

四川省“十二五”规划教材



高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学 (第3版)

王光钦 丁桂保 杨 杰 编著
陈 虬 审



清华大学出版社



主要特色

- * 将弹性力学基本理论框架作为弹性理论展开的发源点和支撑点，形成了新的内容体系，既给分类问题的展开创造了条件，又为理论的系统性阐述留有适当空间。
- * 首次推导了平面应力问题位移解的应有形式，并从位移解的构造出发阐述了一般平面应力问题的近似性，并且较好地处理了三维向二维的过渡问题，具有新颖性。
- * 曲线坐标下的基本方程独立成为一章，将空间轴对称和球对称基本方程与求解方法放到这一章中，与曲线坐标下的基本方程推导形成一体。
- * 引入笛卡儿张量，既使理论推导简化，又为读者阅读文献和进一步学习打下基础。笛卡儿张量的使用贯穿全书的理论部分。
- * 变分法既是弹性力学问题的近似解法，又是近代有限元法的基础，本书对这一问题的论述篇幅较大，比较注意其在数学上的共性、概念的准确性及其与现代变分原理的联系。

作者简介

王光钦 西南交通大学力学与工程学院教授。曾被聘为中国力学学会第五届教育工作委员会委员。研究方向为断裂力学、疲劳可靠性、有限元及其应用。发表论文20余篇。主讲本科和研究生材料力学、弹性力学、塑性力学、断裂力学和疲劳可靠性等10余门课程。主编《弹性力学》、《变分法及其在固体力学中的应用》、《弹性力学理论概要与典型题解》等。曾获四川省教学成果一等奖。

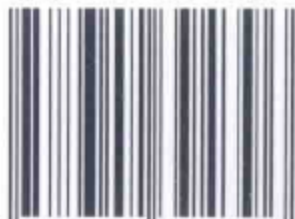
丁桂保 西南交通大学力学与工程学院副教授。研究方向为结构安全可靠性、有限元法应用及其数值模拟。发表论文近10篇。主讲本科和研究生工程力学、弹性力学、塑性力学、有限元法等课程。

杨杰 西南交通大学力学与工程学院教授，博士生导师。长期担任本科及研究生弹性力学、塑性力学课程的教学工作。从事高速铁路、生物医学等领域中的力学研究。

清华大学出版社数字出版网站

WQBook  
www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-39439-6



9 787302 394396 >

定价：42.00元

高等院校力学教材
Textbook in Mechanics for Higher Education

弹性力学 (第3版)

王光钦 丁桂保 杨 杰 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书第1版于2004年4月出版,2008年8月作为“十一五”国家级规划教材出版第2版。通过多年试用,并考虑到精简学时后教学的实际需要,经过适当的删减和调整,现再次改版。本版教材保留了原版教材的主要风格。

本书较全面地论述了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法,力求反映弹性力学的最新研究成果。本书共11章,内容包括:弹性力学基本方程的建立、应力、应变与本构理论及平面问题、空间问题、扭转问题、弹性力学问题变分解法等基本内容;在数学方法上,阐述了弹性力学问题的微分方程方法、变分方法与复变函数方法;在数学工具方面,涉及微分方程、复变函数、变分法、笛卡儿张量等。

本书尝试将弹性力学基本理论框架从弹性力学理论体系中分离出来,形成一套新的内容体系,以求在保证理论系统性的同时,尽量做到由浅入深、由易到难、循序渐进地展开。

本书的读者对象主要是土木类、机械类及航空航天类相关专业研究生和力学专业本科生,对力学专业研究生和工程技术人员也有一定的参考价值。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学/王光钦,丁桂保,杨杰编著.--3版.--北京:清华大学出版社,2015

高等院校力学教材

ISBN 978-7-302-39439-6

I. ①弹… II. ①王… ②丁… ③杨… III. ①弹性力学—高等学校—教材 IV. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第036597号

责任编辑:佟丽霞 洪 英

封面设计:傅瑞学

责任校对:赵丽敏

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:北京富博印刷有限公司

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:21 字 数:512千字

版 次:2004年4月第1版 2015年7月第3版 印 次:2015年7月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:42.00元

第3版序言

本书第1版于2004年4月由中国铁道出版社出版,2005年重印一次,2008年8月作为“十一五”国家级规划教材出版第2版。通过多年试用,并考虑到精简学时后教学的实际需要,经过适当的删减和调整,现再次改版,并由清华大学出版社出版。本版教材除了保留原版教材的主要风格以外,大致改动如下。

