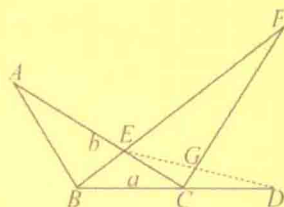
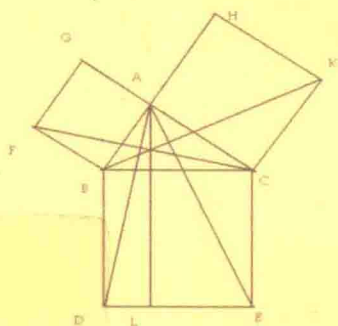
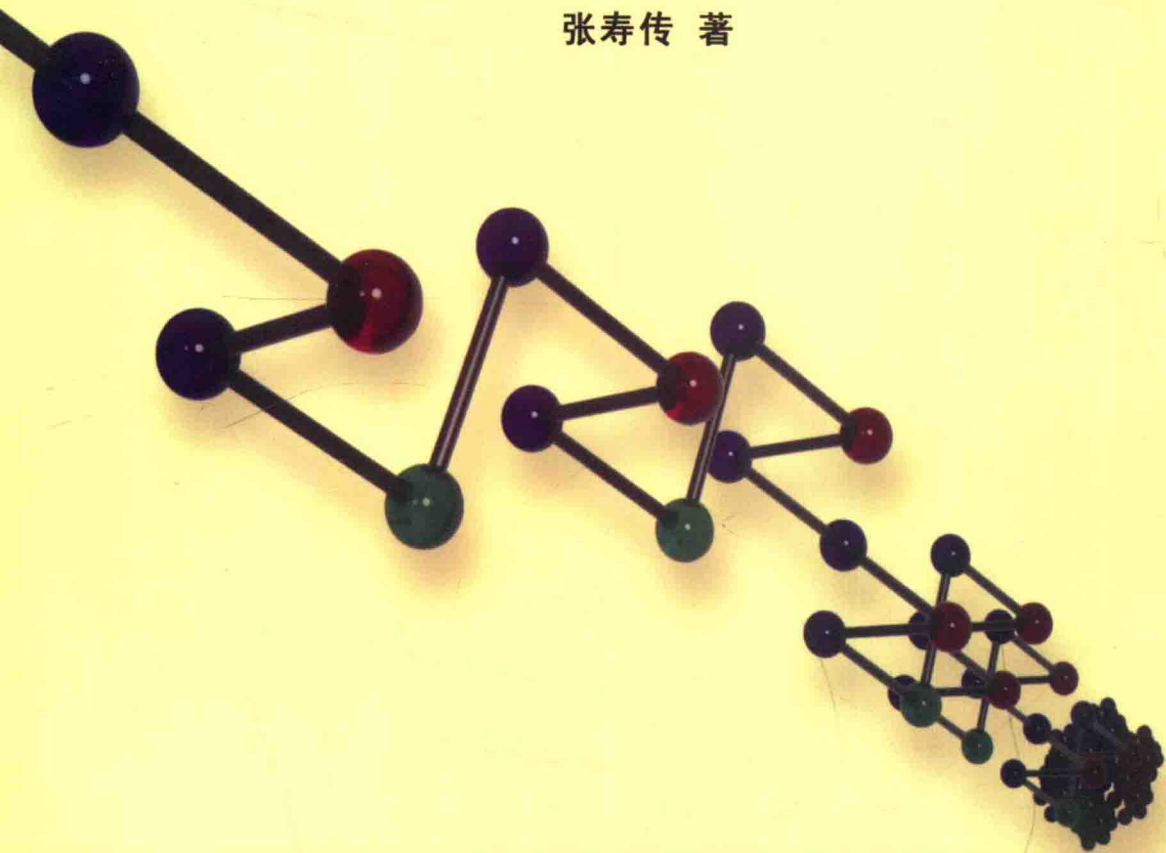


