

名校压轴题

熊斌 主编
八大名校联编

高一数学



八大名校

八大名校

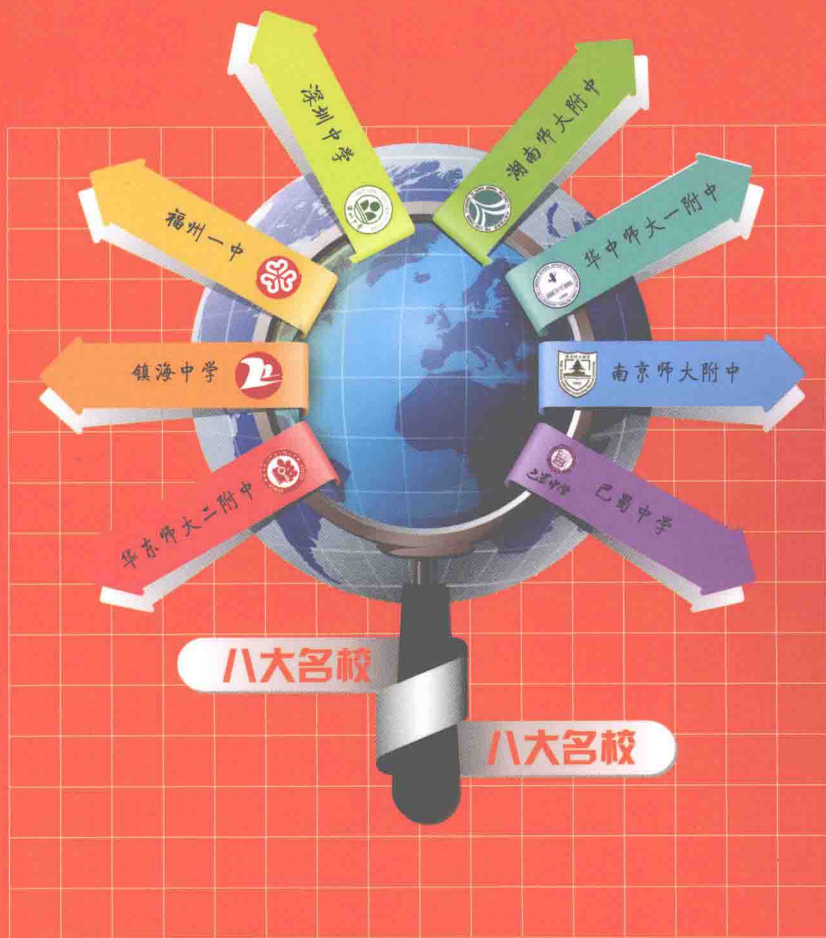


上海市
著名商标

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

本书所有压轴题来源于八大名校近年的期中、期末试题



刷名校压轴题，考名牌大学

名校压轴题 · 高一数学

名校压轴题 · 高一物理

名校压轴题 · 高一化学

名校压轴题 · 高二数学

名校压轴题 · 高二物理

名校压轴题 · 高二化学

这里有一群学霸



微信号: tiaozhanyazhoutu

ISBN 978-7-5675-3682-1



9 787567 536821 >

定价: 23.00元

www.ecnupress.com.cn

名校压轴题

高一数学

主 编 熊 斌
整理编写 兰松斌

 华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

名校压轴题. 高一数学/熊斌主编. —上海:华东师范大学出版社, 2015. 6

ISBN 978 - 7 - 5675 - 3682 - 1

I. ①名… II. ①熊… III. ①中学数学课—高中—习题集 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 134433 号

名校压轴题·高一数学

主 编 熊 斌
总 策 划 倪 明
项目编辑 徐 平
组稿编辑 徐 平
审读编辑 徐惟简
装帧设计 黄惠敏

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537 门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 昆山市亭林彩印厂有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 10.5
字 数 239 千字
版 次 2015 年 8 月第 1 版
印 次 2015 年 8 月第 1 次
印 数 23000
书 号 ISBN 978 - 7 - 5675 - 3682 - 1/G · 8383
定 价 23.00 元

出版人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

《名校压轴题》编委会

主编

熊 斌(华东师范大学)

编委(按音序排列)

陈德燕(福建福州一中)

洪燕芬(上海华东师大二附中)

蔡任湘(湖南师大附中)

沈虎跃(浙江镇海中学)

宋晓宇(重庆巴蜀中学)

姚 亮(广东深圳中学)