(1) 删去了弹性力学问题的曲线坐标解法、弹性薄板的小挠度弯曲和弹性力学的哈密顿求解体系3章内容。

(2) 将曲线坐标下的基本方程等内容作为独立一章,该章主要阐述空间轴对称和球对称基本方程及求解方法,与曲线坐标下的基本方程推导形成一体。

(3) 将纳维-拉梅方程的通解与半空间体在边界上受法向集中力作用等问题放在一章,既分散了难点,又显得比较自然。

由王光钦编著的《弹性力学理论概要与典型题解》(西南交通大学出版社,2009)可与本书配套使用。本书被列为四川省“十二五”规划教材,得到清华大学出版社、西南交通大学教务处、西南交通大学力学与工程学院及结构分析与工程系的大力支持,并被列为西南交通大学重点规划教材,特此鸣谢。

希望使用本书的广大师生和读者对书中存在的问题提出宝贵意见。

编者
2015年4月

第2版序言

弹性力学是工科力学及工程类相关专业的重要技术基础课程。弹性力学教学内容体系大体上可以划分为以下两大类。

(1) 一般到特殊的课程体系。这种体系一开始就全面阐述应力理论、应变理论和本构关系,其理论系统性强,但起点较高,难点集中,入门难度较大。

(2) 特殊到一般的课程体系。它是以弹性力学分类问题为线索编排的,先讲平面问题,然后再讲空间问题、扭转问题等其他问题。平面问题是二维的,起点相对较低,相应的概念比较容易建立。但是,其每类问题都是独立讨论、自成体系的,不易把握它们的内在联系。

弹性力学的 15 个基本方程和相应的边界条件构成了弹性力学框架性的理论提法,由此可以演绎出其他的描述方法及与各类问题相应的各种求解方法。这一部分内容只涉及一些简单的平衡关系和几何分析,容易推导。因此,本教材尝试将这一基本理论框架从弹性力学理论体系中分离出来,形成一套新的内容体系,以求在保证理论系统性的同时,尽量做到由浅入深、由易到难、循序渐进地展开。

本书的写作目的是为工程类相关专业研究生和力学专业本科生提供一本难度适中的实用教材。本书较全面地论述了弹性力学的基本概念、基本理论和基本方法,力求反映弹性力学的最新研究成果。本书共 13 章,包括弹性力学基本方程的建立、应力、应变与本构理论及平面问题、空间问题、扭转问题与薄板弯曲问题等基本内容;在数学方法上,述及了弹性力学问题的微分方程方法、变分方法与复变函数方法;在求解方法的数学体系上,还对弹性力学的哈密顿新求解体系作了适当介绍。在数学工具方面,涉及微分方程、复变函数、变分法、笛卡儿张量及辛数学等。我们注意到,相当一部分读者不具有这方面的系统知识,在编排时特将有关数学基础穿插在相关章节的前面,以便于读者自学和教师组织教学。

本书主要特点如下。

(1) 将弹性力学基本理论框架从弹性力学体系中剥离出来,作为弹性理论展开的发源点和支撑点,既给分类问题的展开创造了条件,又为理论的系统性阐述留有适当空间。

(2) 以各类问题的特点为先导,形成各类问题特定的理论提法和解法。在内容安排上,力求由浅入深、由易到难。

(3) 在了解弹性力学的基本概念和平面问题求解方法的基础上,集中阐述应力、应变理论和应力-应变关系,既照顾到理论体系的完整性,又达到难点分散、循序渐进的目的。

(4) 适当地引入笛卡儿张量工具,既使推导简化,又为读者阅读文献和进一步学习打下基础。

(5) 半逆解法是经典弹性力学理论的主流解法,有很大的局限性,本教材尝试引入哈密顿新求解体系,以突破传统方法的约束,给读者以新的概念和新的视野。

(6) 小挠度薄板理论是应用弹性力学中颇具代表性的一部分内容,同时又具有重要的工程应用价值,因此用了较大的篇幅来阐述它的理论体系和求解方法,并编列入了较多的例题。

本书的读者对象主要是土木类、机械类相关专业研究生和力学专业本科生。本书前4章也可供工程类相关专业本科生选用,对力学专业研究生和工程技术人员也有一定参考价值。

本书于2001年成稿,并于2004年由中国铁道出版社出版,近年来一直在西南交通大学工科研究生和力学本科生中使用。原书共12章,分工如下:第1、2、5、9章由王光钦编写,第3、4章由杨杰和王光钦编写,第6章由王光钦和丁桂保编写,第7、8、10章由丁桂保编写,第11、12章由刘长虹编写;陈虬教授审阅了全部书稿,提出了不少宝贵意见。此次出版是在2004年版本的基础上,吸收了教学双方的各种意见经全面修订而成;主要工作包括:添加“薄板弯曲”一章,全面改写“哈密顿新求解体系”一章,“柱形杆扭转”一章中的第4、5节改用了应力函数解法,“曲线坐标解法”一章增加了一些基本关系的推导等。此外,为了照应前后内容,章节的顺序也做了适当调整。修订工作由王光钦教授执笔,参加修订工作的还有丁桂保副教授和杨杰副教授。