高等数学讲义

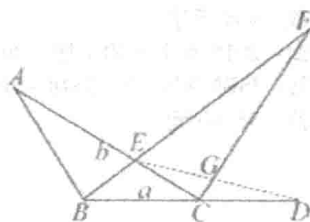
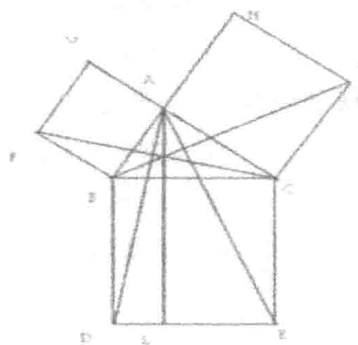
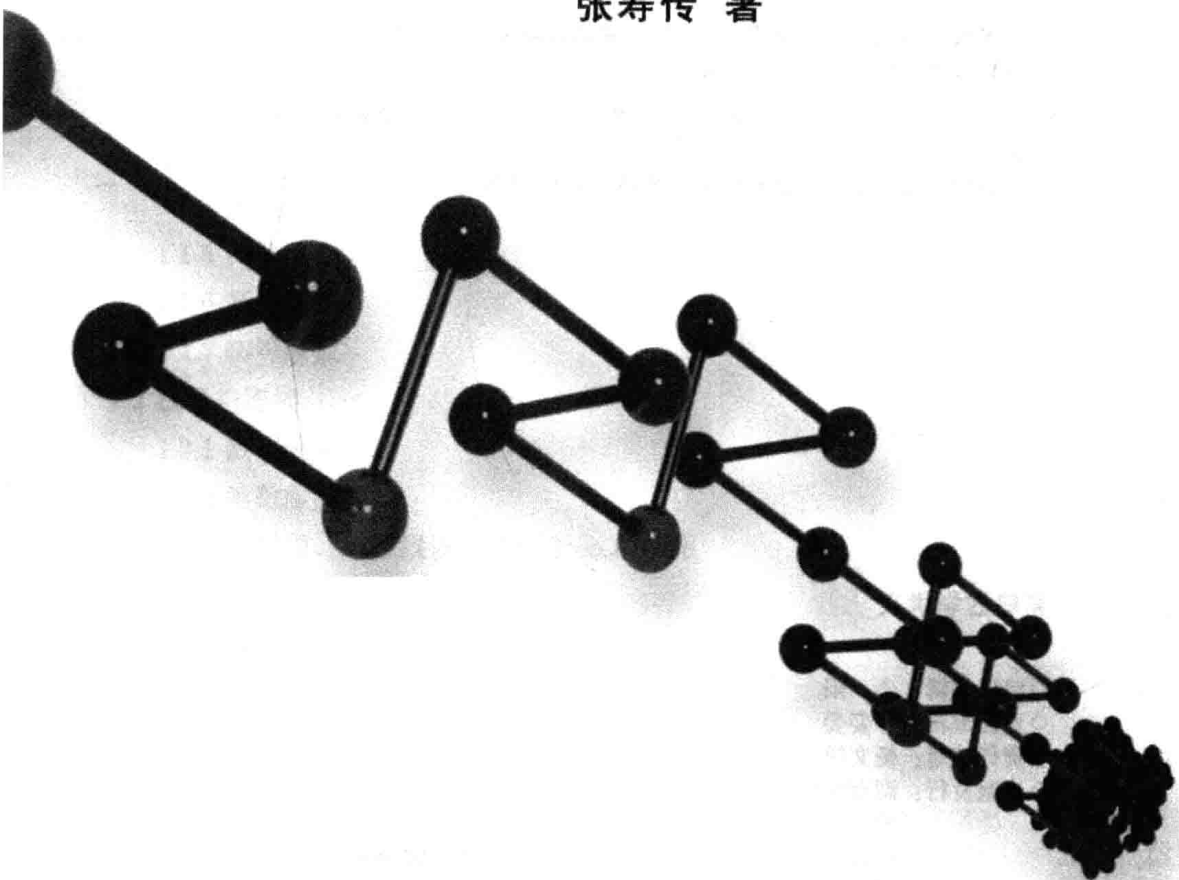
张寿传 著



湖南师范大学出版社

高等数学讲义

张寿传 著



湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学讲义 / 张寿传著. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2014. 12
ISBN 978 - 7 - 5648 - 2011 - 4

I. ①高… II. ①张… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 017370 号

高等数学讲义

张寿传 著

◇组稿编辑: 李 阳

◇责任编辑: 钟雯雯

◇责任校对: 杨文鸽

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 88873071 88873070 传真/0731. 88872636

网址/http: //press. hunnu. edu. cn

◇经销: 湖南省新华书店

◇印刷: 虎彩印艺股份有限公司

◇开本: 787mm × 1092mm 1/16

◇印张: 19.5

◇字数: 456 千字

◇版次: 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

◇书号: ISBN 978 - 7 - 5648 - 2011 - 4

◇定价: 38.00 元

目 录

Chapter 1 一元函数微积分	1
1.1 函数	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 函数定义	2
1.1.3 图形	2
1.1.4 基本性质	3
1.1.5 反函数	3
1.1.6 复合函数	4
1.1.7 初等函数	4
1.2 极限与连续	7
1.2.1 数列极限	7
1.2.2 函数极限	8
1.2.3 左极限、右极限以及趋近于 ∞ 的极限	9
1.2.4 极限的性质与四则运算	10
1.2.5 极限的存在性和两个重要极限	11
1.2.6 函数的连续性	13
1.2.7 无穷小量比较和一些极限例子	15
1.3 导数与微分	17
1.3.1 怎样求导数	18
1.3.2 导数的四则运算	19
1.3.3 复合函数求导	19
1.3.4 高阶导数	21
1.3.5 微分	22
1.4 中值定理与导数的应用	25
1.4.1 中值定理	25
1.4.2 罗必塔法则	26
1.4.3 泰勒公式	29

