"十三五"普通高等教育本科规划教材

材料力学习题解析

何　青　刘静静　主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

“十三五”普通高等教育本科规划教材

材料力学习题解析

主编　何　青　刘静静
参编　李　斌　张　暕
主审　杜冬梅

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育本科规划教材，是与何青主编的《普通高等教育“十二五”规划教材 材料力学》相配套的教学与学习参考书。本书继承了主教材的风格特点，结构严谨，层次分明，语言精练，通俗易懂。全书按主教材内容，共分13章，对主教材的全部思考题和习题做了详细的解答。书末安排了适用不同学时要求的四套模拟试卷，方便读者检查学习效果。本书可与主教材配套使用，也可单独使用。

本书可作为高等学校工科各专业材料力学课程的学习参考书和应试指导书，也可作为报考相关专业硕士研究生以及参加大学生力学竞赛的复习指导书，还可供大学力学教师和一般工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

材料力学习题解析/何青，刘静静主编．—北京：中国电力出版社，2015.8

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-5123-7885-8

Ⅰ.①材… Ⅱ.①何…②刘… Ⅲ.①材料力学-高等学校-题解 Ⅳ.①TB301-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第126267号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2015年8月第一版 2015年8月北京第一次印刷

700毫米×1000毫米 16开本 20.25印张 492千字

定价 **40.00** 元

前　言

材料力学是一门与工程实际密切结合的基础学科，是许多工科专业本科生必修的重要的技术基础课程，也是报考有关专业硕士研究生的入学考试科目，同时也是国家和部分省市举行的大学生力学竞赛内容。

要学好材料力学，除了要弄清材料力学的基本概念，掌握基本理论和基本方法外，还必须亲自动手实践，分析演算一定数量的习题，包括有一定难度的习题。做习题是材料力学教与学的重要环节，必须通过做一定数量的习题，才能加深对基本概念的理解，运用基本理论和基本方法解决具体的实际问题，培养分析问题和解决问题的创新能力。

本书编写的目的是为读者在对教材中习题进行演算时，提供一种参考思路，规范解题步骤和计算技巧，并不能代替读者进行独立的分析和计算。希望读者正确利用本书，提高自主学习和复习效率，扎实掌握材料力学知识，取得满意的学习和备考效果。

本书是与何青主编的《普通高等教育"十二五"规划教材 材料力学》相配套的教学与学习参考书。全书共 13 章，与主教材的章节顺序相同。对教材中全部思考题和习题逐一给出详尽解答，以帮助读者自主学习和复习。另外，为方便读者检查学习效果，书末安排了适应不同学时要求的四套模拟试卷，试卷一和试卷二适合少学时使用，试卷三和试卷四适合多学时使用。

