在”．让我再重复一次，我们的教学思想，不属于任何偏颇的，所谓数学的“发现法”那一类，但也并不意味着我们否认数学的创造性方面，至少和应用数学使我们的知识系统化方面是具有同样的重要性．但是当一个题材在不太具有技巧性的水准下（或者用《中学数学的目的》〔注1〕一书中的语言，在准数学的水准下）通过使用和应用早已变为熟悉了的时候，尚需要说明其数学思想所包含的实质，并组织这些知识去进一步获益．这当然需要一个合适的表达方式和仔细的组织题

〔注1〕这个剑桥中学数学协会的报告，由 Houghton Mifflin 印行（1964）它值得每个对数学教育感兴趣的人一读。

材，以揭示它和数学的其他部分的内在联系，使思想的结构可以更清晰地显现出来．这就是原先讲演里的基本思想，也是由课堂讲演转而印刷成书时所要强调的处理题材的风格，我们非常希望教师们以我们的课题为原材料，这就是说，他们可以选用这些课题而沿着卓越的 ATM 手册里“数学中的若干课”的路数（见本书末附录[36]）在课堂技术上做大胆处理，在他们进行变革之前是需要专业形式的数学题材的，而这也就是我们希望本书所具有的形式．

另一方面，数学思想并不是以十分恰当的方式由一个数学家传给另一个数学家的，事实上，常有这样的情况，一篇发表了的文章具有完美的严谨性和形式的正确性，而在表达一个结果的本质上却是不成功的．这只是因为作者在他的作品中忽视了对问题的基本动机或他自己所选的解题思路作一个概略的描述．对某种含义作数学上的说明，看来要用《中学数学的目的》这本小册子所推荐的“螺旋接近”：一种思想先作粗略的介绍，稍后再对关键的概念给一个严谨的定义和证明，在这以后，这思想非正式地再次地变得更确切了．我们试图遵循这一原则，甚而与螺旋接近相一致，我们相信课题应该在某个经过“良好规划的进度表”里再现．（为简洁，请允许我们使用这个独创的词）一个课题由于其自身的理由，在第一处论述过以后，在较后的地方，作为一个更广泛的推广的一部分而被重新考察，或者在论证某些在初始面貌下十分难以体会和明瞭其微妙处的特征时，我们先概略地直观地讨论它，然后我们把它提高到这样的一种精确程度，以使概念脱离出来，形成问题，之后我们再一次地使之精确化．这种作法，在一般教科书中是少见的．我们有这样的看法，为了使思想和观念能得以自由交流，我们应和读者一块非正式地来获得正确的结论．其次，考虑到这本书主要是作一个回顾，在某些地方，我们比较快的由第一阶段达到我们认为适于采取精确语言和符号的阶段．而且我们希望像我们这种快速通过的非正规型式可以避免掉学究式的训条．

3．螺旋接近与学究式：符号上的困难

我们肯定不愿受到严格化的拘束，但同时我们相信，在背离了精确术语的过程中，学生应该知道他在哪些地方背离了精确性．学究式的出现也许特别明显地表现在符号上．首先，我们坚持，譬如说，一个函数就是简明地用符号“f”来表示．（出于实际计算的原因）我们必须确定 f 的定义域和值域，进而在经过介绍性的漫谈之后，作为严格形式的，一个集合的函数的定义首次出现，它（被看作）是取自某个适当的笛卡儿积的相互制约的有序数对．我们完全反对在一开始涉及到函数时，就坚持形式主义观点的那种态度．就拿微分学来说吧，我们采用较普遍，较传统的记号和术语，诸如“$f(x)$”，“$\frac{dy}{dx}$”，“y 是 x 的函数”等．类似的，我们强调恒等函数这个角色，记为 Id，甚而记为 I，由于其定义域不受限制，读者可以将其设想为一个十分重要的无处不在的数学概念．但是在大多数的微积分中，它可能也常常是，变成一个不引人注目的元素．同样的，最初我们十分着力于函数的复合，但这是服从于另外一个目的的．因为我们深信，学生若不在开初弄懂函数复合的性质，以及这样的复合与实值函数环上重要的乘积运算之间的区别，那么实际上就会产生混淆，当学生们已经知道 $x^{-1}=\frac{1}{x}$ 时，关于函数 f