1.4.4 函数的单调性与极值	30
1.4.5 最大、最小值	32
1.4.6 曲线的凹凸性, 拐点	32
1.5 不定积分	35
1.5.1 不定积分的定义和性质	35
1.5.2 不定积分的换元法	37
1.5.3 不定积分的分部积分	40
1.5.4 有理分式函数的积分	41
1.6 定积分	43
1.6.1 定积分的定义	44
1.6.2 定积分的基本定理	47
1.6.3 定积分的计算	48
1.6.4 求面积	49
1.6.5 求旋转面围成的图形的体积	50
1.6.6 广义积分	50
Chapter 2 线性代数	51
2.1 行列式	51
2.1.1 n 阶行列式的定义	51
2.1.2 行列式的性质	54
2.1.3 行列式的展开	58
2.1.4 Gramer 法则	63
2.2 消元法(高斯消去法)	66
2.3 数组向量空间	70
2.3.1 向量的坐标表示法	70
2.3.2 线性相关与线性无关	71
2.3.3 极大线性无关组和向量的秩	74
2.4 矩阵	77
2.4.1 矩阵的加法、乘法与数乘	77
2.4.2 矩阵的转置与分块	78
2.4.3 拉普拉斯定理	82
2.4.4 特殊矩阵	83

2.4.5 矩阵的秩和初等变换	86
2.4.6 初等矩阵	91
2.4.7 可逆矩阵与逆矩阵	93
2.5 线性方程组的一般理论	96
2.5.1 齐次方程组的解	96
2.5.2 非齐次线性方程组	98
2.6 向量空间	100
2.6.1 几何向量空间	104
2.6.2 向量空间的内积	105
2.6.3 内积性质	105
2.6.4 正交组的求法	106
2.7 二次型	107
2.7.1 实对称矩阵相似并且合同于对角矩阵	108
2.7.2 合同	112
2.7.3 正定矩阵	114
2.7.4 二次型化简	115
Chapter 3 空间解析几何	117
3.1 几何向量空间中的向量积	117
3.2 混合积	118
3.3 直线和平面	119
3.4 柱面和旋转面	120
3.5 二次曲面	121
Chapter 4 多元函数微积分	124
4.1 多元函数的基本概念和极限	124
4.1.1 区域	124
4.1.2 多元函数的极限	125
4.1.3 多元函数的连续	126
4.2 偏导数	127
4.2.1 高阶偏导数	128
4.3 全微分及其应用	130
4.4 多元函数的复合函数的求偏导法则和隐函数求偏导	131

4.4.1 复合函数求偏导	131
4.4.2 隐函数求偏导	133
4.5 偏导数的几何意义	134
4.5.1 空间曲线的切线和法平面	134
4.5.2 空间曲面的切平面和法线	135
4.6 多元函数的方向导数和梯度	136
4.6.1 方向导数	136
4.6.2 梯度	137
4.7 多元函数的极值及其求法	137
4.7.1 多元函数的条件极值	139
4.8 二重积分的概念和性质	140
4.8.1 二重积分定义	140
4.8.2 二重积分的性质	140
4.9 二重积分的计算	141
4.9.1 累次积分	141
4.10 三重积分	144
4.10.1 三重积分定义	144
4.10.2 三重积分的计算	144
4.10.3 累次积分	144
4.10.4 重积分的变量代换	146
4.11 重积分的应用	148
4.12 曲线积分	149
4.12.1 第一型曲线积分	149
4.12.2 第二型曲线积分	151
4.12.3 格林公式	153
4.13 曲面积分	155
4.13.1 第一型曲面积分	155
4.13.2 第二型曲面积分	157
Chapter 5 无穷级数	161
5.1 级数的概念和性质	161
5.1.1 级数性质	162