叶新年(湖北华中师大一附中)

袁青云(江苏南京师大附中)





当你拿到《名校压轴题》时,也许你会有名校指哪些、何为压轴题等疑问。

首先,关于名校,我们想说两点:其一,既然要做《名校压轴题》,当然要选最好的学校,所以上海的华东师大二附中、江苏的南京师大附中等这些响当当的校名在列其中。其二,为了让这套书适用于全国的小伙伴,我们在名校的地域选择上尽量做到了全覆盖。所以你们不仅可以看到华东地区的镇海中学,也会看到西南地区的巴蜀中学。

其次,何为压轴题?既然确定了8所名校,就让8所名校的资源共享吧。这套书以各校近5年的期中、期末等试卷真题为基础。由各个学科的资深教师对试卷中的压轴题进行了加工整理。这里的压轴题,是指每一张试卷中属于20%的疑难问题,题型涉及填空、选择、大题等。

至此,也许你对《名校压轴题》有了一个初步的认识,你也会深深明白,这套《名校压轴题》是多么的货真价实,名副其实!都说这是一个信息爆炸、资源泛滥的年代,但实际上,真正的名校资源、优质资源是非常稀缺的,也许你会用作业帮、学霸君,拍拍就搜题,可要找到与本书中完全一样的题并非易事。

目前,《名校压轴题》共涉及高一、高二年级,数学、物理、化学三个学科,共6册。为了让读者使用起来更方便,在编排上我们进行了精心的设置。压轴题作为比较难的习题,读者往往会有“听了就懂、看了才会、无从下手”的情况,在学习中把一些疑难问题真正内化为自己的解题能力,练习非常重要。所以本套丛书所有的压轴题按知识模块进行分类,并对相关压轴题的出题形式、出题角度、解题方法等进行总结,让读者做到心中有数。编排中,所有的习题都适当留空,供读者思考、练习使用。鉴于压轴题的难度,所以每一道题都配备了详细的解析过程,并对一些特别经典的习题进行了适当点拨。读者在使用过程中,要先读题,认真思考,尽量不要去翻看解析过程和答案。遇到实在解决不了的问题,解析过程与答案可以作为参考,但之后务必再去独立写一遍,只有不断地这样举一反三,把一道题做深做透,才能达到事半功倍的效果。

《名校压轴题》不仅仅是一套教辅学习读物,更是一种优质资源的凝聚,教辅图书千千万,优质资源并不多。我们利用自身的优质平台挖掘到独家的名校学习资源,就是为了服务于莘莘学子,希望切实提高你的学习效率。这也是我们编辑出版这套丛书的初衷,在鱼龙混杂的教辅市场中,我们一直坚持做精品图书,但究竟效果如何,还得通过读者的实践来检验。愿编者们的辛劳,能够转化为你的累累硕果。

华东师范大学出版社教辅分社



熊斌

华东师范大学数学系教授,博士生导师,国际数学奥林匹克研究中心主任,上海市核心数学与实践重点实验室主任。中国数学奥林匹克委员会委员,曾7次担任国际数学奥林匹克中国队领队、主教练,6次获得团体第一,为国争得了荣誉。多次参与中国数学奥林匹克、全国高中数学联赛、全国初中数学竞赛、西部数学奥林匹克、女子数学奥林匹克、国际城市青少年数学邀请赛等竞赛的命题工作。历届全国数学竞赛命题研讨会的组织者。著作等身,在国内外发表论文100余篇,在国内外出版著作超过100部。

从事数学教育、数学竞赛工作约有三十年头了。这么多年来,我曾到过全国各省市多所示范性高中,看见一些名校的硬件设施齐全、高端,软件也具有相当高的水准。也与许多名师进行了交流和广泛的学术探讨。在无数次的交往过程中深深感到,名校之所以成为其他学校学习的榜样,体现在其具有丰富的教学资源,不仅拥有一流的名师,而且在教育、教学、科研、管理等诸多方面都形成了自己鲜明的办学特色。名校名师为我国的基础教育作出的贡献不可低估。

我国幅员辽阔,各地区的经济发展不平衡,教育水平的差异也极大,不少经济欠发达地区的教育资源相当匮乏。为更好地分享名校的教育经验与成果,分享名师的教学实践,经过与部分名师的深入探讨与沟通,有意把一些教学实践的资料给大家分享。现在,经过名校名师的加工和整理,编辑出版了这套《名校压轴题》,奉献给广大读者。

至于《名校压轴题》是否适合教学水平相对一般的学校以及学生,还需要实践的经验。我期待着,来自各个方面的意见和建议。

最后,我要衷心感谢为本套书提供资料和具体编写的各位名师,没有他们的辛劳,我的想法是不可能实现的。



为了帮助高一学生在学习过程中和学完后更好地掌握高一数学的重要知识和难点知识,熟悉一些较难问题(同时也是很重要的问题)的解题方法,我们将八大名校:巴蜀中学、南师附中、福州一中、湖南师大附中、华中师大一附中、深圳中学、镇海中学、华东师大二附中的高一年级的期中、期末考试及部分月考中的压轴题精选成册,详细解答.在编写的过程中,我们发现它有几个特点:

1. 因为各个学校、地区的教学安排、教材选用不同,只综合提炼了函数、数列、向量与三角函数、立体几何、直线与圆等部分,基本覆盖不同地区高一数学的内容.

2. 难度适中,正好属于“跳一跳摘果子”的程度,对高一学生而言,题目既有一定的综合性,又不偏不怪,有利于在夯实基础的同时,发展数学思维.

3. 答案详细,我们尽最大努力让答案尽可能地详尽,以便于读者使用,但囿于时间和水平,很多解答可能并非最优结果.同时,我们鼓励读者原创思考,不被答案束缚,因为满分解答的书写过程未必就是真实的思维过程,多问几个为什么才是由假懂走向真懂的必经之路.



第一章 函数 / 1

- 一、函数的解析式、单调性与奇偶性 / 1
- 二、恒成立问题中的参数取值范围 / 8
- 三、函数最值与不等式 / 15
- 四、函数的图象与零点 / 23
- 五、函数概念与解析式 / 28
- 六、函数的应用问题 / 30

第二章 向量与三角函数 / 36

- 一、函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质 / 36
- 二、向量与三角变换 / 40
- 三、三角函数的应用 / 53

第三章 数列 / 56

- 一、数列的通项及求和 / 56
- 二、数列的综合问题 / 62

第四章 立体几何 / 74

- 一、空间中的平行与垂直关系 / 74
- 二、空间中的角与距离的计算 / 77

第五章 直线与圆 / 82

参考答案 / 88

第一章 函数

一、函数的解析式、单调性与奇偶性

命题规律

通常是用函数方程形式给出函数的性质,要求求出某个函数值,证明函数单调性和奇偶性.

解题方法:通常利用赋值的方法来根据已有的等式,求出某个特殊函数值,再通过给函数方程中变量赋值以及利用函数单调性、奇偶性定义,证明函数的单调性和奇偶性.

1.1.1 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ (a, b 为实数), $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0, \\ -f(x), & x < 0, \end{cases}$

(1) 若 $f(-1) = 0$, 且函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$, 求 $F(x)$ 的表达式;

(2) 在(1)的条件下, 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $g(x) = f(x) - kx$ 是单调函数, 求实数 k 的取值范围;

(3) 设 $mn < 0$, $m+n > 0$, $a > 0$ 且 $f(x)$ 为偶函数, 判断 $F(m) + F(n)$ 能否大于零.

1.1.2 定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足: (1) $f(x)$ 不恒为零; (2) 对任何实数 x, q 都有 $f(x^q) = qf(x)$.

(1) 求 $f(1)$ 的值;

(2) 若 $f(3) < 0$, 判断 $f(x)$ 的单调性并证明;

(3) 若 $f(x)$ 单调递增, 当 $m > n > 0$ 时, 有 $|f(m)| = |f(n)| = 2 \left| f\left(\frac{m+n}{2}\right) \right|$. 求实数 m 的取值范围.

1.1.3 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 对任意的实数 m, n , 总有 $f(m+n)=f(m) \cdot f(n)$, 且当 $x>0$ 时, $0<f(x)<1$.

(1) 求 $f(0)$ 的值;

(2) 判断 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的单调性并证明你的结论;

(3) 若 $f(1)=2$, 当 $|m| \leq 2$ 时, $f(mx^2 - 2x - m + 3) \geq 4$ 恒成立, 求 x 的取值范围.

1.1.4 设函数 $f(x)=k \times 2^x - 2^{-x}$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数.

(1) 求 k 的值, 并判断 $f(x)$ 的单调性;

(2) 解不等式 $f[f(x)] > 0$;

(3) 设 $g(x) = 4^x + 4^{-x} - 2mf(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上的最小值为 -2 , 求实数 m 的值.

1.1.5 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + 2}$ 是奇函数.

(1) 求实数 b 的值;

(2) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

1.1.6 已知函数 $f(x)$ 定义在 $(-1, 1)$ 上, 对于任意的 $x, y \in (-1, 1)$, 有 $f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) > 0$.

(1) 验证函数 $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ 是否满足这些条件;

(2) 判断这样的函数是否具有奇偶性和单调性, 并加以证明;

(3) 若 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, 求函数 $y = f(x) + \frac{1}{2}$ 的零点.

1.1.7 已知定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$, 且当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$.

- (1) 求 $f(1)$ 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 的单调性并予以证明;
- (3) 若 $f(3) = -1$, 解不等式 $f(\log_2 x) > -2$.

1.1.8 已知 $f(x) = \log_a \frac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数 (其中 $a > 0, a \neq 1$),

- (1) 求 m 的值;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性并加以证明;
- (3) 当 $f(x)$ 的定义域为 $(1, a-2)$ 时, $f(x)$ 的值域为 $(1, +\infty)$, 求 a 的值.

1.1.9 设 $f(x) = \frac{a^x + 1}{1 - a^x}$ ($a > 0, a \neq 1$).

- (1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$;
- (2) 判断并证明 $f^{-1}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性;
- (3) 令 $g(x) = 1 + \log_a x$, 当 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$ ($m < n$) 时, $f^{-1}(x)$ 在 $[m, n]$ 上的值域是 $[g(n), g(m)]$, 求 a 的取值范围.

1.1.10 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称, 且 $f(x) = x^2 + 2x$.

- (1) 求函数 $g(x)$ 的解析式;
- (2) 若 $h(x) = g(x) - \lambda f(x) + 1$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是增函数, 求实数 λ 的取值范围.

1.1.11 已知函数 $f(x) = \log_2(x^2 + x + 1) - \log_2(x^2 - x + 1)$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值和最小值.

1.1.12 已知定义域为 \mathbf{R} 的函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + a} - \frac{1}{2}$ 是奇函数.

(1) 求实数 a 的值, 并判断 $f(x)$ 的增减性(不需证明);

(2) 若对任意的 $x > 0$, 不等式 $f(mx^2 - x) + f(1 - x) < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

1.1.13 已知集合 $C = \{f(x) \mid f(x) \text{ 是定义域上的单调增函数或单调减函数}\}$, 集合 $D = \{f(x) \mid f(x) \text{ 在定义域内存在区间 } [a, b], \text{ 使得 } f(x) \text{ 在区间 } [a, b] \text{ 上的值域为 } [ka, kb], k \text{ 为常数的}\}$.

- (1) 当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 判断函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 是否属于集合 $C \cap D$? 并说明理由. 若是, 则求出区间 $[a, b]$;
- (2) 当 $k = \frac{1}{3}$ 时, 若函数 $f(x) = \sqrt{x} + t \in C \cap D$, 求实数 t 的取值范围.

二、恒成立问题中的参数取值范围

命题规律

给出含有参数 a 的不等式, 要求 $x \in D$ 时, $f(x, a) < 0$ (或 $f(x, a) > 0$) 恒成立, 或是 $f(x) < g(x, a)$ (或 $f(x) > g(x, a)$) 恒成立.

解决办法: 通常是常变数分离法. 如变形为 $a < h(x), x \in D$ (或 $a > h(x), x \in D$), 再利用 $a < h(x)_{\min}, x \in D$ (或 $a > h(x)_{\max}, x \in D$), 也可由函数性质, 由 $f(x, a) > 0$ 直接根据 $f(x, a)_{\min} > 0, x \in D$ (或 $f(x, a) < 0$ 用 $f(x, a)_{\max} < 0, x \in D$) 来处理.

1.2.1 已知函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1 (m \neq 0, m \in \mathbf{R})$.

- (1) 若对一切实数 $x, f(x) < 0$ 恒成立, 求 m 的取值范围;
- (2) 对于 $x \in [1, 3], f(x) > -m + x - 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

1.2.2 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- (1) 若 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $\{x \mid -3 \leq x \leq -2\}$, 求不等式 $cx^2 + bx + a \geq 0$ 的解集;
- (2) 当 $b = 2, c = 0$ 时, 若 $|f(x)| \leq 1$ 在 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.