本书由何青和刘静静主编，参加编写的还有李斌、张踕。全书由何青统稿。

本书由杜冬梅教授主审并提出了很多宝贵的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

在本书编写过程中，硕士研究生王云涛、刘觉晓、刘婧等同学做了大量的工作，在此一并表示感谢。

编　者

2015 年 5 月于北京

目　录

第 1 章 绪 论

思考题

1-1 判断题

（1）同一截面上正应力与切应力相互垂直。

（2）同一截面上各点的正应力大小相等，方向相同。

（3）同一截面上各点的切应力相互平行。

（4）应变分为正应变和切应变。

（5）应变为无量纲量。

（6）若物体各部分均无变形，则物体内各点的应变均为零。

（7）确定截面内力的截面法，适用于不论等截面或变截面、直杆或曲杆、基本变形或组合变形、横截面或任意截面的普遍情况。

（8）杆件某截面上的内力是该截面上应力的代数和。

（9）根据各向同性假设，可以认为材料的弹性常数在各方向都相同。

（10）根据均匀性假设，可以认为构件的弹性常数在各点处都相同。

答案：（1）√；（2）×；（3）×；（4）√；（5）√；（6）√；（7）√；（8）×；（9）√；（10）√。

1-2 填空题

（1）构件的承载能力包括________、________和________三个方面。

（2）构件抵抗破坏的能力称为________。构件抵抗变形的能力称为________。

（3）如图 1-1 所示结构，杆 1 发生________变形，杆 2 发生________变形，杆 3 发生________变形。

（4）如图 1-2 所示结构，杆 1 发生________变形，杆 2 发生________变形，杆 3 发生________变形。

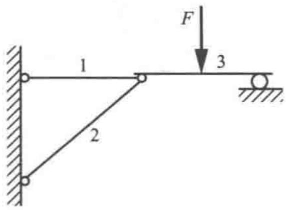

图 1-1

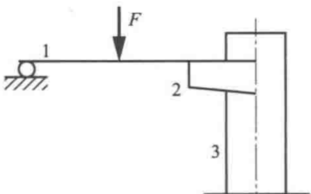

图 1-2

（5）图 1-3 所示为构件内某点处取出的单元体，构件受力后单元体的位置如图 1-3 中双点画线所示，则称 du/dx 为________，dv/dy 为________，$(\alpha_1+\alpha_2)$ 为________。

（6）图 1-4 所示分别为构件内某点处取出的单元体，变形后情况如图 1-4 中双点画线所示，则单元体（a）的切应变 $\gamma=$________；单元体（b）的切应变 $\gamma=$________；单元体（c）的切应变 $\gamma=$________。

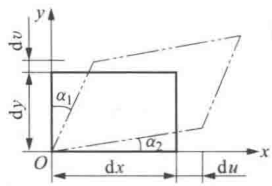

图 1-3

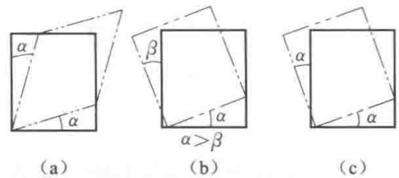

图 1-4

答案：（1）强度，刚度，稳定性；（2）强度，刚度；（3）拉伸，压缩，弯曲；（4）弯曲，弯曲，压缩和弯曲；（5）x 方向的线应变，y 方向的线应变，切应变；（6）2α，$\alpha-\beta$，0。

1-3　简答题

（1）试写出全应力 $\boldsymbol{p}$ 与正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和切应力 $\boldsymbol{\tau}$ 之间的关系，并证明之。

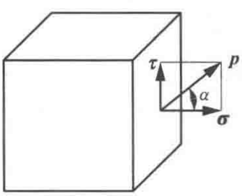

图 1-5

答：全应力 $\boldsymbol{p}$ 与正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和切应力 $\boldsymbol{\tau}$ 之间的关系为 $p^2=\sigma^2+\tau^2$。

证明：如图 1-5 所示，将全应力 $\boldsymbol{p}$ 分解为正应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和切应力 $\boldsymbol{\tau}$，有

$$\sigma = p\cos\alpha,\quad \tau = p\sin\alpha$$

则

$$\sigma^2 + \tau^2 = (p\cos\alpha)^2 + (p\sin\alpha)^2 = p^2$$

（2）求图 1-6（a）所示结构中横截面 1—1 和 2—2 的内力，并在分离体上画出内力的方向。

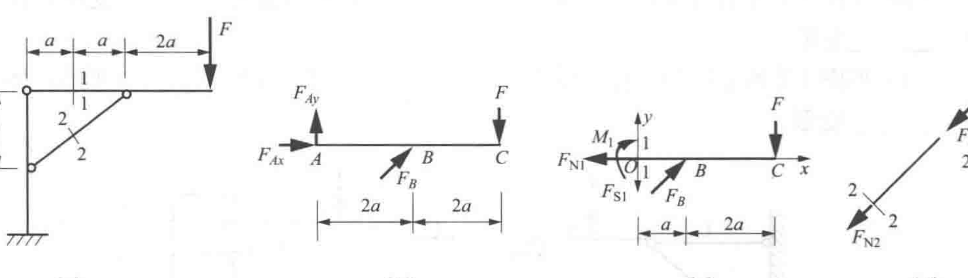

图 1-6

解：如图 1-6（b）所示，以横杆 AC 为研究对象，有

$$\Sigma M_A(F) = 0,\quad F_B \times \sqrt{2}a - F \times 4a = 0 \Rightarrow F_B = 2\sqrt{2}F$$