5.1.2 级数收敛的必要条件	162
5.1.3 正项级数	163
5.1.4 交错级数	165
5.1.5 绝对收敛和条件收敛	165
5.2 幂级数	166
5.2.1 幂级数的收敛半径	167
5.2.2 函数项级数逐项积分和逐项求导	168
5.2.3 函数展开成幂级数	171
5.3 傅里叶级数	172
Chapter 6 微分方程	176
6.1 可分离变量的微分方程	176
6.2 齐次方程	177
6.3 一阶线性微分方程	177
6.4 可降阶的微分方程	179
6.5 二阶线性微分方程解的结构	180
6.6 二阶常系数线性齐次方程	182
6.7 二阶常系数非齐次方程	183
6.7.1 $f(x) = e^{\lambda}xP_m(x)$	183
6.7.2 $f(x) = e^{ax}P_m(x)$, ($b \neq 0$, a 是实数)	185
6.7.3 贝努力方程和欧拉方程	186
6.8 一阶全微分方程	186
Chapter 7 差分方程	188
7.1 差分方程的基本概念	188
7.2 线性差分方程解的结构	189
7.3 一阶线性差分方程	189
Chapter 8 总练习题	192
8.1 一元函数练习题	192
8.2 线性代数练习题	213
8.3 空间解析几何练习题	222
8.4 多元函数微积分练习题	225
8.5 级数练习题	242

8.6 微分方程练习题	247
8.7 线性代数试题2012A	252
8.8 线性代数试题2012B	254
8.9 99级线性代数模拟题1-6	256
8.10 高等数学2010年考题	265
8.11 高等数学2012 考题	266
8.12 总练习题答案	268
8.12.1 一元函数练习题部分答案	268
8.12.2 线性代数练习题答案	268
8.12.3 空间解析几何、多元函数、级数和微分方程练习题答案	273
8.12.4 线性代数2012A 考题答案	278
8.12.5 线性代数2012B 考题答案	281
8.12.6 高等数学2012 考题答案	283
Chapter 9 附录 为物理专业补充的内容	286
9.1 傅里叶级数收敛定理的证明	286
9.2 一阶常微分方程组、解的存在性和唯一性	290
9.2.1 一阶常微分方程组	290
9.2.2 一阶常微分方程组的解的结构	291
9.2.3 常系数线性方程组	293
9.2.4 消去法	293
9.2.5 常数变易法	294
9.2.6 首次积分	294
9.2.7 解的存在与唯一性	295
9.2.8 解的延拓	297
9.3 柯西公式	298
9.4 有限复盖定理	300
参考文献	301
后记	302

Chapter 1

一元函数微积分

初等数学的研究对象基本上是不变的量, 而高等数学的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限是一个变量在另一个变量变化时的变化趋势, 它是微积分的基础. 从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发, 引进了导数概念, 它的反问题是寻求一个可导函数, 使它的导函数等于已知函数, 这是不定积分. 为了计算曲边梯形的面积, 产生了定积分.

1.1 函数

在这一节中, 我们介绍了函数的概念和它的一些基本性质.

1.1.1 集合

集合是数学中的一个基本概念, 我们先通过例子来说明这个概念. 例如, 一个书柜中的书构成一个集合, 一间教室里的学生构成一个集合, 全体实数构成一个集合, 等等. 一般地, 所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元), 通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合, 用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素, 就说 a 属于 A , 记作 $a \in A$; 如 a 不是集合 A 的元素, 就说 a 不属于 A , 记作 $a \notin A$. 一个集合, 若它只含有限个元素, 则称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集. 表示集合的方法通常有以下两种: 一种是列举法, 就是把集合的全体元素一一列举出来表示, 例如, 由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 元素组成的集合 A , 可表示成 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. 另一种是描述法, 若集合 A 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的, 就可表示成 $A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$. 例如, 集合 B 是方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集, 就可表示成 $B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$. 我们习惯上用下面符号来表示一些数组成的集合:

$$\mathbb{Z} := \{x \mid x \text{ 是整数}\}.$$

$$\mathbb{N}_0 := \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}.$$

$$\mathbb{N} := \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}.$$

$$\mathbb{Q} := \{x \mid x \text{ 是有理数}\}.$$

$$\mathbb{R} := \{x \mid x \text{ 是实数}\}.$$

$\mathbb{C} := \{x \mid x \text{ 是复数}\}.$

$\emptyset$ 表示空集合.

集合有运算: 并、交和差: 即: 并 $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$. 交 $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$. 差 $A - B := \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$. 差有时也用 $A \setminus B$ 来表示.

1.1.2 函数定义

引入: 通过 $F = ma$, 给一个加速度就有一个力. 又如: $y = \sin x$, 给一个角就有一个值. 再如 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 中给一个 x 可得到一个 y 的值. 像这种 x, y 在某一变化过程中的两个变量, 我们可以引进一个新的概念. D 和 W 表示两个集合. 如果对 D 中每一个 x 都有 W 中的一个确定的值 y 按照某一规则 ϕ 与它对应, 则称 ϕ 是从 D 到 W 的映射, 记 $y = \phi(x)$. 如果 $D, W \subseteq \mathbb{C}$, 那么称 ϕ 是一个函数, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域. 通常将 $y = \phi(x)$ 的变化范围 $\{\phi(x) \mid x \in D\}$ 称为值域, 记为 R_ϕ , 而将定义域记为 D_ϕ . 让 id_D 表示 D 到 D 的恒等映射: $\text{id}(x) = x, \forall x \in D$.