的反函数的符号 f^{-1}，实际上是有危险性的（考虑到函数的复合时），我们不能与一个含义完全自由的符号打交道——这样的符号将成为一个难以忍守的麻烦，但教师至少应该以严格的解释来尽到他对学生的责任——在螺旋接近的这个阶段上，由于采用了可能导致误解的符号，学生是有误解的危险性的．在这种情况下，为及早地避免误解，我们用符号 f^b 代替符号 f^{-1}，直到我们觉得准备充分了，再回到 f^{-1}．我们宁可勉强地保留传统的把函数符号写在自变量左边的习惯（即写成 $f(x)$）．我们深知把函数符号写在变量右边的好处，但是我们想，一个新的符号如果不是超过普遍的标准的话，即使是超过了公认的习惯标准，那么不引入它也是明智的．无疑的，在这种水平的教科书中，是很少见到采用右手习惯的，我们也不愿意单是为了术语和符号的不同而给读者造成困难．然而由于我们在可通融性方面作了颇多的强调，如果不奉劝读者自己对每种习惯用法作好准备，那就是一种倒退了．我们要指出，在函数复合的讨论中（在第二章）符号问题显然将成为一个焦点．为了给出

$$S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$$

这个由 S 到 U 的复合函数，看来要用 $f\circ g$ 或简单地，fg．然而依左手习惯我们就不得不写成 $g\circ f$ 或 gf．因为若 x 是在 S 内，则在复合函数下相应于 x 的值域是 $g(f(x))$．当然，多数数学家使用左手习惯（这当然包括了我们在本书里所选用的习惯），但应记住，这种习惯是在函数复合像今天这样被强调之前形成的．研究一下数学家们在对付上述的这种反常现象时，是给出了怎样不同的讲演，那常是一种有趣的感受．很多人在写"fg"时，实际是把"g"写在前（即时间在前！）而把"f"写在后；有些则走得更远，把符号"fg"读作"*gee eff*"！

按照螺旋接近的精神，对于一个给定的题目，我们往往不是只提出关于这个课题的一种观点，甚至对特殊的概念，也不是提供单一的含义．例如，为将有理数扩充到实数，我们同时叙述了哥西叙列方法和戴德金分割法，作者之一认为前一方法更富于代数趣味，而后一方法则更富于几何趣味；另一作者则持相反意见．但是我们一致认为在这里断然主张一种观点是愚蠢的．类似的，一个函数，$f: S\to T$，若有函数 $g: T\to S$ 使得 gf 是 S 上的恒等函数，而 fg 则是 T 上的恒等函数，我们就把这函数说成是可逆的，又说成是等价的，"可逆"一词带有代数风味，而"等价"一词则带有集合论味道，在其他情况下也是一样，我们试图对一个概念提供各种用途，以适应学生在数学上的不同口味，并训练学生能够阅读那些使用不同术语，不同符号和不同流派的教科书．

在引入特殊符号时，其特点当然要在课本中加以解释．然而个别符号，似应在序言里提到它们．我们用符号■表示证明已经完毕，而符号□表示所陈述的东西没有给出证明（虽然证明是有的！）．我们常用符号"$\Rightarrow$"，"$\Leftarrow$"和"$\Leftrightarrow$"表示"仅当"，"当"和"当且仅当"．我们还常常使用现成的量词 $\exists x$ 和 $\forall x$ 来表示"存在着一个 x"和"所有的 x"，我们着力于文法的熟练，为的是顺利地进行否定．并想强调灵活性，为的是有效地使用任何缩写符号．

4. 数学的统一性

熟知的思想和技巧的新结构，必然包含着新的思想，但这种新思想，如我们在书中所说，是取自集合论、代数或拓扑的统一思想．为掌握它们，读者最好收集在特殊情况

下作出的论述的意义．寻求统一的目的，部分地出于美学的原因，它还有着实用的目标，就是帮助把众多的详细叙述过的知识控制起来，以便于我们记忆．这促使我们加进了范畴和函子这一章，这些观念近来引入数学中，发现它十分有益于数学家对数学的广大不同分支（指的是集合论、群论和拓扑）提出一个通用的结构和语言．然而，如在数学的发展中常有的那样，一个新概念产生后，围绕着这个概念，就形成了新的理论．范畴论是一个十分鼓午人的年轻的数学分支．然而，我们这里杜绝了深入于该理论的诱惑，而满足于描述它的基本概念是怎样的加深了我们对数学的熟知部分的理解，并提出要明确这些部分之间的联系，在原先我们只是直观地领悟到这种联系．我们的目标不超出介绍范畴语言的范围．

5．本教材的结构

本教材组成如下：全书分为八部分，每部分又分成章（章的编号依序贯通全书），每章分成节．虽然每部分的前面都有一个说明性的介绍作为序言，我们还是把它们的内容在这里作一个摘要，以明瞭各部分的关系．

第一部分是数学语言，它与其余部分不同，如其标题所揭示的那样，这部分设想要建立起沟通全书其余部分的语言，〔注2〕因而在这一阶段需要作某些论讨．这一部分非常符合标题的字义，是作为后面部分的必要准备．因为后面要涉及到数学的各种领域．所以我们希望多数学生，将选读其中个别部分而略去其余的，或者至少不按本书编排的顺序来阅读各部分．

自然，由于本书的主题是数学的高度统一，为通晓某一思想，譬如说算术，那就必须懂得关于代数的部分．而命题和例题的相互参照使得本书连成一个整体．但是题材的陈述顺序则有着极大的任意性，我们鼓励学生按其爱好而作出选择．我们必须声明，我们的处理方式并非总是最经济的，而在大学的许多数学讲义中，则偏爱在逻辑上取直捷的顺序；但是我们相信，多数的学生在学习时，经历了一个远非直线式的道路，（包括学习上述的讲义在内）仅只是在达到某种熟练程度时，才产生要看以直线方式写出的作品的愿望．以残忍的直线方式写讲义，远比螺旋接近的技术容易．如果教学的目的远比给阐述者以美学的满足更为重要的话，那我们就必须把教学法的技巧置于纯逻辑的要求和完美体系的要求之上．由布尔巴基带给我们的数学的统一和顺序的思想已经造成了影响．我们还应注意皮亚杰的错误影响．在任何情形，孩子们的波动将很快地传到大学里来，它起因于一些新的教学计划里更自由的教学途径，大学必须做好准备，好与之相适应．

第二部分涉及到集合论本身，那是说，集合论作为一种数学训练，更甚于它作为数学论说的一种媒介．这部分的题材（例如排列的研究）可以使读者充分认识到学究式的不必要．把这一点明白地说清楚，事关重大．但是，在这部分我们试图明确提出的基本前提，在初等的数学论证中常常比较隐晦，甚至没有被注意到．另一方面，我们所写的集合论是“质朴”的，而在第八部分的第三十九章，则采取一种更具有人为加工的方式．

第三部分涉及到算术，这部分包含着对基础的再检验，对算术的基础概念，则采取更一般的观点，我们介绍了代数结构（阿贝尔群、环等等）为的使传统著作中所提出的因式分解，质数等整数性质的本质得以显示出来．然后，我们就进入到可以大大的扩充

〔注2〕让我们重复一句，如俗话所说，随着概念的增多，语言也将渐渐增多．

这个理论的应用范围的境界．在第十三章里，我们给出某些应用，学生们在现阶段来说可能是不那么熟悉的．

第四部分涉及到三维空间的几何，我们把这部分紧接在算术之后，是因为我们觉得计数和度量是数学的两个基础概念，并从中构成我们的数系理论．我们的陈述显然是代数的，而且我们大量的使用向量．然后在第十七章，我们讨论了公理问题，介绍了实和复的射影平面，并以之阐述克莱因关于几何的本质的观点．

第五部分涉及到代数，当然不能认为代数直接来自算术，两者重叠极多．我们武断地认为代数是由算术对整数的研究而感发出来的，而且是算术研究的一个应用．相应地，我们在这部分陈述的代数概念，有着更一般的应用（例如在几何上）．这部分的许多思想，包含在第四部分（和第三部分）的讨论之中．在这一部分，这些观点提得十分严格和明白，并从解释代数结构的观点来加以研究．在第二十一章，我们将涉及一个给定集合的序关系和代数结构之间的相互作用．这导致我们写出戴德金的实数定义和关于布尔代数的一个简要叙述，它是在第二部分（第八章）开始形成的概念．

第六部分涉及到数系的系统发展，实 n 维空间 R^n 上的拓朴，和实的 n 数组的集合．这里比本书的其他部分更引人注目，螺旋接近是明显的，因为假定了全部过程都与数系一致，我们来构造它！第二十四章原则地指出了由有理数发展到实数的结构．也许这是全书中最困难的一章，因为在那里，严格的叙述很难附以动机的介绍，而所给的消化时间又是一点点，进一步，又从交换环上的理想论的观点（哥西数列）叙述了实数结构，因为我们假定学生已经吸收了必要的代数——算术背景．有人认为写实数结构是教学法上的一个错误，他们的观点是应该公理化地介绍完备的阿基米德有序体．而完备化的过程，则应在后面讨论一般矩阵空间时再介绍，我们希望，我们的关于结构的学究式的处理，能为学生们在时机到来时，自己推广到任意矩阵空间，提供一些便利．我们相信，对许多学生来说，这是他们对完备化过程的仅有的一次接触．对那些今后不再继续学习纯数学的专业课的学生，我们不赞成让他们一辈子对于实数是怎样由有理数构成的，保持无知状态．数学家对这样的一些学生同样是负有责任的！在第二十五章，我们着手正式研究 R^n 中的拓朴．我们希望读者将由此看到，某些基础概念（如函数的连续性和数列的极限）实际上是拓朴性质的，从而使他们能更好地理解这些概念．我们还希望读者能得到一门学科的有意义的介绍．今天这门学科在数学的许多领域都在起着作用，而该学科本身就是一个十分活跃的探索领域．这章的一部分内容，首先在数学教学月刊（也在小册子[45]）上发表过，我们感谢原作者同意在此引用这些内容．

第七部分涉及到单元和多元的微分学和积分学．关于这个课题的广泛陈述，其本身实质上就需要一本书——分析的教本如此之多，就是证明．在这部分(比其它部分更突出)，我们的目的不在少讲，而是为标准定理的证明，提示其他教科书；在想把本书篇幅保持在一定限度的同时，还要注意到我们的主要革新是在记号和观点上，关于这种水平的分析课本中，什么是重要的性质，我们和其他作者本质上是一致的．然而我们对于实际教分析时，持绝对严格的观点这一问题，还要说几句．无疑的，许多学生在数学课中，首次接触到分析时，是栽了筋斗的，另外一些学生，则是把分析作为一些法则的汇集来学习，在数学分析课程面前，表现出严重的混乱．在他们看来，迄今为止，分析的学习，除了处处是疑问以外，什么都没有学到．我们的目标，是想把分析学表述为，基于代数和实数这两个基础，而又不忘记注入几何的灵感，数学的本质的发展的一部分．籍口分析是一个困难的数学训

练，因而给出它的全部基础理论，还连带着全套的证明，这样使得，甚至多数有才能的学生也高度紧张．然而，这是一种错误的路线．因为省掉某些证明，我们不仅在适当的地方甩下了我们的包袱，而且我们也不相信，多数学生在这阶段能掌握住它们．这里，我们再次求助于螺旋接近．着眼于学生在这一水平下的思想准备，他们还没有达到数学上足够的成熟程度来严格论证全部定理，而需要的是技巧及其应用．必然，严格，但可能不完备的处理将成为一个一般的基础．为避开完备性，我们坚持正确清晰的陈述和坦率的介绍．这样，关于哪些是已经证明了的，而哪些是还没有证明的，学生就不会产生疑问．再插一句，在数学教育中，对师生来说，最痛苦的方法就是要忘掉那些所学的错误东西．因而公开坦白地略去证明，远较那些先给一个基本上不正确，而后又要抛掉的论证要好得多．当然，假如把不成熟的地方，坦率地描述过了，那么一切似乎合理的议论常常是重要的．在任何水平下，设计螺旋接近的数学课程的主要任务，就是使它具有最少数量应该忘掉的错误东西，如果我们已接近满足了这个正确的标准，我们就满足了。

第八部分和第四部分相似，前面关于每部分在全书所起作用的论述是不包括这部分在内的．它所包含的两章，实际上具有附录的性质；同时，它在全书中起着特殊的作用．第三十八章专论范畴和函子，在某种意义上说，这是第一部分的继续，它扩大了数学的基础语言．因而对于数学不同分支之间的关系，可以像对任一特殊分支的内容那样进行讨论．在简介的前面部分，我们早已指出加进这一章的理由．最后一章同样也是第二部分的一个延伸，它引导读者深刻领会数学的论理学，以及它在考察一些不熟悉的题材组成的系统的特性和本质时的那种予见性．当然，我们只能给出今日探索领域的一个使人着迷的概观，但是我们希望这足以使学生信服，任何数学，它不是寻求绝对具体的东西．

