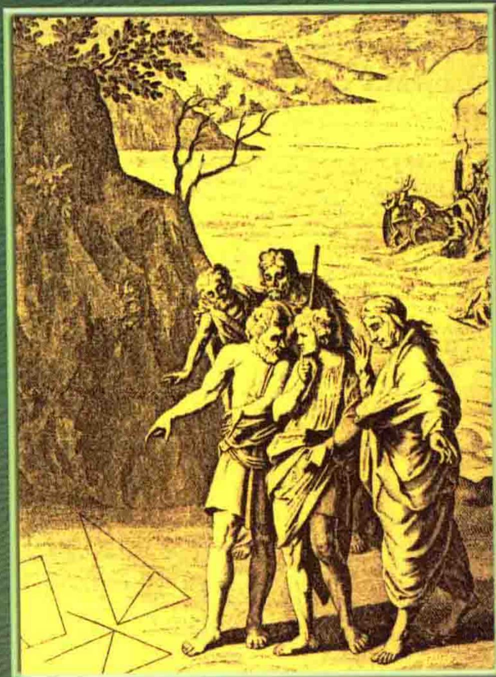
毕克定理

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）



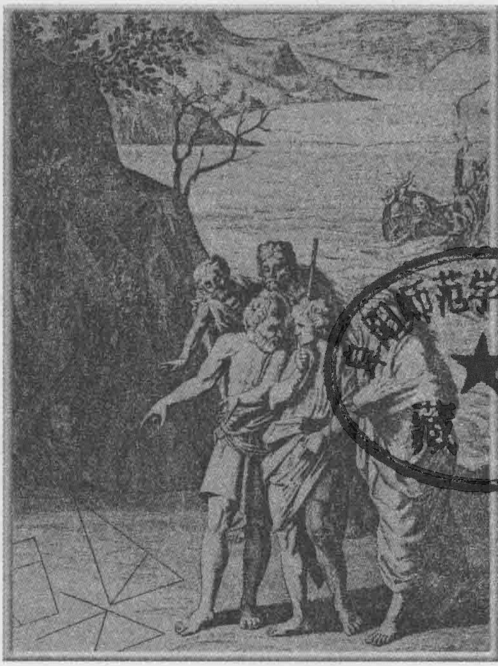
佩捷 主编

- 毕克定理
- 毕克定理和黄金比的无理性
- 格点多边形的面积公式
- 空间格点三角形的面积
- 从施瓦兹到毕克到阿尔弗斯及其他

哈爾濱工業大學出
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

毕克定理

《数学中的小问题大定理》丛书（第五辑）



佩捷 主编

◎毕克定理

◎毕克定理和黄金比的无理性

◎格点多边形的面积公式

◎空间格点三角形的面积

◎从施瓦兹到毕克到阿尔弗斯及其他

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道国际数学奥林匹克候选题谈起，引出毕克定理．全书介绍了毕克定理、毕克定理和黄金比的无理性、格点多边形和数 $2i+7$ 三章以及闵嗣鹤论、空间格点三角形的面积、从施瓦兹到毕克到阿尔弗斯及其他、美国中学课本中的有关平面格点的内容四个附录．阅读本书可全面地了解毕克定理以及毕克定理在数学中的应用．

本书适合高中生、大学生以及数学爱好者阅读和收藏．

图书在版编目(CIP)数据

毕克定理／佩捷主编．-- 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.7

ISBN 978－7－5603－4805－6

Ⅰ．①毕…　Ⅱ．①佩…　Ⅲ．①面积定理－普及读物　Ⅳ．①O437－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 139629 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　关虹玲
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 8.5　字数 84 千字
版　　次　2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－4805－6
定　　价　18.00 元

目录

第1章 毕克(Pick)定理

我们先来看一道试题：

☞ 设$\triangle ABC$的顶点坐标都是整数，且在$\triangle ABC$的内部只有一个整点(在边上允许有整点). 求证：$\triangle ABC$的面积小于等于$\frac{9}{2}$.

(第31届国际数学奥林匹克候选题，1990年)

证 设O为$\triangle ABC$内的整点，边BC，CA，AB的中点分别为A_1，B_1，C_1.