(i) $F = ma$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = (-\infty, +\infty)$.

(ii) $y = \sin x$ 的定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [-1, 1]$.

(iii) $y = \frac{1}{x}$ 的定义域 $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域 $R_f = (-\infty, 0), (0, +\infty)$.

定义1.1.1. 让 I 是一个集合, 并且对任何 $i \in I$, 有 A_i 是一个集合. 定义 $\cup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I \text{ 使得 } x \in A_i\}$. $\cap_{i \in I} A_i := \{x \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$. $\times_{i \in I} A_i := \{f \mid f \text{ 是一个从 } I \text{ 到 } \cup_{i \in I} A_i \text{ 的映射, 并且 } f(i) \in A_i\}$. 它们分别被称为 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的并, 交和迪卡尔积. 如果 $A_i = A, \forall i \in I$, 记 $\times_{i \in I} A_i = A^I$. 如果 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, 那么可用 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 来表示映射 $f(i) := a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n$.

特别地, 如果 $A_i = A, \forall i \in I$, 并且 $I = \{1, 2, \dots, n\}$, 那么记 $\times_{i \in I} A_i = A^n$. 例如, $\mathbb{R}^3$.

1.1.3 图形

$C := \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$, 称为 $y = f(x)$ 的图形. 函数的图形对于描述和理解函数是非常有益的.

例如: (i) $F = ma$

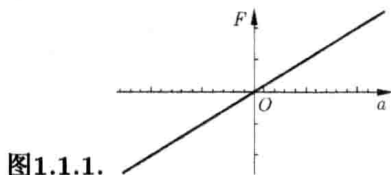


图1.1.1.

(ii) $y = \sin x$

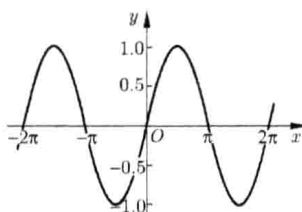


图1.1.2.

(iii) $y = \frac{1}{x}$

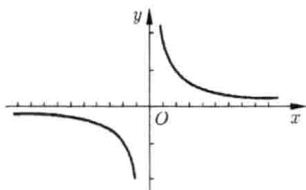


图1.1.3.

1.1.4 基本性质

1. 有界性. 如果存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| < M, \forall x \in D$, 那么称 $y = f(x)$ 是有界函数.

2. 单调性. 如果对任何 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 并且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 那么称函数在 (a, b) 上单调上升; 如果对任何 $x_1, x_2 \in (a, b)$, 并且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么称函数在 (a, b) 上严格单调上升. 同样定义单调下降.

例. (i) $F = ma$ 是单调上升的, 单调区间为 $(-\infty, +\infty)$.

(ii) $y = \sin x$ 在区间 $(2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}), k = 0, \dots$ 上单调上升, 在区间 $(2\pi k + \frac{\pi}{2}, 2\pi(k+1) - \frac{\pi}{2}), k = 0, \dots$ 上单调下降.

(iii) $y = \frac{1}{x}$ 在 D_f 上单调下降.

3. 奇偶性. 如果 $f(x) = -f(-x), \forall x \in D$, 那么称 $y = f(x)$ 为奇函数. 如果 $f(x) = f(-x), \forall x \in D$, 那么称 $y = f(x)$ 为偶函数. 例如 $f(x) = \sin x$ 是奇函数, 并且 $f(x) = \cos x$ 是偶函数.

4. 周期性. 如果存在 $T > 0$, 使得 $f(x+T) = f(x), \forall x, x+T \in D$, 那么称 $y = f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 例如 $f(x) = \sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

1.1.5 反函数

如果 μ 是 A 到 B 的映射, τ 是 B 到 C 的映射. τ 和 μ 可以合成 $\tau \circ \mu$: 即: $(\tau \circ \mu)(a) = \tau(\mu(a)), \forall a \in A$. 它是 A 到 C 的映射.

设 ϕ 是 $A \rightarrow B$ 的映射. 如果 $a, a' \in A$, 且 $\phi(a) = \phi(a')$ 可推出 $a = a'$, 那么称 ϕ 是单射; 若对任何 $b \in B$, 都有 $a \in A$, 使得 $\phi(a) = b$, 那么称 ϕ 是满射. 如果 ϕ 是单的, 且是满的, 那么称 ϕ 是双射 (有时也称为一一映射).