沿 1—1 截面截开 AC 杆，取 1—1 截面右侧部分为研究对象，受力分析如图 1-6

（c）所示，有

$$\begin{cases}\sum F_x = 0, & -F_{N1} + F_B\cos45^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0, & -F_{S1} + F_B\sin45^\circ - F = 0 \\ \sum M_O(F) = 0, & -M_1 + F_B\sin45^\circ \times a - F \times 3a = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{N1} = 2F \\ F_{S1} = F \\ M_1 = -Fa\end{cases}$$

沿 2—2 截面截开支撑杆，取 2—2 截面以上部分为研究对象，受力分析如图 1-6（d）所示，有

$$F_{N2} + F'_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{N2} = -F'_B = -F_B = -2\sqrt{2}F$$

（3）求图 1-7（a）所示折杆横截面 1—1 和 2—2 的内力，并在分离体上画出内力的方向。

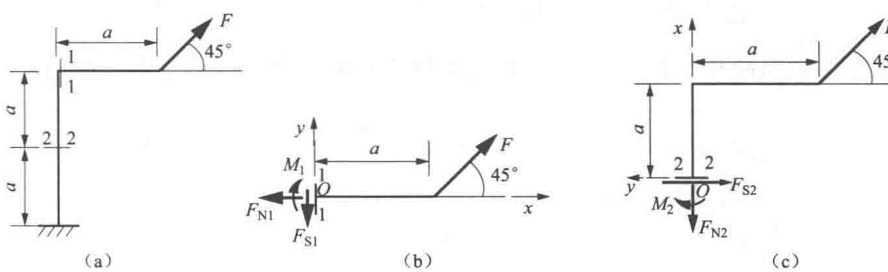

图 1-7

解：沿 1—1 截面截开，取 1—1 截面右侧部分为研究对象，受力分析如图 1-7（b）所示，有

$$\begin{cases}\sum F_x = 0, & -F_{N1} + F\cos45^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0, & -F_{S1} + F\sin45^\circ = 0 \\ \sum M_O(F) = 0, & -M_1 + F\sin45^\circ \times a = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{N1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ F_{S1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ M_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Fa\end{cases}$$

沿 2—2 截面截开，取 2—2 截面上侧部分为研究对象，受力分析如图 1-7（c）所示，有

$$\begin{cases}\sum F_x = 0, & -F_{N2} + F\sin45^\circ = 0 \\ \sum F_y = 0, & -F_{S2} - F\cos45^\circ = 0 \\ \sum M_O(F) = 0, & -M_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{N2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ F_{S2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ M_2 = 0\end{cases}$$

（4）求图 1-8（a）所示折杆横截面 1—1 和 2—2 的内力，并在分离体上画出内力的方向。

解：建立如图 1-8（a）所示坐标系。沿 1—1 截面截开，取 1—1 截面前半部分为研究对象，受力分析如图 1-8（b）所示，有

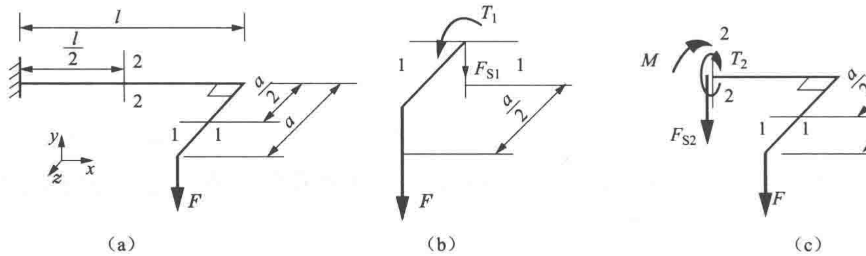

图 1-8

$$\begin{cases}\Sigma F_y = 0, & -F_{S1} - F = 0 \\ \Sigma M_O(F) = 0, & T_1 + F\times\dfrac{a}{2} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{S1} = -F \\ T_1 = -\dfrac{Fa}{2}\end{cases}$$