本书在编写过程中得到中国铁道出版社、西南交通大学教务处、西南交通大学应用力学与工程系及工程力学教研室的大力支持,弹性力学课程教学内容体系的探讨曾列为西南交通大学教改项目,特此鸣谢。

由于编者水平所限,错误之处在所难免,敬请有关专家及读者批评指正。

编者

2007年10月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 弹性力学的任务和研究对象	1
1.2 弹性力学的基本假设	3
1.3 弹性力学的研究方法	5
1.4 弹性力学的发展简史	5
习题	7
第 2 章 弹性力学的基本方程和一般定理	8
2.1 荷载 应力	8
2.2 平衡(运动)微分方程	11
2.3 斜面应力公式 应力边界条件	13
2.4 位移 应变和位移边界条件	15
2.5 几何方程	17
2.6 广义胡克定律	19
2.7 指标表示法	21
2.8 弹性力学问题的一般提法	24
2.9 叠加原理	26
2.10 弹性力学问题解的唯一性定理	27
2.11 圣维南原理	29
习题	31
第 3 章 平面问题的直角坐标解法	35
3.1 两类平面问题	35
3.2 平面问题的基本方程与边界条件	38

3.3	应力边界条件在特殊情况下的具体化	41
3.4	位移解法	43
3.5	相容方程 应力解法	46
3.6	应力函数 应力函数解法	50
3.7	多项式逆解法解平面问题	53
3.8	悬臂梁的弯曲	56
3.9	简支梁的弯曲	61
3.10	楔形体受重力和液体压力	64
3.11	简支梁受任意横向荷载的三角级数形式解答	65
	习题	68
第 4 章	平面问题极坐标解法	72
4.1	极坐标中的基本方程与边界条件	73
4.2	极坐标中的相容方程 应力函数	76
4.3	与极角 θ 无关的弹性力学问题	79
4.4	圆环或圆筒问题	82
4.5	曲梁的纯弯曲	85
4.6	含小圆孔平板的拉伸	87
4.7	楔形体在楔顶或楔面受力	91
4.8	利用边界上应力函数的物理意义推断域内应力函数	96
4.9	平面轴对称问题的位移解法	98
	习题	101
第 5 章	应力张量 应变张量与应力-应变关系	104
5.1	应力分量的坐标变换 应力张量	104
5.2	主应力 应力张量不变量	107
5.3	最大剪应力	111
5.4	笛卡儿张量基础	113
5.5	相对位移张量与转动张量 物体无限邻近两点位置的变化	118
5.6	物体任一点的形变状态 应变张量	121
5.7	主应变与应变张量不变量 最大剪应变	124
5.8	广义胡克定律的一般形式	127
5.9	弹性体变形过程中的能量	128
5.10	应变能和应变余能	131
5.11	各向异性弹性体的应力-应变关系	133
5.12	各向同性弹性体的应力-应变关系	138
5.13	各向同性弹性体各弹性常数间的关系及应变能的正定性	140
	习题	142

第 6 章 空间问题的控制方程与求解方法	149
6.1 位移法 纳维-拉梅方程	149
6.2 应变相容方程	152
6.3 由应变求位移	157
6.4 贝尔特拉米-米切尔方程 应力解法	162
6.5 应力函数及用应力函数表示的相容方程	168
习题	169
第 7 章 正交曲线坐标中的基本方程与空间对称问题的解法	173
7.1 曲线坐标	173
7.2 正交曲线坐标中的平衡微分方程	176
7.3 正交曲线坐标中的几何方程	179
7.4 正交曲线坐标中的物理方程	181
7.5 柱坐标 球坐标系中的基本方程	183
7.6 球对称问题的基本方程与位移解法	185
7.7 轴对称问题的基本方程与应力函数解法	188
7.8 回转体在匀速转动时的应力	192
习题	194
第 8 章 纳维-拉梅方程的通解及其应用	196
8.1 弹性力学的位移通解	196
8.2 拉梅位移势	201
8.3 关于调和函数和双调和函数	202
8.4 半空间体在边界上受法向集中力作用	204
8.5 无限体内一点受集中力 P 作用	206
8.6 半空间体在边界面上受切向集中力作用	208
8.7 半空间体表面圆形区域内受均匀分布压力作用	209
8.8 两球体的接触问题	212
8.9 两任意弹性体的接触	215
习题	218
第 9 章 柱形体的扭转	220
9.1 位移法的控制方程和边界条件	220
9.2 应力函数解法	223
9.3 剪应力分布特点	226
9.4 椭圆截面杆的扭转	228
9.5 具有半圆形槽的圆轴的扭转	231
9.6 同心圆管的扭转	232

9.7	矩形截面杆的扭转	233
9.8	薄膜比拟	236
9.9	开口薄壁杆件的扭转	238
9.10	闭口薄壁杆件的扭转	241
9.11	关于端面边界条件的补充	243
	习题	245
第 10 章 弹性力学问题的复变函数解法		248
10.1	复变函数方法的数学基础	248
10.2	应力函数的复变函数表示	251
10.3	应力和位移的复变函数表示	252
10.4	边界条件的复变函数表示	254
10.5	保角变换	255
10.6	正交曲线坐标下应力和位移的复变函数表示	258
10.7	带圆孔无限大板的通解	262
10.8	多连通域中应力和位移的单值条件	266
10.9	无限大多连通域的情形	269
10.10	孔口问题	271
10.11	椭圆孔口	274
10.12	裂纹尖端区域的应力	278
	习题	282
第 11 章 弹性力学问题的变分解法		286
11.1	变分法基础	287
11.2	变形体虚功原理	291
11.3	虚位移原理及其应用	293
11.4	最小势能原理	297
11.5	用最小势能原理推导问题的平衡微分方程和力的边界条件	299
11.6	瑞利-里兹法	303
11.7	伽辽金法	308
11.8	虚应力原理与最小余能原理	310
11.9	基于最小余能原理的近似解法	312
11.10	广义变分原理	316
	习题	320
参考文献		326

第 1 章

绪 论

1.1 弹性力学的任务和研究对象

弹性力学又称弹性理论,是固体力学的一个分支。它研究弹性体由于荷载作用而引起的内力状态和变形规律。这里的荷载是指机械力、温度、电磁力等各种能导致物体变形和产生内力的物理因素;这里的弹性体是指区别于理论力学中的刚体的一种可变形体,卸载后能完全恢复其初始形态和尺寸。在掌握了物体的内力和变形规律以后,就不难确定结构构件和机器零件的强度、刚度和稳定性,从而达到实施或改进结构和零件设计的目的。

弹性力学与材料力学就基本任务而言是相同的,但它们研究的对象却不尽相同。由于研究对象上的差异,决定了它们要采用不同的研究方法,即便是对于同一个问题,一般地会得到不同的结果,而且弹性力学研究的问题比材料力学要更深入、更精确。

弹性力学研究的对象包括杆件、板、壳和实体结构(如挡土墙、水坝、地基等)。

杆件是材料力学的主要研究对象,具有细而长的几何特征。杆件的拉压、弯曲、扭转是材料力学研究的几个主要内容。在材料力学中除了必要的基本假设之外,为了简化问题,根据实验观察,还引用了附加的变形假设或附加的应力假设。这样,必然会在结果中产生误差。弹性力学求解这类问题不引进任何附加假设,按照严格的微分方程的边值问题进行求解,所得的解是精确解。对比弹性力学与材料力学的结果,可以确定出材料力学附加假设所带来的局限性。

首先,我们来考察一下变截面杆的拉伸问题(见图 1-1(a))。在研究等截面直杆拉伸时,材料力学引用了平面假设,即横截面变形前为平面,变形后仍为平面。在此假设下推论出横截面上应力均匀分布,并认为纵向纤维间无挤压。变截面杆拉伸时,沿用等截面直杆拉伸的结果,认为横截面上应力也是均匀分布的(见图 1-1(b)),纤维间也互不挤压。按照这一假

设,在杆的侧面上取出一个微元体,如图 1-1(c)所示。显然,微元体不满足平衡条件,因而是错误的。要满足平衡条件,微元体的受力应如图 1-1(d)所示,这只有通过弹性力学方法才能求解。弹性力学的求解结果表明,只有当斜角 α 很小时,即接近于等直杆时,材料力学的结果才有被引用的价值。

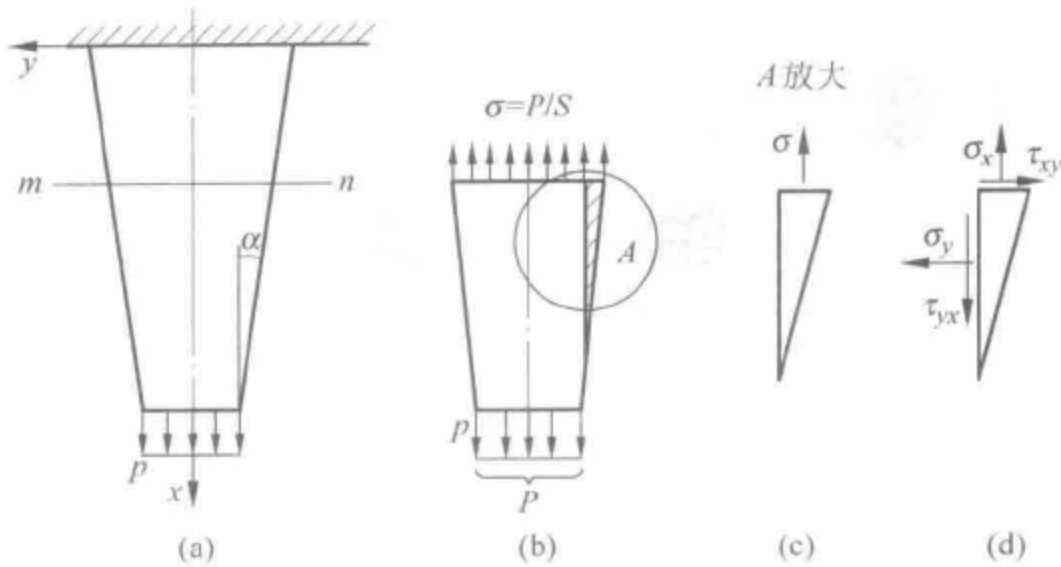
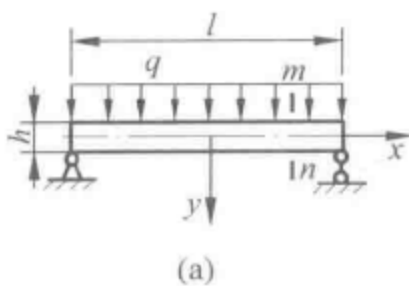
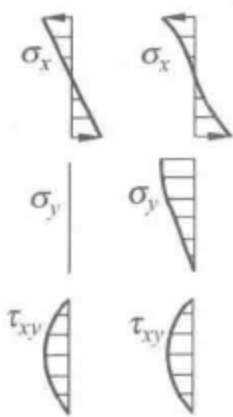


图 1-1



(a)



材料力学解 弹性力学解

(b)

图 1-2

其次,考察均布荷载作用下的简支梁(见图 1-2(a))。对于纯弯曲问题,材料力学引用平面假设,即梁受力弯曲后,横截面保持为平面,且垂直于梁变形后的轴线。在物性方面,也认为纵向纤维间无挤压。对横力弯曲问题分两步求解,首先按纯弯曲梁的求解方法,计算横截面上的正应力(σ_x),结果为线性分布;再在纵向纤维挤压应力 $\sigma_y=0$ 的假设前提下,根据体元的平衡条件,推出剪应力(τ_{xy})为二次抛物线分布,如图 1-2(b)所示。图 1-2(b)中,还绘出弹性力学的求解结果:横截面上的正应力 σ_x 为 y 的三次曲线;纵向纤维的挤压应力 σ_y 也为 y 的三次曲线分布;而剪应力解,则两者完全相同。严格地讲,在横力弯曲中,由于剪应力的存在,横截面要发生翘曲,平面假设已不成立;而横向力的存在本身就意味着纵向纤维的挤压并不为零。与弹性力学精确解比较,当梁的高跨比 $h/l \leq 1/5$ 时,材料力学的结果可以认为是足够精确的。对于深梁问题,如图 1-3 所示正方形薄板受均布荷载作用,此时只能用弹性力学方法求解。在图 1-3 中还表示了对称面上正应力分布曲线,A 点处,弹性力学的解为 $\sigma_x = 1.84q$,如果用材料力学方法求解则为 $\sigma_x = 0.75q$,误差为 145%。

最后,考察非圆截面杆的扭转。借助于平面假设,材料力学研究了圆截面杆的扭转问题,弹性力学解证明了材料力学解是精确的。但非圆截面杆扭转时,横截面要发生翘曲,即平面截面假设不成立。因此,材料力学的方法已失去应用的前提,而必须采用弹性力学方法。

工程上经常遇到的板、壳及实体结构,已超出了材料力学的研究范围,因而只能应用弹性力学理论加以解决。

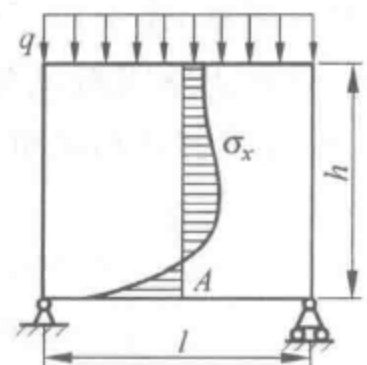


图 1-3

1.2 弹性力学的基本假设

构件或零件是由物质构成的,而物质在构成和性质上是千差万别的。人们在进行零件、构件的内力和变形分析时不可能对问题的每一个细节都加以考虑,而只能按照事物的主要方面进行抽象。同时,为了使问题简化,达到数学上容易处理的程度,不得不设定一些前提条件。建立在这种理想化模型基础上的理论,自然也就决定了它所提供解答的适用范围。本书所讨论的问题属于经典弹性力学的范畴,它建立在如下基本假设的基础上。

(1) 连续性假设

认为组成物体的介质充满了物体所占的空间,物体中不存在任何间隙。

真实的物质构成是非连续的。微观物理学上已证明,物质由原子、分子组成,而原子与原子间、分子与分子间是存在着间隙的。固体力学的研究方法是唯象学的方法。它观察宏观现象,并又将其结果用于宏观世界。在进行宏观结构分析时,已无须去涉及微观结构的信息,因此可将物体抽象为连续介质。宏观的物体与微观的粒子之间,显然在结构尺寸上有“粒子间的间隙远小于物体尺寸”的几何特征。类似地,在处理工程问题时,由于研究问题的尺度不同,是否作为连续介质处理,常常根据相对尺寸作出判断。例如,岩体存在着各种各样的不连续面(微裂隙、片理、页理、节理),而作为地基的岩体中的一般微观、亚微观不连续面可以忽略不计,当作连续介质处理。实验观察和运用这一假设导出的结论表明,这一假设是合理的。

按照连续性假设,介质连续化以后,赖以进行强度、刚度和稳定性分析的各种力学参量,比如应力、应变、位移、能量密度等都可以写成坐标的函数,可以运用数学分析中的连续和极限的概念。

(2) 均匀性假设

该假设是指物体内的每一点都具有相同的力学性质。显然,满足均匀性假设的物体,其材料的力学性质与坐标无关。这样,由物体的某一部分测得的材料性能,对整个物体都适用。

如果物体由同一种材料组成,显然,物体是均匀的。单组分金属材料都可以看作是均匀的。如果物体由两种或两种以上材料组成,只要混合均匀,而且每种材料颗粒尺寸远小于物体尺寸,则宏观上可以认为每点具有相同的力学性质,即宏观上,它是均匀的。比如,多组分的金属材料可以认为各组分都以某种形式均匀地分散在物体内部,因此也可以看作是均匀的。又比如,混凝土本身为非均质材料。它由水泥、砂和骨料组成,假如不计不同组分交界面上的局部应力,就可以采用在足够大的材料试件上测得的材料参数来代表物体的该参数值。这里所谓宏观上的“点”应理解为一个体元,具有宏观无限小而微观无限大的几何特征。

(3) 各向同性假设

该假设是指物体内一点的各个方向上的力学性质相同。实际应用的金属材料,绝大多数是多晶体,它由大量的小晶体组成,晶体的尺度与结晶过程中的冷却速度有关,一般晶粒

大小从几微米到几厘米。单晶体由于其内部原子排列的位相基本上是一致的,因而呈现各向异性,而多晶体则是由很多微小单晶体杂乱无章地组合而成,因此多晶体各方向上的性能是单晶体不同方向性能的综合平均值,即当晶粒尺寸远小于物体尺寸时,在宏观上,多晶体就是各向同性的。但是木材、复合材料、地壳结构等必须考虑各向异性。

从以上分析可以看出,无论是连续性假设,还是均匀性假设或各向同性假设,代表材料一点宏观性质的体元尺寸应该足够大。

(4) 完全弹性假设

所谓完全弹性就是物体在荷载作用下发生变形,当这些荷载拆除以后物体能完全恢复到原来的形状和大小,而没有任何残余变形。其应力、应变是一一对应的。它包括线性弹性和非线性弹性,如图 1-4(a)所示。有一部分材料,当应力较小时表现为线性弹性,而当应力超过弹性比例极限(σ_p)后表现为非线性弹性,如图 1-4(b)所示。经典弹性理论研究线性弹性材料。

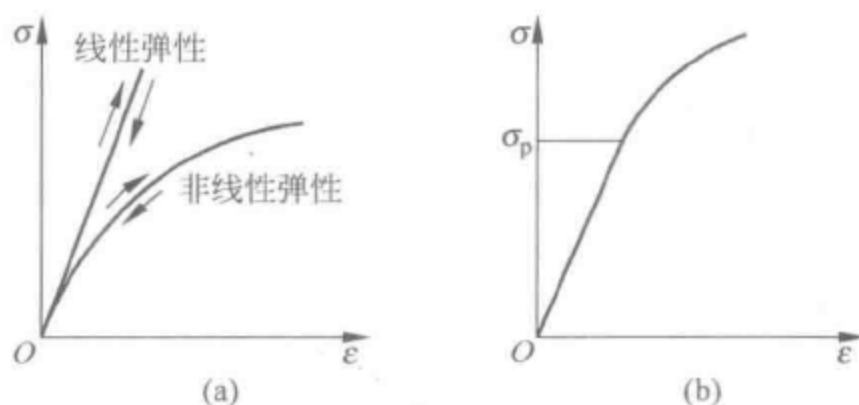


图 1-4

凡符合以上 4 个假设的物体,称为理想弹性体。

(5) 小变形假设

假定物体各点在荷载作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸,因而应变分量和转角都远小于 1。应用这一假设,可使问题大为简化。例如,在研究物体受力平衡时,可以不考虑由于变形引起的物体尺寸和方位的变化,即按变形前的几何尺寸及荷载状态进行计算。又如,在研究物体的形变和位移时,可以略去应变和转角的二次幂或二次乘积及其以上的项。这样,在小变形条件下,弹性力学的全部基本方程及控制方程都是线性方程,因此,在求解弹性力学问题时,不需要去跟踪加载过程,只需对最终状态进行求解即可。

(6) 无初应力假设

假定物体的初始状态为自然状态,即荷载作用以前物体内部没有应力。由荷载引起的应力称为附加应力,弹性力学只研究这部分附加应力,为了方便,以后简称为应力。

当初应力存在时,在不违反叠加原理的前提下,物体内部实际应力等于初应力加上附加应力。在焊接结构中,初应力一般是有害的。而在土建工程中,却常常采用一些预应力结构,以便更充分地利用材料。

上述基本假设中,小变形假设属几何假设,其余为物理假设。

以上述基本假设为基础建立的固体力学理论,称为线性弹性理论,简称弹性理论或弹性力学。它发展较早、理论严密、体系较完整,在工程实践中被广泛应用。

1.3 弹性力学的研究方法

学过理论力学,我们已经知道,对机械运动的描述分为静力学、运动学和动力学三大部分。静力学研究处于静止状态物体的力的平衡条件,运动学研究物体运动的几何性质及运动规律,动力学则研究物体的机械运动与物体相互作用力之间的关系。引入的基本力学参量包括力、速度和质量。弹性体与刚体不同,它是可变形固体。但是,弹性体的机械运动仍然必须遵从机械运动的普遍规律。如果把弹性体视为由无穷多个质点组成的质点系,那么,在机械运动中的力就应该包括质点与质点相互作用的内力。作为物体变形的描述,在变形体力学中引入了应变的概念,则内力与变形之间应该满足的关系就成为变形体力学必须满足的基本关系之一。因此,变形体机械运动应该满足的基本方程包括静力学(动力学问题可根据达朗贝尔原理按静力学问题处理)、几何学、物理学三个方面。材料力学已经按这三个方面建立了自己的理论体系,弹性力学也将从这三个方面着手建立起自己的理论框架。

如果仅根据 1.2 节的基本假设,用严格的数学推演方法来建立理论体系和求解弹性力学问题,这样的弹性力学称为数学弹性力学。本书的内容属于数学弹性力学。如果像材料力学一样,在引入基本假设的同时,还引入变形和应力附加假设,则称为应用弹性力学。比如,在薄板、薄壳问题中有直法线假定。附加假设的引入,使得由数学弹性力学建立的基本方程得到简化。

材料力学在几何方面研究总体的变形,它通过变形假设将问题转化为简单拉压或纯剪切问题;静力学方面,则按分离体平衡,建立起内力与荷载间的积分形式的平衡方程;物理方面则忽略次要的应力,而直接运用胡克(Hooke)定律。弹性力学却不相同,它以一点处的变形、一点处力的平衡及一点处的力与变形的关系为出发点。在几何方面,根据运动变形分析得到一点处的几何方程;静力学方面,则是在一点附近取出一个微元体,研究微元体的平衡,得到该点处的微分形式平衡方程;而物理方面,则引用广义胡克定律。由此建立的一组方程,称为弹性力学的基本方程,它是一组偏微分方程。按照数学理论,可以在给定的边界条件下进行求解。这就是所谓的微分方程边值问题,是弹性力学问题的一种提法。弹性力学问题的另一种提法是泛函的极值问题,即所谓的变分问题。

由于实际结构和荷载的复杂性,能够用严格的数学方法求解的问题非常有限。因此,在求解方法上除了解析法以外,还广泛采用了有限差分法、有限单元法、加权残值法、边界单元法等数值方法,以及电测法、光测法等实验方法。

1.4 弹性力学的发展简史

弹性力学是在不断解决工程实际问题的过程中得到发展的,大致可以分为以下 4 个时期。

弹性力学理论的萌芽时期 大约经过了 150~160 年的时间,反映了 17—18 世纪资本主义萌芽到开始兴盛时期,水利、造船、机械、军事等生产技术上的需要,是材料力学理论形

成和发展的时期。材料力学作为一门科学,一般认为是在1638年从意大利科学家伽利略(G. Galileo)时期开始的。为了解决造船和水闸问题,他在巨著《两种新科学的叙述与数学证明》中第一次提出了梁的弯曲问题及强度计算的概念。1678年,英国科学家胡克(R. Hooke)在大量实验的基础上,发现了弹性体变形与所受外力成正比的规律。后来,人们称之为胡克定律。此前,他已利用这一关系发明了弹簧,并取代了旧时钟用的重力摆。1680年,马略特(Mariotte)给出了梁的应力分布,并确定了中性轴的位置。17世纪末,伯努利(Bernoulli)提出了弹性杆挠曲线的概念;1705年,他又给出了梁的变形几何假设(平面假设)和弯曲公式。1738年,瑞士科学家欧拉(Euler)和伯努利得出了梁的方程。1757年,欧拉又给出压杆稳定公式。法国科学家库伦(Coulomb)1773年提出了强度理论,1776年完成了矩形截面梁弯曲的完整理论,1784年建立了圆轴扭转理论。1807年,英国科学家杨(Young)给出了弹性模量。

在这一时期,变形体力学的发展虽然都属于材料力学的范畴,但所提出的应力、应变的概念及研究成果为弹性力学理论的建立奠定了坚实的基础。

弹性力学理论基础建立期 到18世纪末,工业革命以后,制造业和交通运输业的迅速发展提出了各种各样更加复杂的强度和应力分析问题,例如应力集中问题、平面板件结构的应力分析、非圆截面杆的扭转等。材料力学所依据的理论和方法已经不适用了。同时期,数学理论的发展取得了辉煌的成就,为弹性力学理论的建立提供了有力的工具。

1821年,法国工程师、桥梁专家纳维叶(Navier)通过对弹性体的研究,从牛顿(I. Newton)关于物质构造的概念出发,第一个建立了弹性体平衡(运动)微分方程。1822—1828年期间,著名数学家柯西(Cauchy)发表了一系列论文,提出了关于一点应变的概念,把一点附近的变形通过6个应变分量表示,并导出了运动方程。1828年,著名数学家泊松(Poisson)又进一步完善了弹性力学的基本方程。在随后的几十年间,对于各向异性和各向同性体的独立弹性系数的个数及泊松比的取值有过长期争论。后来的大量实验,使格林(Green)从能量观点出发得到的应力-应变关系得到普遍承认。1852年,拉梅(Lamé)出版了第一部关于弹性理论的著作,标志着弹性力学理论框架的形成。

弹性力学理论的发展成熟期 在这个时期,提出了弹性力学的各种解析方法和近似求解方法,并解决了大量的工程实际问题,在理论上也更臻完善。

1855年,法国的圣维南(Saint-Venant)解决了柱体的自由扭转和弯曲问题,并提出了局部性原理(圣维南原理)。1862年,艾里(Airy)提出了求解平面问题的应力函数方法。1882年,赫兹(Hertz)解决了接触问题。19世纪50年代,英国麦克斯韦(J. C. Maxwell)发展了光测弹性应力分析技术,又于1864年对只有两个力的简单情况提出了功的互等定理。随后,意大利贝蒂(E. Betti)在1872年对该定理作了普遍证明。1850年,基尔霍夫(G. Kirchhoff)解决了平板的平衡和振动问题。1873年,卡斯提利亚诺(A. Castigliano)提出了卡氏第一和第二定理。1884年,法国的恩格赛(F. Engesser)提出了余能的概念。1877年和1908年,瑞利(Rayleigh)和里兹(W. Ritz)从弹性力学最小势能原理出发提出了后来被称为瑞利-里兹法的变分问题直接解法。另一个有名的近似解法——伽辽金法是由伽辽金(Галёркин)于1915年提出的。20世纪30年代,穆斯海里什维里(Мусхелишвили)发展了弹性力学问题的复变函数求解方法。

弹性力学理论发展的深化期 在这个时期,弹性力学由线性理论向非线性理论发展;