定理1.1.1. ϕ 是 $A \rightarrow B$ 的双射当且仅当存在唯一的映射 $\psi: B \rightarrow A$, 使得 $\psi \circ \phi = \text{id}_A, \phi \circ \psi = \text{id}_B$ (称 ψ 为 ϕ 的逆映射, 记 $\psi = \phi^{-1}$).

证明 对任何 $b \in B$, 由于 ϕ 是满的, 因此存在 $a \in A$, 使得 $\phi(a) = b$, 定义 $\psi(b) = a$, 现证 ψ 是映射. 若还有 $a' \in A$, 且 $\phi(a') = b$, 那么由 ϕ 是单射可知 $a = a'$. 这就证明了 ψ 是映射. 由 ψ 的构造知 $\psi \circ \phi = id_A, \phi \circ \psi = id_B$. 如果有 $\psi' : B \rightarrow A$ 且 $\psi' \circ \phi = id_A, \phi \circ \psi' = id_B$, 则 $\psi' = \psi' \circ \phi \circ \psi = \psi$, 显然, $\psi' = \psi$.

反过来, 若 $\exists \psi : B \rightarrow A$, 使 $\psi \circ \phi = id_A, \phi \circ \psi = id_B$, 对任何 $a, a' \in A$, 若 $\phi(a) = \phi(a')$, 那么 $\psi \circ \phi(a) = \psi \circ \phi(a')$, 即 $a = a'$, 因此 ψ 是单射. 对任何 $\psi(b) \in A$, 且 $\phi(\psi(b)) = b$, 因此 ψ 是满射. $\square$

函数 $f(x)$ 作为映射时的逆映射称为 $f(x)$ 的反函数.

例1.1.1. $y = \sin x, D_{\sin x} = (-\infty, +\infty), R_{\sin x} = [-1, 1]$. 作 $y = f(x) = \sin x$, 取定义域为 $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 值域为 $B = [-1, 1]$. 易知 $f(x)$ 为 A 到 B 的双射, 从而 $f(x)$ 有反函数 $f^{-1}(x)$, 此时习惯上记为 $\arcsin y$, 称为反正弦, 其定义域为 $D_{\arcsin x} = [-1, 1]$, 值域为 $R_{\arcsin x} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

例1.1.2. $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$.

例1.1.3. $y = \frac{1}{x}$, 它的反函数也是 $y = \frac{1}{x}$.

例1.1.4. $y = mx$, 它的反函数是 $y = \frac{1}{m} \cdot x$. 求解过程是 $x = \frac{1}{m} \cdot y$. 转换 x 和 y 得 $y = \frac{1}{m} \cdot x$.

例1.1.5. 如果 $y = f(x)$ 有反函数 $y = g(x)$, 那么它们的图形以 $y = x$ 对称.

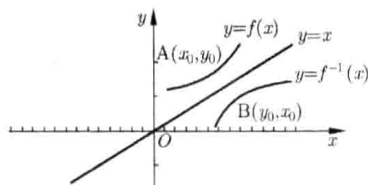


图1.1.4.

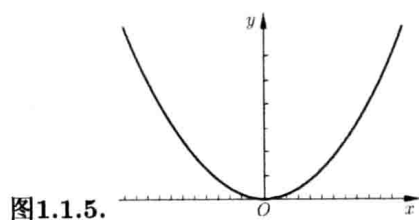
1.1.6 复合函数

例1.1.6. $y = \sin(x+2)$, 就可以写成 $y = \sin u, u = x+2$, 原函数即是由这两个函数构成. 如果 $y = f(u), u = \psi(x)$, 对于 $x \in D_\psi$, 有确定的值 $u = \psi(x)$, 而 $y = f(u)$, 称 $y = f(\psi(x))$ 为由 $y = f(u), u = \psi(x)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量, x 称为自变量, 再如: $y = \sin^2 x + 1$.

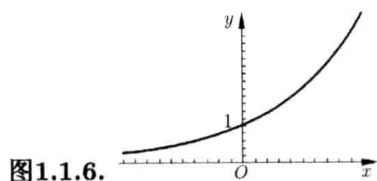
解 令 $u = \sin x$, 则 $y = u^2 + 1$. $\square$

1.1.7 初等函数

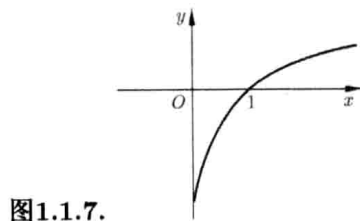
(i) 幂函数 $y = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$). $y = x^2$ 的图形如下所示.