沿 2—2 截面截开，取 2—2 截面右侧部分为研究对象，受力分析如图 1-8（c）所示，有

$$\begin{cases}\Sigma F_y = 0, & -F_{S2} - F = 0 \\ \Sigma M_x(F) = 0, & -T_2 + Fa = 0 \\ \Sigma M_z(F) = 0, & -M - F\times\dfrac{l}{2} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{S2} = -F \\ T_2 = Fa \\ M = -\dfrac{Fl}{2}\end{cases}$$

（5）求图 1-9（a）所示结构中横截面 1—1 和 2—2 的内力，并在分离体上画出内力的方向。

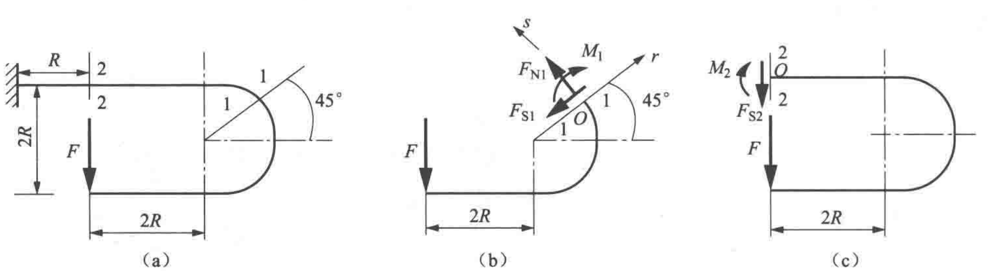

图 1-9

解：沿 1—1 截面截开，取 1—1 截面右下部分为研究对象，受力分析如图 1-9（b）所示，有

$$\begin{cases}\Sigma F_s = 0, & F_{N1} - F\cos45^\circ = 0 \\ \Sigma F_r = 0, & -F_{S1} - F\sin45^\circ = 0 \\ \Sigma M_O(F) = 0, & -M_1 + F(2R + R\cos45^\circ) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{N1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ F_{S1} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}F \\ M_1 = FR\left(2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

方向如图 1-9（b）所示。

沿 2—2 截面截开，取 2—2 截面右侧部分为研究对象，受力分析如图 1-9（c）所

示，有

$$\begin{cases}\Sigma F_y=0, & -F_{S2}-F=0\\ \Sigma M_O(F)=0, & M_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{S2}=-F\\ M_2=0\end{cases}$$

方向如图 1-9（c）所示。

习 题

1-1 图 1-10（a）所示直角折杆在 CD 段承受均布载荷 q，求 AB 段上内力偶矩为零的横截面 E 的位置。

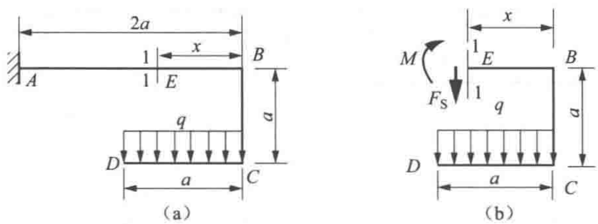

图 1-10

解：在 AB 段上距离 B 点 x 处的 E 点沿 1—1 截面截开，取 1—1 截面右侧部分为研究对象，受力分析如图 1-10（b）所示，则

$$\Sigma M_E(F)=0,\quad -M-qa\left(x-\frac{a}{2}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad M=qa\left(\frac{a}{2}-x\right)$$