显然，O或在$\triangle A_1B_1C_1$的内部或在$\triangle A_1B_1C_1$的边界上.

否则，由于A，B，C关于点O的对称点均为整点，那么在$\triangle ABC$内就不止一个整点.

如图1，设A_2是点A关于O的对称点，D是平行四边形$ABDC$的第四个顶点，则A_2为$\triangle BCD$的内点或在它的边界上.

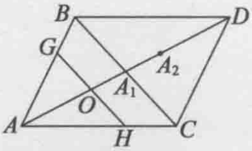


图 1

(1)若 A_2 为$\triangle BCD$ 的内点.

因为 A_2 是整点,所以 A_2 就是 O 关于平行四边形 $ABDC$ 中心 A_1 的对称点——平行四边形 $ABDC$ 内唯一的整点,A,O,A_2 和 D 是线段 AD 上相继的整点,所以

$$AD=3AO$$

由于 A,B,C 地位相同,所以 O 是$\triangle ABC$ 的重心,过 O 作线段 $GH/\!/BC$,若 BC 内部的整点多于两个,则 GH 内部必含有一个不同于 O 的整点(这是因为 BC 上每两个整点的距离小于等于$\frac{1}{4}BC$,而 $OG=OH=\frac{1}{3}BC$),出现矛盾. 因此,BC 的内部至多只有两个整点,AB 与 AC 有同样的结论.

总之,在$\triangle ABC$ 的边界上的整点数小于等于 9,则由有关整点与面积的定理有:$\triangle ABC$ 的面积小于等于 $1+\frac{9}{2}-1=\frac{9}{2}$.

(2)若 A_2 在$\triangle BCD$ 的边界上.

与(1)类似,可以推出边 BC 内部的整点数不超过 3(仅当 O 在 B_1C_1 上时,出现 3 个整点). AB 与 AC 内部的整点数均不能多于 1(图 2).

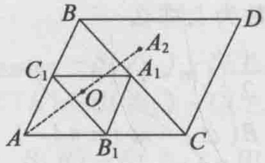


图2

总之,在$\triangle ABC$的边界上的整点数小于等于8,因此,$\triangle ABC$的面积小于等于$1+\frac{8}{2}-1=4$.

由(1),(2)命题得证.

在本题的解答中用到了一个中学不常见的定理——毕克定理.

毕克定理1　如图3,设A,B,C都是格点,用$S(\triangle)$表示$\triangle ABC$的面积,$B(\triangle)$表示$\triangle ABC$三边上格点数(包括端点),$C(\triangle)$表示$\triangle ABC$内部的格点数,则

$$S(\triangle)=C(\triangle)+\frac{1}{2}B(\triangle)-1$$

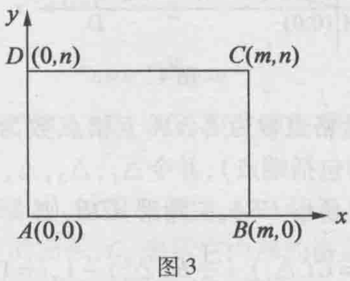


图3

证　先考虑两直角边分别平行于坐标轴的直角三角形. 不妨设顶点坐标为$A(0,0)$,$B(m,0)$,$C(m,n)$,取点$D(0,n)$,则四边形$ABCD$为矩形. 显然,矩形$ABCD$内部的格点数为$(m-1)(n-1)$. 假定$\triangle ABC$斜

边 AC 上的格点数为 l，那么

$$C(\triangle)=\frac{1}{2}\{(m-1)(n-1)-(l-2)\}$$

$$B(\triangle)=m+n+l-1$$

因此

$$C(\triangle)+\frac{1}{2}B(\triangle)-1=\frac{1}{2}mn=S(\triangle)$$

即对直角三角形命题成立.

再设$\triangle ABC$ 为任意格点三角形，不妨设顶点坐标为 $A(0,0)$，$B(m_1,n_1)$，$C(m_2,n_2)$. 如图 4 所示，$\triangle ABC$ 内接于格点矩形 $ADEF$，显然，$\triangle ABC$ 的面积等于矩形 $ADEF$ 的面积减去三个直角三角形面积之和.

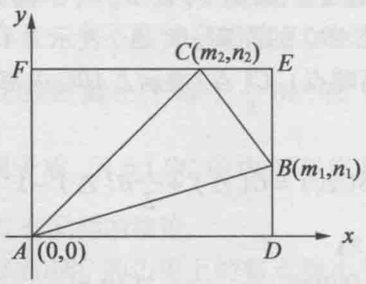


图 4

设 BC 上格点数为 l_1，CA 上格点数为 l_2，AB 上格点数为 l_3(均包括端点)，并令 $\triangle_1$，$\triangle_2$，$\triangle_3$ 分别表示三角形 BEC，三角形 CFA，三角形 ADB，则

$$S(\triangle_i)=C(\triangle_i)+\frac{1}{2}B(\triangle_i)-1,i=1,2,3$$

我们用 $C(R)$，$B(R)$ 分别表示矩形 $ADEF$ 内的格点数与边界上的格点数，显然

$$S_{矩形ADEF}=C(R)+\frac{1}{2}B(R)-1$$

故

$$\begin{aligned}S(\triangle) &= S_{\text{矩形}ADEF} - S(\triangle_1) - S(\triangle_2) - S(\triangle_3)\\ &= \{C(R) - C(\triangle_1) - C(\triangle_2) - C(\triangle_3)\} + \\ &\quad \frac{1}{2}\{B(R) - B(\triangle_1) - B(\triangle_2) - \\ &\quad B(\triangle_3)\} + 2\\ &= \{C(\triangle) + B(\triangle) - 3\} + \frac{1}{2}\{-B(\triangle)\} + 2\\ &= C(\triangle) + \frac{1}{2}B(\triangle) - 1\end{aligned}$$

于是命题得证.

例1　如果格点$\triangle ABC$内恰有一个整点D,那么D一定是$\triangle ABC$的重心.

(1955年匈牙利数学奥林匹克试题)

证　由毕克定理1知

$$S_{\triangle ABC} = 1 + \frac{1}{2} \times 3 - 1 = \frac{3}{2}$$

$$S_{\triangle ABD} = 0 + \frac{1}{2} \times 3 - 1 = \frac{1}{2}$$

同理
$$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle CAD} = \frac{1}{2}$$

即DA,DB,DC将$\triangle ABC$的面积三等分,因此D一定是重心.

毕克定理2　如图5,设$A_1A_2\cdots A_n$是格点多边形.用S_n表示它的面积,C_n表示它内部的格点数,B_n表示它边界上的格点数(包括端点),那么

$$S_n = C_n + \frac{1}{2}B_n - 1$$

证　用数学归纳法.当$n=3$时,由毕克定理1知命题成立.设$n=k-1$时命题成立.当$n=k$时,由于多

边形中至少有一个内角,不妨设为$\angle A_k$,小于 π,我们联结A_1A_{k-1},因此得

$$\begin{aligned}S_k &= S_{k-1}+S(\triangle)\\ &=\{C_{k-1}+C(\triangle)\}+\\ &\quad \frac{1}{2}\{B_{k-1}+B(\triangle)\}-2\end{aligned}$$

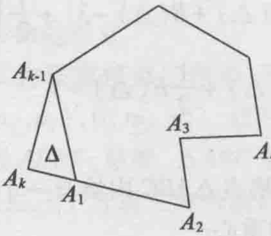


图5

设A_1A_{k-1}上的格点数为l,则

$$\begin{aligned}S_k &= (C_k-l+2)+\frac{1}{2}(B_k+2l-2)-2\\ &= C_k+\frac{1}{2}B_k-1\end{aligned}$$

即$n=k$时命题也成立.

利用毕克定理2我们还可以解决另一个涉及多边形的问题,为了体现使用毕克定理2的优越性,我们先用普通方法证明.

例2 如果某个平行四边形的顶点是整点,在平行四边形的内部或它的边上还有另外的整点,那么,这个平行四边形的面积大于1.

(1941年匈牙利数学奥林匹克题2)

证 假设三角形的顶点是整点$P_i(x_i,y_i)$,$i=1$,2,3.如果它不是退化的,那么它的面积满足不等式

$$S=\frac{1}{2}|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|\geqslant\frac{1}{2}$$

如果在整点平行四边形内部或边上，除了顶点以外，至少还有一个整点，那么，将这个整点和平行四边形的所有顶点联结起来，则把整点平行四边形至少分成三个非退化的整点三角形. 因为它们之中的每一个面积都不小于$\frac{1}{2}$，所以平行四边形的面积不小于$\frac{3}{2}$.

下面我们用毕克定理2来证明：易见$C_4\geqslant1$，$B_4=4$，代入公式

$$\begin{aligned}S_4&=C_4+\frac{1}{2}B_4-1\\&\geqslant1+2-1\geqslant2\end{aligned}$$

两个解答放在一起，高低立见.

例3　设平行四边形$ABCD$的顶点都是整点，并且内部及边上没有其他的整点. 证明：这个平行四边形的面积为1.

证　不妨设A为原点，否则如图6所示，将平行四边形$ABCD$沿OA平移，成为平行四边形$OB'C'D'$（A与O重合）. 对平行四边形$OB'C'D'$中任一不是顶点的点$E'(x',y')$，设它由$E(x,y)$平移而来，则

$$x'=x-x_A,y'=y-y_A\tag{1}$$

由于E在平行四边形$ABCD$中不是顶点，x,y不全为整数，所以由式(1)知，x',y'也不全是整数，即E'不是整点，平行四边形$OB'C'D'$中只有顶点是整点.

不妨设平行四边形$ABCD$的顶点B,D的坐标分别为(a,c)，(b,d). 在直线AB上取点$B_k(ka,kc)$，在直线AD上取点$D_k(kb,kd)$（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$），其中$B_1=B$，$D_1=D$，$B_0=D_0=0$. 这些点都是整点，过这些点

作 AB 或 AD 的平行线,形成平行四边形网格(图 7),每个小平行四边形均与平行四边形 $ABCD$ 全等.

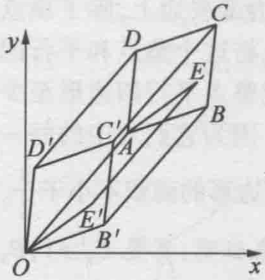


图 6

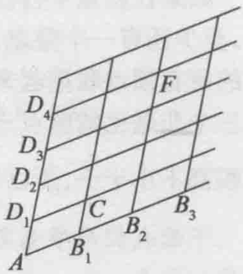


图 7

由于 $O,B_i,D_j(i,j\in\mathbf{Z})$ 都是整点,所以上述平行四边形的顶点都是整点. 这些平行四边形都可以平移成平行四边形 $OB'C'D'$. 与开头所说类似(图 6),这些平行四边形中没有其他整点.

于是每个整点 $F(m,n)$ 都是上述平行四边形网格的格点,因而对每一对整数 m,n,方程组

$$\begin{cases}ax+by=m\\cx+dy=n\end{cases}$$

有整数解 x,y(F 与 A,B_x,D_y 构成平行四边形).

由上一题知,$ad-bc=\pm1$,即平行四边形 $ABCD$ 的面积为 1.

注 在三维空间中,顶点都是整点,并且内部及边上没有其他整点的平行四边形或三角形,它的面积可取哪些值? 这是一个颇有意思的问题(见附录).

毕克定理和黄金比的无理性①

第 2 章

1874 年,康托(Cantor)在发表其著名的对角化论证的前两年,他的关于实数集的不可数性的第一个证明出现在出版物[1]中. 意想不到,正如我们要在这里证明的,康托推理的一点小变动证明了黄金比是无理的. 我们将利用另一个定理,即毕克在 19 世纪所得到的另一个经典的定理. 毕克定理提供了包含在平面中具有格点顶点的单连通多边形区域中的格点数目的

① 译自:The Amer. Math. Monthly, Vol. 117 (2010), No. 7, P. 633-637, On Cantor's First Uncountability Proof, Pick's Theorem, and the Irrationality of the Golden Ratio, Mike Krebs and Thomas Wright, figure number 3. 美国数学协会授予译文出版许可.

一个简单的公式.

我们以概要重述康托在1874年所做的证明作为开始. 为了证明实数集是不可数的,我们必须证明:对于任给的相异实数的一个可数序列,存在另一个不在此序列中的实数. 与对角化论证类似,我们的证明将这样做,通过提供一个产生这样一个数的明确算法;与对角化论证不同的是,我们的证明将不利用十进制展开,而利用实数的有序性质.

令$\{a_n\}$是相异实数的一个可数序列. 假设存在两个不同的项a_j和a_k,使得没有项a_l严格地位于a_j和a_k之间. 换言之,假设$\{a_n\}$不具有中间值性质. 令L是严格位于a_j和a_k之间的任一实数,例如$(a_j+a_k)/2$,则L不在序列$\{a_n\}$中.

现在假设$\{a_n\}$有中间值性质. 康托如下递归地构造了两个序列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$. 令$b_1=a_1$,并令$c_1=a_2$. 令b_{k+1}是$\{a_n\}$中严格位于b_k和c_k之间的第一项. 令c_{k+1}是$\{a_n\}$中严格位于b_{k+1}和c_k之间的第一项.

我们只考虑$a_1>a_2$的情形,$a_1<a_2$情形中的证明是类似的. 由于$a_1>a_2$,我们得到$\{b_n\}$是一个严格减的序列,而$\{c_n\}$是一个严格增的序列,并且每个c_n小于每个b_n. 再者,如果$b_n=a_k$,$b_{n+1}=a_l$,那么$k<l$,对于序列$\{c_n\}$类似的陈述成立. 换言之,在我们继续不断地选取诸b和诸c时,我们在序列$\{a_n\}$中越来越深入. 令L是$\{c_n\}$的最小上界. 我们注意到,对于所有的k,l,有$c_k<L<b_l$.

我们断言,L不在序列$\{a_n\}$中. 假设不然,那么对于某个l,有$L=a_l$. 选取m,使得$b_m=a_k$,$c_m=a_r$,并且$k,r>l$. 因为诸b和诸c来自于序列$\{a_n\}$的越来越深

处,所以这样的选取总是可能的. 由 b 序列和 c 序列的构造知,对于每个 $i \leqslant \max\{k,r\}$,我们有 $a_i \leqslant c_m$ 或 $a_i \geqslant b_m$. 然而由上述知,有 $c_m < L < b_m$. 这样,我们就得到了一个矛盾①,并因此得到了一个构思相当精巧的证明结论.

现在我们对一个很特殊的序列而不是一个任意序列 $\{a_n\}$ 来实施康托的论证. 即,令 $\{a_n\}$ 是大于 0 且小于或等于 1 的有理数集合的标准枚举. 也就是说,序列 $\{a_n\}$ 是把所有这些有理数写成既约分数,然后以分母增序排列,具有相同分母的分数以分子增序排列. $\{a_n\}$ 的前若干项是 1/1,1/2,1/3,2/3,1/4,3/4,1/5,2/5,3/5,4/5,1/6,5/6,…

如上所述取序列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$. 直接计算可知 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的前若干项为

$$
\begin{array}{ll}
b_1 = \dfrac{1}{1} & c_1 = \dfrac{1}{2} \\[2ex]
b_2 = \dfrac{2}{3} & c_2 = \dfrac{3}{5} \\[2ex]
b_3 = \dfrac{5}{8} & c_3 = \dfrac{8}{13} \\[2ex]
b_4 = \dfrac{13}{21} & c_4 = \dfrac{21}{34} \\[2ex]
b_5 = \dfrac{34}{55} & c_5 = \dfrac{55}{89} \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

---

① 事实上,对于 $a_1 > a_2$ 的情形,必有 $k < r$,因而 $\max\{k,r\} = r$. 而当 $i \leqslant r$ 时,有 $a_i \leqslant c_m$. 因而由 $c_m < L$ 得 $a_i < L$. 特别地,$a_l < L$ 与 $L = a_l$ 矛盾. ——译注

一个令人惊奇的模式不请自来——突然地和没有先兆地,我们的老朋友斐波那契(Fibonacci)序列顺便来访问了!下一个引理将证明,这个模式对所有的 n 都成立.

回忆一下,斐波那契序列 $\{F_n\}$ 由 $F_1 = F_2 = 1$ 和 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ 定义.

引理 1 对于所有的 n,我们有 $b_n = F_{2n-1}/F_{2n}$ 和 $c_n = F_{2n}/F_{2n+1}$.

证 我们用关于 n 的归纳法来证明. 基本情形 $b_1 = F_1/F_2$ 和 $c_1 = F_2/F_3$ 是直接成立的. 现在我们假设 $b_k = F_{2k-1}/F_{2k}$ 和 $c_k = F_{2k}/F_{2k+1}$. 我们将证明 $b_{k+1} = F_{2k+1}/F_{2k+2}$, $c_{k+1} = F_{2k+2}/F_{2k+3}$ 的证明是类似的. 关于 F_{2k+1}/F_{2k+2} 我们必须证明两个事实,即,它严格地位于 b_k 和 c_k 之间,以及它是序列 $\{a_n\}$ 中第一个这样的项.

$c_k < F_{2k+1}/F_{2k+2} < b_k$ 这一事实有一个不用言辞的优美证明. 考虑图 1. 令 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中起点分别在 (F_{2k}, F_{2k-1}) 和 (F_{2k+1}, F_{2k}) 的向量. 正如我们从图 1 中容易看出的那样,$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ 的斜率严格地位于 $\boldsymbol{v}_1$ 的斜率和 $\boldsymbol{v}_2$ 的斜率之间. 但是 $\boldsymbol{v}_1$ 的斜率是 b_k, $\boldsymbol{v}_2$ 的斜率是 c_k,并且 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ 的斜率是 $(F_{2k-1} + F_{2k})/(F_{2k} + F_{2k+1}) = F_{2k+1}/F_{2k+2}$.

我们现在来证明 F_{2k+1}/F_{2k+2} 是序列 $\{a_n\}$ 中位于 b_k 和 c_k 之间的第一项. 我们再次把这些比值看作平面中一些向量的斜率,如图 2 所示.

令

$$T = \left\{ (x, y) \;\middle|\; F_{2k+1} \leqslant x \leqslant F_{2k+2}, \text{并且} \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} < \frac{y}{x} < \frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} \right\}$$

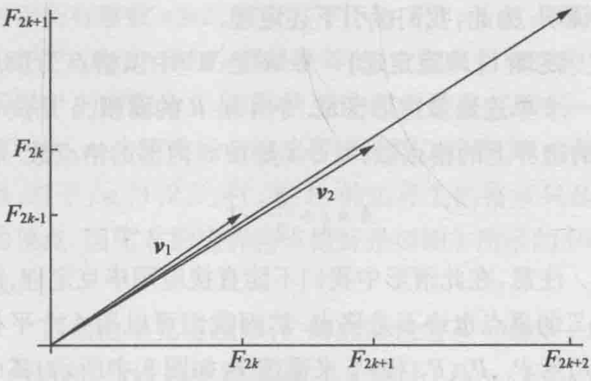


图 1　相继斐波那契数之比

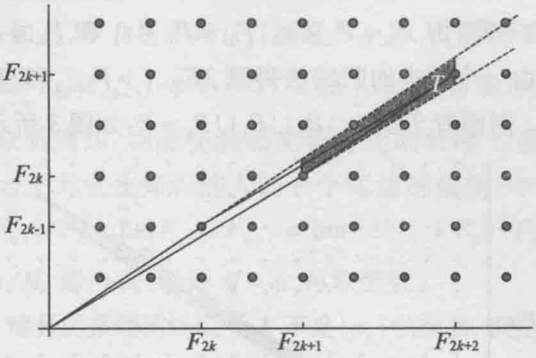


图 2　区域 T

阴影区域 T 的边界是一个梯形. 在(位于 T 中的)两条铅垂线段上的点表示分母为 F_{2k+1} 和 F_{2k+2} 的分数. 在(位于 T 的外部的)两条虚线上的点表示比值 F_{2k-1}/F_{2k} 和 F_{2k}/F_{2k+1}. 图 2 中的格点表示有理数. 我们断言, T 中除了 (F_{2k+2}, F_{2k+1}) 以外没有别的格点. 序列 $\{a_n\}$ 中在数值上位于 c_k 和 b_k 之间的、但在此序列中位于 b_k 和 c_k 之后的、F_{2k+1}/F_{2k+2} 之前的项恰由这样一个格点所表示,因而证明这个断言将足以完成引理 1