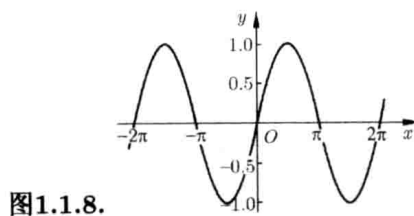
(ii) 指数函数 $y = a^x$ ($a \neq 1, a > 0$). $y = 2^x$ 的图形如下所示.



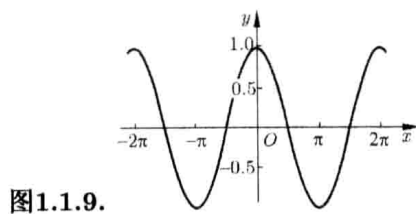
(iii) 对数函数 $y = \log_a x$. $y = \log_2 x$ 的图形如下所示.



(iv) 三角函数
 $y = \sin x$ 的图形如下所示.



$y = \cos x$ 的图形如下所示.



$y = \tan x$ 的图形如下所示.

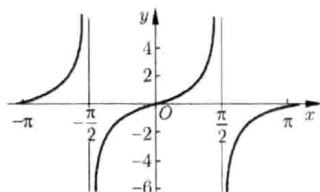


图1.1.10.

$y = \cot x$ 的图形如下所示.

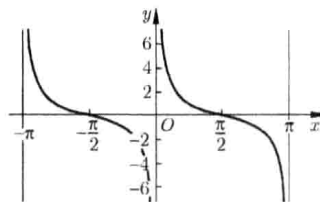


图1.1.11.

(v) 反三角函数 $\arcsin x$ 和 $\arccos x$ 的图形分别如下所示.

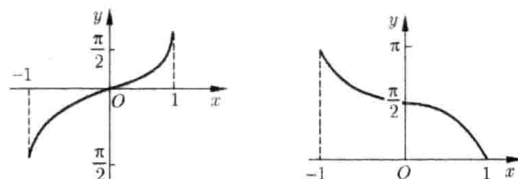


图1.1.12.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数被称为基本初等函数. 初等函数就是基本初等函数与常数函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的函数. 因为高中已经讲述了基本初等函数, 因此我们在这里就不再细述了.

例1.1.7. $y = (x^3 + 3^x \log_2 x)^2$ 是初等函数.

例1.1.8. 和角公式与和差化积公式: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha$, $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$. $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

练习题

1. 在下列各题中, 求由给定函数复合而成的复合函数:

(1) $y = u^2$, $u = \ln v$, $v = \frac{\pi}{3}$.

(2) $y = \sqrt{u}$, $u = e^x - 1$.

(3) $y = \ln u$, $u = v^2 + 1$, $v = \tan x$.

(4) $y = \sin u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 2x - 1$.

2. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y = \arccos \sqrt{x}$. (2) $y = \ln \sin^2 x$. (3) $y = x^x$. (4) $y = \arctan e^{\sqrt{x}}$.

作业: 1, 2.

1.2 极限与连续

在这一节中, 我们引进了极限概念; 给出了极限的性质和四则运算; 用两个重要极限去求极限; 证明了极限收敛的柯西准则.

1.2.1 数列极限

$1, 2, 3, 4, \dots$

$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$

$\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots$

$\sin \frac{\pi}{2}, \sin \frac{2\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{4\pi}{2}, \dots$

这些称为数列. 一般来讲, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 称为数列. a_n 为第 n 项, 也称为一般项. 由于我们只能写出一个数列的有限项, 那么, 怎样去理解在 n 趋近于无穷大时, 数列的变化趋向是什么. 这就需要引进极限的概念.

定义1.2.1. $\{a_n\}$ 是一个数列, A 是一个数. 如果对任意的 $\varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时有 $|a_n - A| < \varepsilon$, 则称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限.

例1.2.1. (1) 若 $a_n = n$, 则 $\{a_n\}$ 无极限.

(2) 若 $a_n = \frac{n+1}{n}$ 时, 由于 $|1 - a_n| = |\frac{1}{n}|$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 要使 $|1 - a_n| < \varepsilon$, 即 $\frac{1}{n} < \varepsilon, n > \frac{1}{\varepsilon}$ 只要 $N > \frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. 当 $n > N$ 时, 有 $|1 - a_n| < \varepsilon$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|a_n| < \varepsilon$, 即 $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 即 $n > (\frac{1}{\varepsilon})^2$, 取 $N = [(\frac{1}{\varepsilon})^2] + 1$ 即可.

(4) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ 无极限.

(5) $a_n = \sqrt{n + \sin n} - \sqrt{n}$. $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n + \sin n} + \sqrt{n}}, \forall \varepsilon > 0$, 要使 $|a_n| < \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ 即可.