6．练习

我们深信，几乎任何一本数学书都(比我们)说得更明白——如果不是更易读的话，因而我们在这本教科书里，包含了许多练习，这些练习分成组，每章按顺序编号．如像书中的21练习3（ii）表示第二十一章第三组练习的第二题．我们不想表白书中的这些练习，恰能使本书作为中学或大学课程的合用教材．这样的适用性是对其它的教材而言的．在任何情况下，练习中的许多题是高度的没有定论的，用以表明数学的生动性；不像某些人所责难的那样，是花上半个小时来巧妙地回答问题那么回事．这样一种广泛包容的想法，是针对传统的僵化了的考试体系而产生的．但这样的设计，很难使学生从习惯了的体系中解脱出来．我们试图表明，数学不仅是对未知的回答，而且充满了问题，甚至我们还不清楚这些问题是些什么！另一些练习，则是些标准的测验，是为了解理论而给出的练习，我们希望练习包含的内容，足以反驳那种“近代数学”全是理论而没有解题练习的责难．但是，十分有必要对现行的题目系统补充好的问题，我们敦促读者，钻研技巧以完成练习．我们自己，确实是在试图对自己提出和回答问题的偶然尝试中，获得了对数学的理解的大部分的，（在研究的水平或课堂教学的水平上）．基础练习所安排的问题是给他的朋友们布置的（当然可以包括他的学生），他不是以表明某人无能为目的的，而是希望说明数学的某个方面．

为了帮助读者在数学中找到更多使他感兴趣的部分（也许要通过练习），我们安排了一个完美而丰富的书目提要，本书中要参考到这些内容时，都指出了著者和编号．

诸如希尔伯特[57]．我们特别介绍读者，去阅读如像在*Bell*[10]中所阐述的，关于伟大的数学家所走过的道路，以及一门学科通过长远的历史过程，而得到发展的道路．总之，读者应该牢记，你是这个历史的一部分，而伟大的数学家们，在具有共同职业的社会中，是和你们联系在一起的，读者不应太自谦，他要对自己说："去，你也同样干吧"．

7．感谢

我们要感谢我们的出版者，V.N.Reinhold公司，在孕育原稿的长久年月中，无限的耐心和经常的鼓励，以及由原稿问世到出版过程当中所给予的种种方便和一贯的帮助．J.F.P霍德森教授，从数学观点上审阅了全书，因而他完成了一项十分艰巨的工作．对他指出的错误、矛盾和含混之处，我们十分感谢，如果还有其他问题，当然应由作者们负责．

我们还要感谢那些教育我们懂得数学的人们的有价值的指导，我们所希望传达给读者的一些想法，出自于他们的教导．

南安普顿　N.H.B.G

纽约　依萨卡　N.P.J.H

阅读指导

为引起读者对下列专题的兴趣(例如，通过讲演课)我们提出了下列的分组，并对每部分指出了予备知识. 这些安排，总是假定第一部分安排在开头，甚至在不是详读的时候也是如此. 假定读者已经熟悉了下列题材，即在代数中他应会使用代数公式，做整数和简单多项式的因式分解，解联立方程组，懂得小数、对数、指数，或许还得懂一点复数. 解几中他应该知道图形、斜率、圆和圆锥曲线以及平面三角的基本概念. 在分析中他要会微分和积分含有三角函数、指数函数、对数函数的简单表达式，还希望能知道一点用反证法进行演绎论证的思想，如果读者的知识在这些题目上还有漏洞的话，他可以随着课程的进行，通过查阅附录上列举的书而及时地得到补充.

全书的课程或课题的可能分组为：

课程 1　朴素的集合论和逻辑. 第一至八章，还可以包括第三十九章，除为了说明目的，没有什么予备知识.

课程 2　代数. 第九至十三章，十八至廿一章，以及还可能有八，廿三，卅八章.

予备知识：二次式的因式分解，分解整数为因数；方程的根，复数.

课程 3　几何. 第十四至廿章

予备知识：关于坐标几何的概念和初等三角.

课程 4　几何和拓朴. 第十四至十七章和第廿五章.

予备知识：同课程 3，以及连续的直观概念加上群的概念.

课程 5　分析. 第廿六至三十章；深一些的有第卅一至卅七章.

予备知识：向量空间和环的定义，以及以前接触过的，一本适当的分析教程.

第廿三章和廿四章可包含在任何一课中，依照深度的要求，不同的题目可从各部分里省掉，或者是再加上别的题目. 但是每个分组约占了 120 页的篇幅(加上第一部分)，因而大致上相当于大学里的一门课. 即是说，约有三十讲. 但实际上这将取决于取舍内容的数量.

凡例

符号“8.5.4”表示第八章第五节第四款，而“8.5”表示第八章第五节.

在书页的左面划一竖线，表示这题材实质上不是作为第一次阅读用的.

关于练习的标号已在简介里作了说明. 但是在一章里，习题的章数被省去了.

符号 § 表示技巧难度较大，提示用圆括号标明，注释用方括号标志.

方括号里的数，所指示的是列在参考文献里的书.

目　录

目　　录