要求 AB 段上内力偶矩为零的点，可令 $M=0$，解得 $x=a/2$，则

$$AE=2a-x=\frac{3a}{2}$$

1-2 求图 1-11（a）所示结构横截面 1—1 和 2—2 上的内力，并指出杆 AB 和 BC 的变形形式。

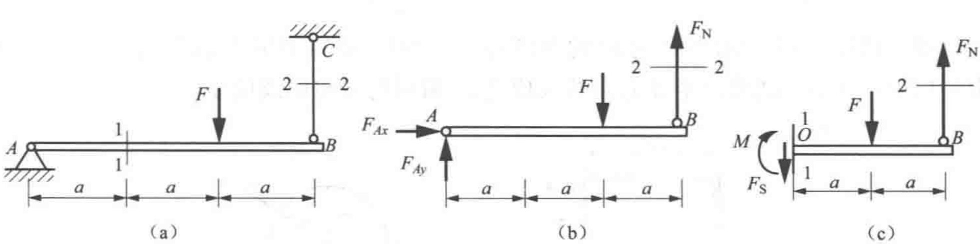

图 1-11

解：如图 1-11（a）所示，沿 2—2 截面截开，取 2—2 截面以下部分为研究对象，受力分析如图 1-11（b）所示，有

$$\Sigma M_A(F)=0,\quad F_N\times 3a-F\times 2a=0 \quad\Rightarrow\quad F_N=\frac{2}{3}F$$

杆 BC 的变形形式为拉伸。

再沿 1—1 截面截开，取 1—1 截面右侧 2—2 截面以下部分为研究对象，受力分析如图 1-11（c）所示，有

$$\begin{cases}\Sigma F_y = 0, & -F_S - F + F_N = 0 \\ \Sigma M_O(F) = 0, & -M - Fa + F_N \times 2a = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_S = -\dfrac{1}{3}F \\ M = \dfrac{1}{3}Fa\end{cases}$$

杆 AB 的变形形式为弯曲。

1-3 已知图 1-12（a）所示杆件斜截面 m—m 上点 K 处的应力 p=80MPa，试求该点处的正应力和切应力。

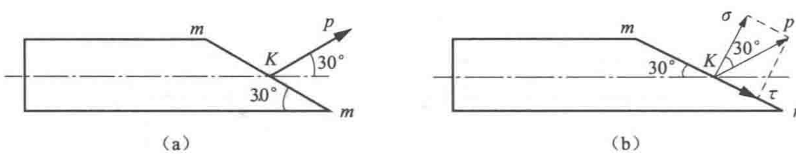

图 1-12

解：根据正应力和切应力的定义，正应力垂直于斜面，切应力平行于斜面，将全应力 $\boldsymbol{p}$ 分解如图 1-12（b）所示，得

$$\sigma = p\cos 30^\circ = 80 \times \cos 30^\circ = 69.3(\text{MPa})$$
$$\tau = p\sin 30^\circ = 80 \times \sin 30^\circ = 40(\text{MPa})$$

1-4 如图 1-13 所示矩形薄板 $ABCD$，变形后成为四边形 $A'BCD$，试求边 AB 的平均线应变及边 AB、AD 夹角的变化。

解：根据线应变的定义，边 AB 的平均线应变为

$$\varepsilon_{AB} = \frac{AA'}{AB} = \frac{0.01}{120} = 8.3 \times 10^{-5}$$

根据切应变的定义，边 AB、AD 夹角的变化就是 A 点的切应变，则

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \angle BA'D = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{160}{0.01} = 6.3 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

1-5 如图 1-14 所示半径为 R 的薄圆环，变形后 R 的增量为 ΔR。若 R=100mm，ΔR=1 ×10^{-3}mm。试求沿半径方向的线应变 ε_r 和圆周方向的线应变 ε_θ。

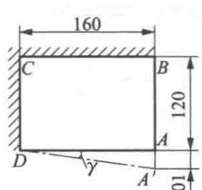

图 1-13

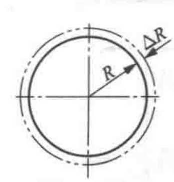

图 1-14

解：根据线应变的定义，沿半径方向的线应变为

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta R}{R} = \frac{1 \times 10^{-3}}{100} = 1 \times 10^{-5}$$

沿圆周方向的线应变为

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(R+\Delta R)-2\pi R}{2\pi R} = \frac{\Delta R}{R} = \varepsilon_r = 1\times 10^{-5}$$

1-6　拉伸试样上 A、B 两点的距离 l 称为标距，如图 1-15 所示。受拉力作用后，用变形仪量出两点距离的增量 $\Delta l=5\times10^{-2}$mm。若 l 的原长为 100mm，试求 A、B 两点间的平均应变 ε_m。

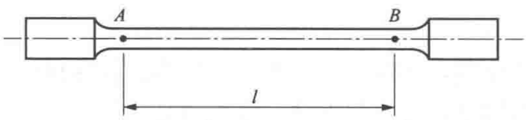

图 1-15

解：根据线应变定义，A、B 两点间的平均应变为

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta l}{l} = \frac{5\times10^{-2}}{100} = 5\times10^{-4}$$

第 2 章　构件的内力分析

思　考　题

2-1　判断题

(1) 根据力系等效原理，将杆上的集中力平移不会改变杆的内力分布。

(2) 在集中力偶作用处，剪力图连续，弯矩图有突变。

(3) 如果杆端铰支座处无集中力偶作用，则该铰支座处的弯矩必为零。

(4) 如果在两杆的连接铰处无横向载荷作用，则在该铰处的剪力和弯矩均为零。

(5) 最大弯矩或最小弯矩一定发生在集中力偶作用处。

(6) 如果简支梁的支座上作用有集中力偶，则当跨长改变时，梁的最大剪力发生改变，最大弯矩不变。

(7) 剪力图上斜直线部分可以确定有分布载荷作用。

(8) 如图 2-1 所示的两种情况，左半部的内力相同。

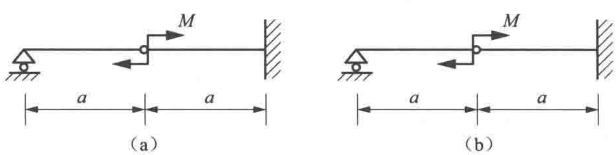

图 2-1

答案： (1) ×；(2) √；(3) √；(4) ×；(5) ×；(6) √；(7) √；(8) ×。

2-2　选择或填空题

(1) 用一个假想截面把杆件切开分为左右两部分，则左右两部分截面上内力大小相等，(　　)。

A. 方向相反，符号相反　　B. 方向相反，符号相同

C. 方向相同，符号相反　　D. 方向相同，符号相同

(2) 如图 2-2 (a)、图 2-2 (b) 所示矩形截面悬臂梁和简支梁，上下表面都作用轴向均布载荷 f，则任意截面上剪力都为零的是 (　　)。

A. 梁 a　　B. 梁 b　　C. 梁 a 和 b　　D. 无

提示：设梁的高度为 h，跨度为 l，图 2-2 (a)、图 2-2 (b) 两梁的受力分析如图 2-2 (c)、图 2-2 (d) 所示。由图 2-2 (c)、图 2-2 (d) 可以看出梁 a 横截面上无剪力，而梁 b 横截面上则有剪力，因此答案应该是 A。

(3) 如图 2-3 (a) 所示，梁 $ABCD$ 在 C 点作用铅垂力 F，若如图 2-3 (b) 所示，在 B 点焊接一刚架后再在 C 点正上方作用铅垂力 F，则两种情形 (　　)。

A. AB 梁段的剪力相同　　B. BC 梁段的剪力相同

C. CD 梁段的剪力相同　　D. AB 梁段的弯矩相同

E. BC 梁段的弯矩相同　　F. CD 梁段的弯矩相同

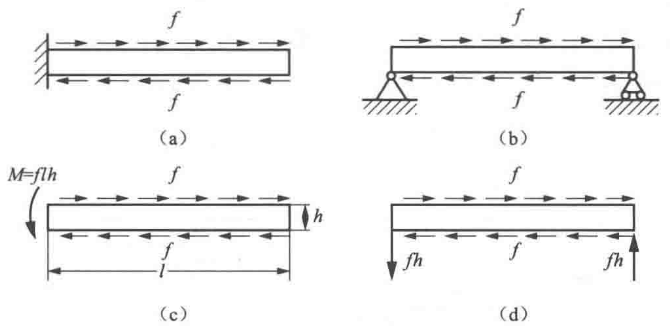

图 2-2

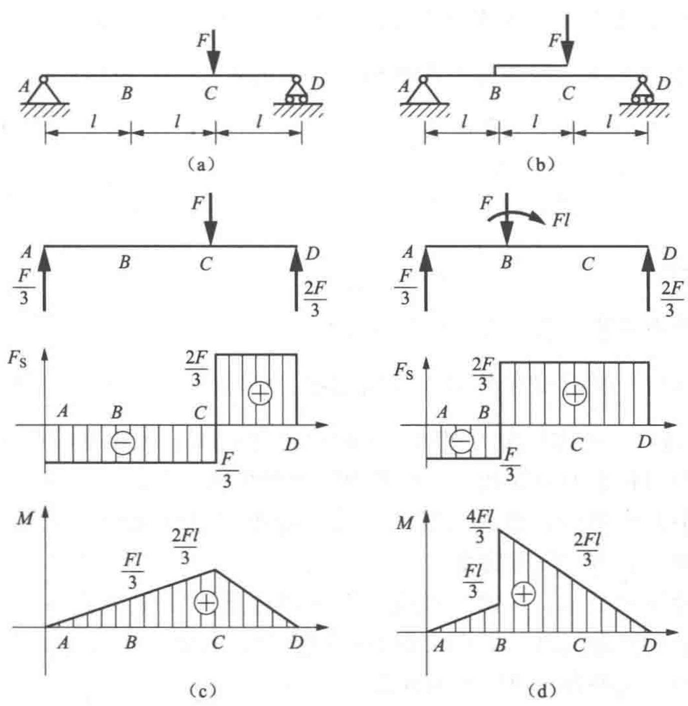

图 2-3

提示：对图 2-3（a)、图 2-3（b）所示两梁进行受力分析，作出剪力图和弯矩图，如图 2-3（c)、图 2-3（d）所示，然后比较两梁的内力图各段的内力情况，因此答案为 ACDF。

（4）如图 2-4 所示，当集中力偶 M 在简支梁 AB 上移动时（　　）。

A. 梁的剪力不变　　B. 梁的剪力变化，但最大剪力不变

C. 梁的弯矩不变　　　　　　　　　　D. 梁的弯矩变化，但最大弯矩不变

提示：当集中力偶 M 在简支梁 AB 上移动时，A、B 两端的约束反力的大小和方向均不会发生改变，梁的剪力不变，但由于集中力偶 M 的位置变化，所以弯矩发生突变的位置发生改变，最大弯矩也会改变。因此答案为 A。

（5）一左端自由、右端固定的悬臂梁上无集中力偶作用，其剪力图如图 2-5 所示，则梁上作用的最大集中载荷 F_{max}（绝对值）＝________，梁的最大弯矩 M_{max}（绝对值）＝________。

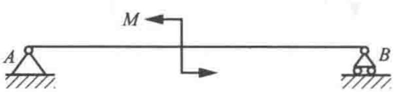

图 2-4

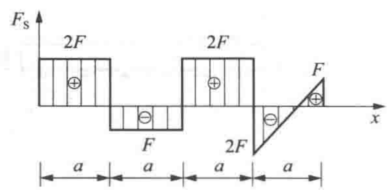

图 2-5

提示：梁上作用的最大集中载荷 F_{max} 应为剪力图上突变量的最大值，由于 $M=-\int F_S dx$，最大弯矩 M_{max} 应为剪力图面积代数和的最大值。所以，此梁的最大集中载荷 F_{max} 和最大弯矩 M_{max} 均发生在距坐标原点为 $3a$ 的截面处，$|F|_{max}=2F-(-2F)=4F$，$|M|_{max}=2Fa-Fa+2Fa=3Fa$。

答案：（1）B；（2）A；（3）ACDF；（4）A；（5）$4F$，$3Fa$。

2-3　简答题

（1）梁的弯矩峰值一般出现在什么位置？

答：弯矩峰值一般出现在剪力为零的截面。根据 $\frac{dM}{dx}=-F_S$，当剪力 F_S 为零时，弯矩 M 取得极值，不考虑集中力偶时，该截面的弯矩 M 一般出现峰值。

（2）在集中力和集中力偶处，梁的剪力图和弯矩图各有什么特点？

答：在集中力作用处，剪力图发生突变，弯矩图没有突变；在集中力偶作用处，弯矩图发生突变，剪力图没有突变。

（3）某梁分别承受 A、B 两组载荷，A 组载荷只比 B 组载荷多了一个集中力偶。有人认为，由于画剪力图时，集中力偶不影响剪力，因此，对应于这两组载荷的剪力图是完全一样的。这种看法对吗？为什么？

答：这种看法不对。因为 A 组载荷多了一个集中力偶时，对应的支座反力就与 B 组载荷时不同了。所以，两组载荷的剪力图不完全一样。

（4）某梁的弯矩图如图 2-6 所示。如果将支反力也视为一种外荷载，那么该梁承受了哪些载荷？这些载荷各作用于什么位置？

答：因为弯矩突变的截面一定有集中外力偶作用；剪力突变的截面一定有集中外力作用；弯矩为抛物线时，一定有分布载荷作用。所以，对于图 2-6 所示梁的弯矩图，在 B、D 截面有集中力偶作用，A 截面有集中力作用，在 BC 段有分布载荷作用。

(5) 如图 2-7 所示的简支梁上有一副梁。集中力 F 作用于副梁上。在求简支梁 A、B 处的支反力时，可以将力 F 沿其作用线平移至梁上 D 处吗？在求简支梁中的剪力和弯矩时，是否也可以将力 F 平移至 D 处？

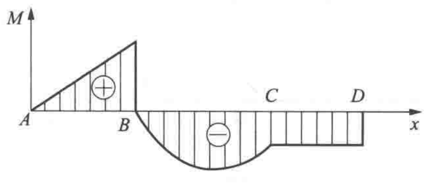

图 2-6

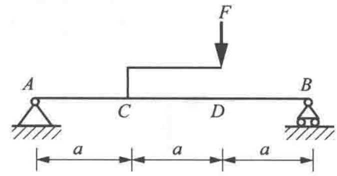

图 2-7

答：在求梁的支反力时可以将力 F 沿其作用线平移至梁上 D 处。但是，在求梁的剪力和弯矩时是不可以将力 F 平移至 D 处的。正确做法是，先将力 F 等效到 C 处，得到一个铅垂向下的集中力 F 和一个顺时针方向的集中力偶 Fa，然后求梁的内力。

习　　题

2-1　如图 2-8 (a) 所示铰接梁，B 为中间铰。求支座反力和中间铰两侧面上的内力。

解：以整体为研究对象，受力分析如图 2-8 (b) 所示，有

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0, & F_{Ax} = 0 \\ \Sigma F_y = 0, & F_{Ay} - F + F_C - F + F_D = 0 \\ \Sigma M_A(F) = 0, & -F \times 2a + F_C \times 4a - F \times 5a + F_D \times 6a = 0 \end{cases} \tag{1}$$

再以 AB 杆为研究对象，受力分析如图 2-8 (c) 所示，有

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0, & F_{Ax} - F_{Bx} = 0 \\ \Sigma F_y = 0, & F_{Ay} - F + F_{By} = 0 \\ \Sigma M_B(F) = 0, & F_{Ay} \times 3a - F \times a = 0 \end{cases} \tag{2}$$

联立 (1)、(2) 两式，可得

$$F_{Ax} = F_{Bx} = 0,\quad F_{Ay} = \frac{F}{3},\quad F_{By} = \frac{2}{3}F,\quad F_C = \frac{3}{2}F,\quad F_D = \frac{F}{6}$$

在中间铰两侧面上分别取 1—1 和 2—2 截面，如图 2-8 (d) 所示，沿截面 1—1 截开，取左段为研究对象，受力分析如图 2-8 (e) 所示，有

$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0, & F_A - F_B^- - F = 0 \\ \Sigma M_B(F) = 0, & -F_{Ay} \times 3a + F \times a + M_B^- = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_B^- = \dfrac{2F}{3} \\ M_B^- = 0 \end{cases}$$

同理，沿截面 2—2 截开，取右段为研究对象，受力分析如图 2-8 (f) 所示。有

$$\begin{cases} \Sigma F_y = 0, & F_B^+ + F_C - F + F_D = 0 \\ \Sigma M_B(F) = 0, & -M_B^+ + F_C \times a - F \times 2a + F_D \times 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_B^+ = \dfrac{2F}{3} \\ M_B^+ = 0 \end{cases}$$