定理1.2.1. (柯西准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$, 存在一个自然数 N , 当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

证明 必要性是显然成立的.

充分性. 让 $A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{存在自然数 } N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时有 } a_n < a\}$, 并且 $A' = \mathbb{R} \setminus A$. 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, 即: $a_m - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < a_m + \frac{\varepsilon}{2}$. 于是 $a_m + \frac{\varepsilon}{2} \in A$, 同时, $a_m - \frac{\varepsilon}{2} \in A'$. 易知 $A \cup A' = \mathbb{R}$. 对任何 $x \in A, y \in A'$, 显然 $y \leq x$. 从而存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $y \leq a \leq x$. 观察 $a_m - \varepsilon < a_m - \frac{\varepsilon}{2} \leq a \leq a_m + \frac{\varepsilon}{2} < a_m + \varepsilon$, 即: $|a_m - a| < \varepsilon$. $\square$

如果 $b_k = a_{n_k}, k = 1, 2, \dots$, 并且 $n_1 < n_2 < \dots$, 那么 $\{b_k\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的子序列.

定理1.2.2. (i) 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当数列 $\{a_n\}$ 的两个子序列 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一个数.

(ii) 如果数列 $\{a_n\}$ 的任何子序列都收敛, 那么这些子序列收敛于同一个数.

(iii) 数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当数列 $\{a_n\}$ 的任何子序列都收敛.

证明 (i) 由极限的定义可得.

(ii) 用反证法. 如果存在两个子序列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{a_{m_k}\}$, 它们分别收敛于 A 和 B , 并且 $A \neq B$. 作 $\{a_n\}$ 的一个子序列 $\{a_{l_k}\}$, 使得 $\{a_{l_k}\}$ 的偶数项是在 $\{a_{n_k}\}$ 中, $\{a_{l_k}\}$ 的奇数项是在 $\{a_{m_k}\}$ 中. 由(i) 知 $\{a_{l_k}\}$ 不收敛, 矛盾.

(iii) 由(ii) 可得. $\square$

定理1.2.3. 有限区间内的任何一个数列 $\{a_n\}$ 必有收敛的子序列.

证明 设 $M > 0$, 使得 $a_n \in [-M, M], \forall n \in \mathbb{N}$. 将 $[-M, M]$ 二等分, 让 $[b_1, c_1]$ 是 $[-M, M]$ 的一半, 使得 $[b_1, c_1]$ 中有数列 $\{a_n\}$ 的无限多个元. 将 $[b_1, c_1]$ 二等分, 让 $[b_2, c_2]$ 是 $[b_1, c_1]$ 的一半, 使得 $[b_2, c_2]$ 中有数列 $\{a_n\}$ 的无限多个元. 这样继续下去, 我们得到两个序列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$. 选 $a_{n_k} \in [b_k, c_k]$, 使得 $n_1 < n_2 < \dots < n_k, k = 1, 2, \dots$. 那么, $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的收敛子序列. $\square$

1.2.2 函数极限

考虑 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $x_0 = 0$ 附近的情况. 为了描述 $x = x_0$ 点的情况, 我们引进了函数的极限.

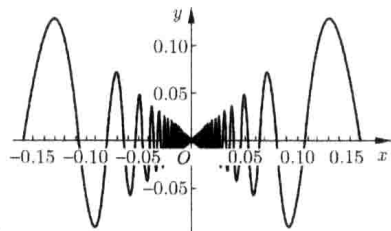


图1.2.1.

如果 $x_0 \in (a, b)$, 那么 (a, b) 被称为 x_0 的一个邻域; $(a, b) \setminus \{x_0\}$ 为 x_0 的一个去心邻域.

定义1.2.2. $y = f(x)$ 是函数, A 是一个数, x_0 是一个固定的点, 并且在函数 $y = f(x)$ 的定义域内存在 x_0 的一个去心邻域. 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 那么称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 的极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

例1.2.2. 证明 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限为0.

证明 对 $\forall \epsilon > 0$, 要使 $|x \sin \frac{1}{x}| < \epsilon$, 只要 $|x| < \epsilon$, 取 $\delta = \epsilon$ 即可. $\square$

例1.2.3. 证明 $y = \frac{x^2 - 1}{2(x + 1)}$ 在 $x \rightarrow -1$ 时的极限为-1.

证明 对 $\forall \epsilon > 0$, 要使 $|\frac{x^2 - 1}{2(x + 1)} - (-1)| < \epsilon$, 即: $|\frac{1}{2}(x + 1)| < \epsilon$, 只要取 $\delta = 2\epsilon$ 即可. $\square$

练习题

1. 求下列极限: