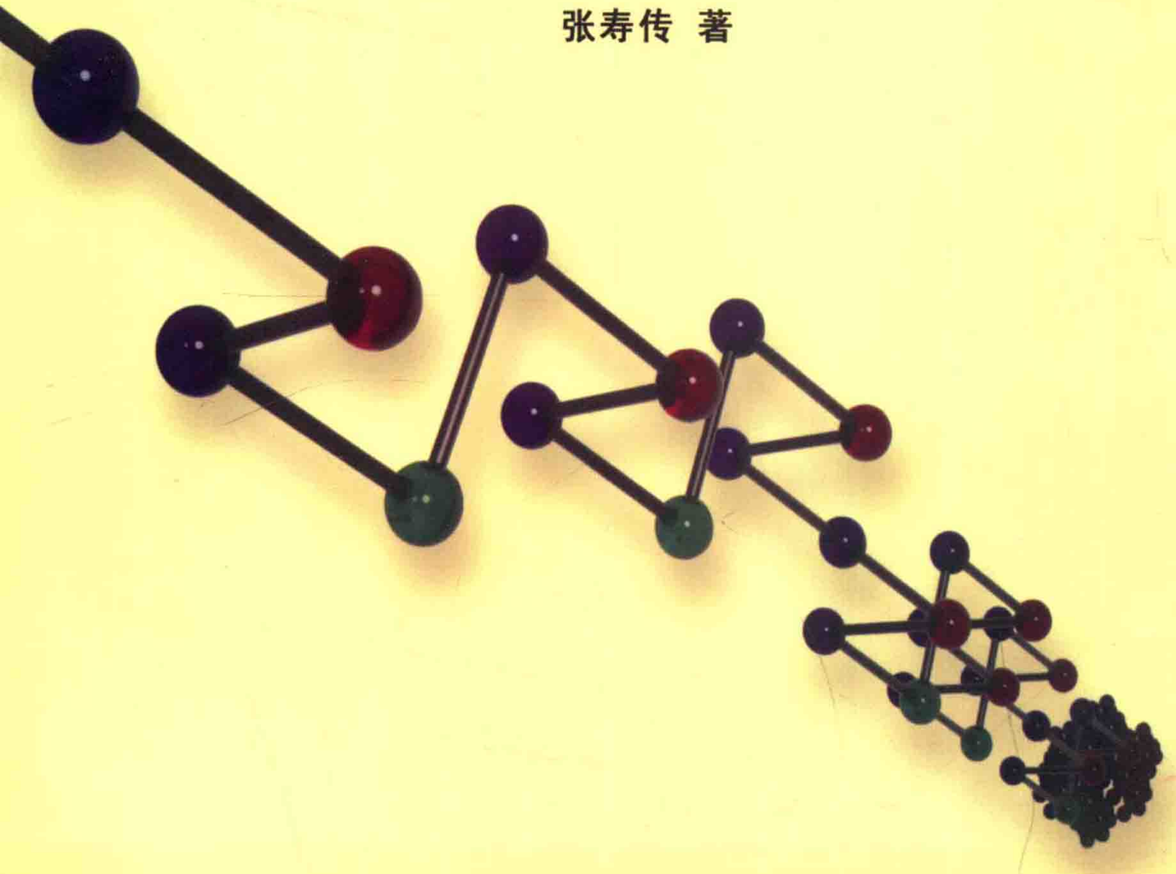
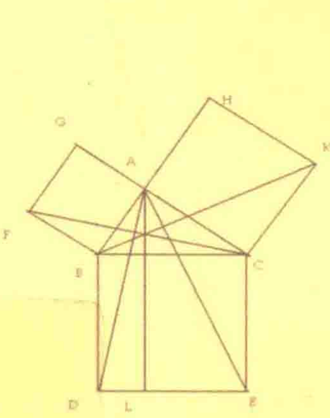
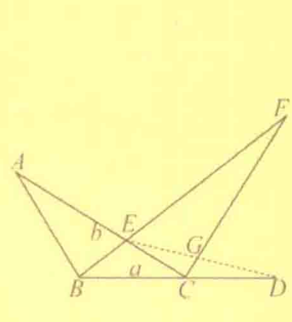
高等数学讲义

张寿传 著



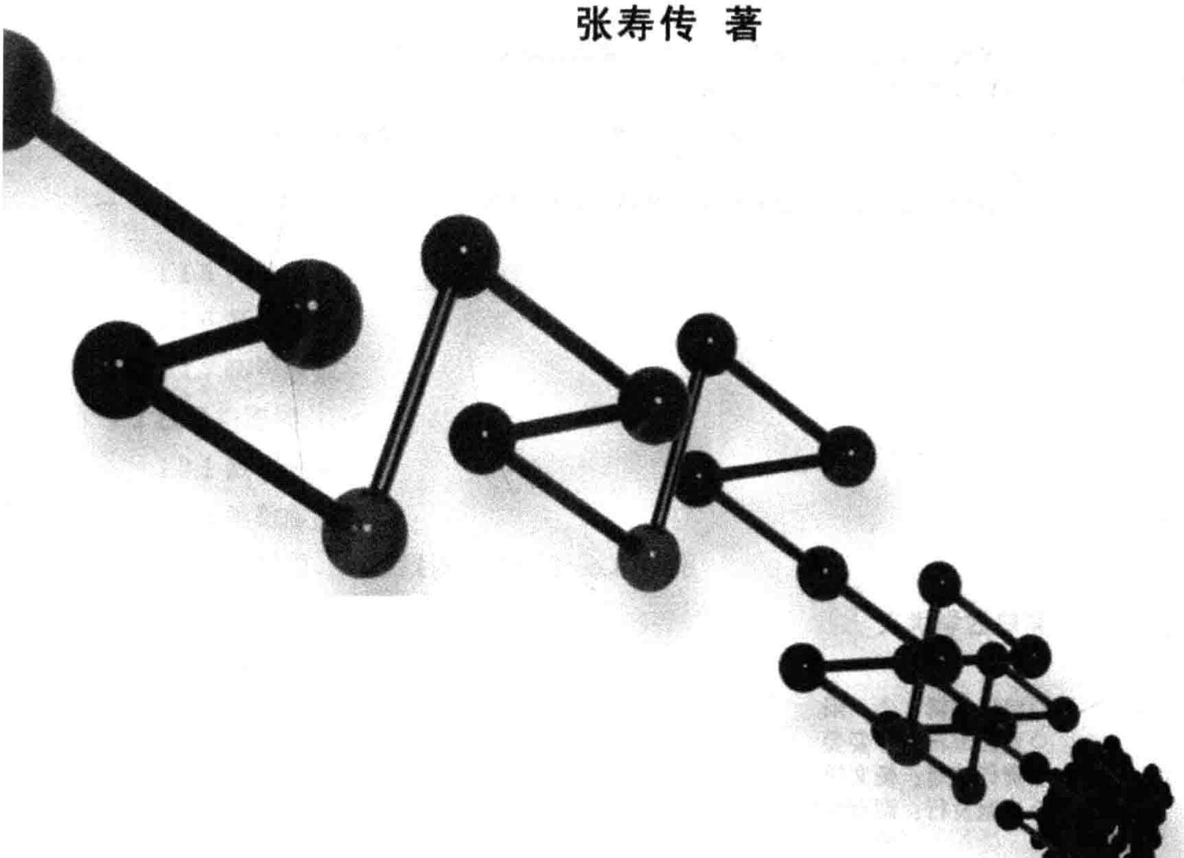


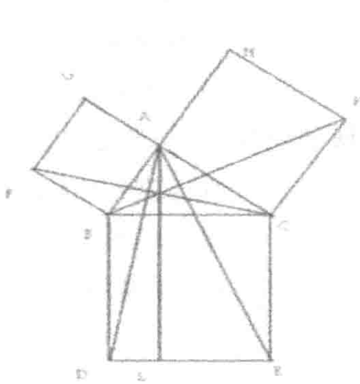


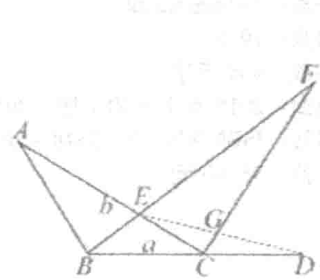
湖南师范大学出版社

高等数学讲义

张寿传 著







湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学讲义／张寿传著．—长沙：湖南师范大学出版社，2014．12
ISBN 978－7－5648－2011－4

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张… Ⅲ．①高等数学—高等学校—教学参考资料
Ⅳ．①O13
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 017370 号

高等数学讲义
张寿传 著

◇组稿编辑：李　阳
◇责任编辑：钟娈娈
◇责任校对：杨文鸽
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731．88873071　88873070　传真/0731．88872636
网址/http：//press．hunnu．edu．cn
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：虎彩印艺股份有限公司
◇开本：787mm×1092mm　1/16
◇印张：19．5
◇字数：456 千字
◇版次：2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
◇书号：ISBN 978－7－5648－2011－4
◇定价：38．00 元

目 录

Chapter 1

一元函数微积分

初等数学的研究对象基本上是不变的量, 而高等数学的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系. 极限是一个变量在另一个变量变化时的变化趋势, 它是微积分的基础. 从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发, 引进了导数概念, 它的反问题是寻求一个可导函数, 使它的导函数等于已知函数, 这是不定积分. 为了计算曲边梯形的面积, 产生了定积分.

1.1 函数

在这一节中, 我们介绍了函数的概念和它的一些基本性质.

1.1.1 集合

集合是数学中的一个基本概念, 我们先通过例子来说明这个概念. 例如, 一个书柜中的书构成一个集合, 一间教室里的学生构成一个集合, 全体实数构成一个集合, 等等. 一般地, 所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元), 通常用大写拉丁字母$A, B, C, \cdots$ 表示集合, 用小写拉丁字母$a, b, c, \cdots$ 表示集合的元素. 如果a 是集合A 的元素, 就说a 属于A, 记作$a \in A$; 如a 不是集合A 的元素, 就说a 不属于A, 记作$a \notin A$. 一个集合, 若它只含有限个元素, 则称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集. 表示集合的方法通常有以下两种: 一种是列举法, 就是把集合的全体元素一一列举出来表示, 例如, 由$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 元素组成的集合A, 可表示成$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. 另一种是描述法, 若集合$A$ 是由具有某种性质P 的元素x 的全体所组成的, 就可表示成$A = \{x \mid x \text{ 具有性质} P\}$. 例如, 集合$B$ 是方程$x^2 - 1 = 0$ 的解集, 就可表示成$B = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$. 我们习惯上用下面符号来表示一些数组成的集合:

$\mathbb{Z} := \{x \mid x\text{是整数}\}$.

$\mathbb{N}_0 := \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$.

$\mathbb{N} := \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}$.

$\mathbb{Q} := \{x \mid x\text{是有理数}\}$.

$\mathbb{R} := \{x \mid x\text{是实数}\}$.

$\mathbb{C} := \{x \mid x是复数\}$.

$\emptyset$ 表示空集合.

集合有运算: 并、交和差: 即: 并$A \cup B := \{x \mid x \in A$ 或$x \in B\}$. 交$A \cap B := \{x \mid x \in A$ 且$x \in B\}$. 差$A - B := \{x \mid x \in A$ 但$x \notin B\}$. 差有时也用$A \setminus B$ 来表示.

1.1.2　函数定义

引入: 通过$F = ma$, 给一个加速度就有一个力. 又如: $y = \sin x$, 给一个角就有一个值. 再如$y = \frac{1}{x}$ 在$(-\infty, 0)$ 中给一个x 可得到一个y 的值. 像这种x, y 在某一变化过程中的两个变量, 我们可以引进一个新的概念. D 和W 表示两个集合. 如果对D 中每一个x 都有W 中的一个确定的值y 按照某一规则ϕ 与它对应, 则称ϕ 是从D 到W 的映射, 记$y = \phi(x)$. 如果$D, W \subseteq \mathbb{C}$, 那么称$\phi$ 是一个函数, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域. 通常将$y = \phi(x)$ 的变化范围$\{\phi(x) \mid x \in D\}$ 称为值域, 记为R_ϕ, 而将定义域记为D_ϕ. 让id_D 表示D 到D 的恒等映射: $\mathrm{id}(x) = x, \forall x \in D$.

(i) $F = ma$ 的定义域$D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域$R_f = (-\infty, +\infty)$.

(ii) $y = \sin x$ 的定义域$D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域$R_f = [-1, 1]$.

(iii) $y = \frac{1}{x}$ 的定义域$D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域$R_f = (-\infty, 0), (0, +\infty)$.

定义1.1.1. 让I 是一个集合, 并且对任何$i \in I$, 有A_i 是一个集合. 定义$\cup_{i\in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I$ 使得$x \in A_i\}$. $\cap_{i\in I} A_i := \{x \mid x \in A_i, \forall x \in I\}$. $\times_{i\in I} A_i := \{f \mid f$ 是一个从I 到$\cup_{i\in I} A_i$ 的映射, 并且$f(i) \in A_i\}$. 它们分别被称为$\{A_i \mid i \in I\}$ 的并, 交和迪卡尔积. 如果$A_i = A, \forall i \in I$, 记$\times_{i\in I} A_i = A^I$. 如果$I = \{1, 2, \cdots, n\}$, 那么可用$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 来表示映射$f(i) := a_i \in A_i$, $1 \le i \le n$.

特别地, 如果$A_i = A, \forall i \in I$, 并且$I = \{1, 2, \cdots, n\}$, 那么记$\times_{i\in I} A_i = A^n$. 例如, $\mathbb{R}^3$.

1.1.3　图形

$C := \{(x, y) | y = f(x), x \in D_f\}$, 称为$y = f(x)$ 的图形. 函数的图形对于描述和理解函数是非常有益的.

例如: (i) $F = ma$

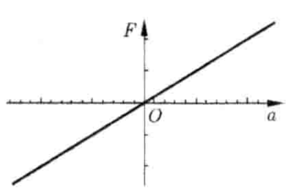


图1.1.1.

(ii) $y = \sin x$

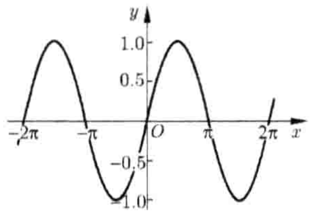


图1.1.2.

(iii) $y = \frac{1}{x}$

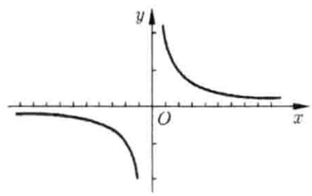


图1.1.3.

1.1.4 基本性质

1. 有界性. 如果存在$M > 0$, 使得$|\ f(x)\ | < M$, $\forall x \in D$, 那么称$y = f(x)$ 是有界函数.

2. 单调性. 如果对任何$x_1, x_2 \in (a, b)$, 并且$x_1 < x_2$, 有$f(x_1) \le f(x_2)$, 那么称函数在(a, b) 上单调上升; 如果对任何$x_1, x_2 \in (a, b)$, 并且$x_1 < x_2$, 有$f(x_1) < f(x_2)$, 那么称函数在(a, b) 上严格单调上升. 同样定义单调下降.

例. (i) $F = ma$ 是单调上升的, 单调区间为$(-\infty, +\infty)$.

(ii) $y = \sin x$ 在区间$(2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}), k = 0, \cdots$ 上单调上升, 在区间$(2\pi k + \frac{\pi}{2}, 2\pi(k + 1) - \frac{\pi}{2}), k = 0, \cdots$ 上单调下降.

(iii) $y = \frac{1}{x}$ 在D_f 上单调下降.

3. 奇偶性. 如果$f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D$, 那么称$y = f(x)$ 为奇函数. 如果$f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$, 那么称$y = f(x)$ 为偶函数. 例如$f(x) = \sin x$ 是奇函数, 并且$f(x) = \cos x$ 是偶函数.

4. 周期性. 如果存在$T > 0$, 使得$f(x + T) = f(x)$, $\forall x, x + T \in D$, 那么称$y = f(x)$ 是以T 为周期的周期函数. 例如$f(x) = \sin x$ 是以2π 为周期的周期函数.

1.1.5 反函数

如果μ 是A 到B 的映射, τ是B到C的映射. τ和μ可以合成$\tau \circ \mu$: 即: $(\tau \circ \mu)(a) = \tau(\mu(a))$, $\forall a \in A$. 它是A到C的映射.

设ϕ是$A \to B$的映射. 如果$a, a' \in A$, 且$\phi(a) = \phi(a')$可推出$a = a'$, 那么称ϕ是单射; 若对任何$b \in B$, 都有$a \in A$, 使得$\phi(a) = b$, 那么称ϕ是满射. 如果ϕ是单的,且是满的, 那么称ϕ是双射(有时也称为一一映射).

定理1.1.1. ϕ是$A \to B$的双射当且仅当存在唯一的映射$\psi : B \to A$, 使得$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_A, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$ (称ψ为ϕ的逆映射,记$\psi = \phi^{-1}$).

证明 对任何$b \in B$, 由于ϕ是满的, 因此存在$a \in A$, 使得$\phi(a) = b$, 定义$\psi(b) = a$, 现证ψ是映射. 若还有$a' \in A$, 且$\phi(a') = b$, 那么由ϕ是单射可知$a = a'$. 这就证明了ψ是映射. 由ψ的构造知$\psi \circ \phi = id_A, \phi \circ \psi = id_B$. 如果有$\psi' : B \to A$ 且$\psi' \circ \phi = \mathrm{id}_A$, $\phi \circ \psi' = \mathrm{id}_B$, 则$\psi' = \psi' \circ \phi \circ \psi = \psi$, 显然,$\psi' = \psi$.

反过来, 若$\exists \psi : B \to A$, 使$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_A, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_B$, 对任何$a, a' \in A$, 若$\phi(a) = \phi(a')$, 那么$\psi \circ \phi(a) = \psi \circ \phi(a')$, 即$a = a'$, 因此$\psi$是单射. 对任何$\psi(b) \in A$, 且$\phi(\psi(b)) = b$, 因此$\psi$是满射. □

函数$f(x)$作为映射时的逆映射称为$f(x)$的反函数.

例1.1.1. $y = \sin x, D_{\sin x} = (-\infty, +\infty), R_{\sin x} = [-1, 1]$. 作$y = f(x) = \sin x$, 取定义域为$A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 值域为$B = [-1, 1]$. 易知$f(x)$ 为A 到B 的双射, 从而$f(x)$ 有反函数$f^{-1}(x)$, 此时习惯上记为$\arcsin y$, 称为反正弦, 其定义域为$D_{\arcsin x} = [-1, 1]$, 值域为$R_{\arcsin x} = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

例1.1.2. $F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$.

例1.1.3. $y = \frac{1}{x}$, 它的反函数也是$y = \frac{1}{x}$.

例1.1.4. $y = mx$, 它的反函数是$y = \frac{1}{m} \cdot x$. 求解过程是$x = \frac{1}{m} \cdot y$. 转换x 和y 得$y = \frac{1}{m} \cdot x$.

例1.1.5. 如果$y = f(x)$ 有反函数$y = g(x)$, 那么它们的图形以$y = x$ 对称.

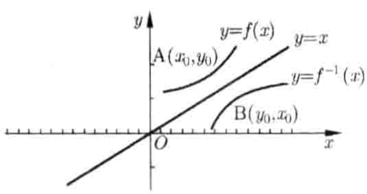


图1.1.4.

1.1.6 复合函数

例1.1.6. $y = \sin(x + 2)$, 就可以写成$y = \sin u, u = x + 2$, 原函数即是由此两个函数构成. 如果$y = f(u), u = \psi(x)$, 对于$x \in D_\psi$, 有确定的值$u = \psi(x)$, 而$y = f(u)$, 称$y = f(\psi(x))$ 为由$y = f(u), u = \psi(x)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量, x 称为自变量, 再如: $y = \sin^2 x + 1$.

解 令$u = \sin x$, 则$y = u^2 + 1$. □

1.1.7 初等函数

(i) 幂函数$y = x^a$ （$a \in \mathbb{R}$）. $y = x^2$ 的图形如下所示.

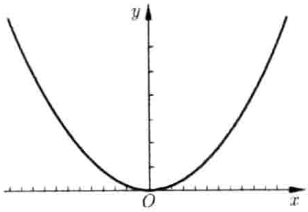


图1.1.5.

(ii) 指数函数$y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$. $y=2^x$ 的图形如下所示.

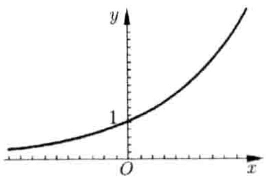


图1.1.6.

(iii) 对数函数$y=\log_a x$. $y=\log_2 x$ 的图形如下所示.

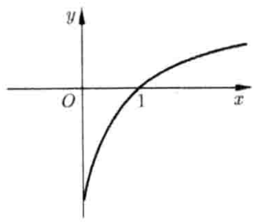


图1.1.7.

(iv) 三角函数

$y=\sin x$的图形如下所示.

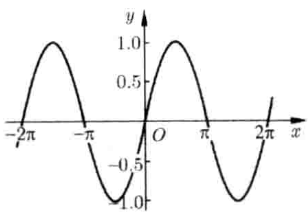


图1.1.8.

$y=\cos x$的图形如下所示.

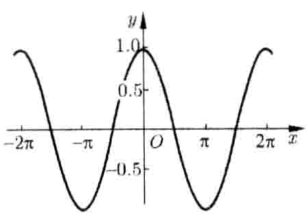


图1.1.9.

$y=\tan x$的图形如下所示.

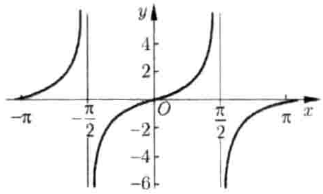


图1.1.10.

$y=\cot x$的图形如下所示.

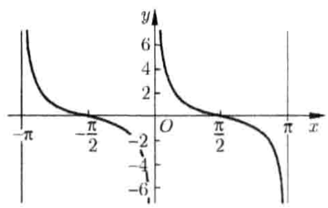


图1.1.11.

(v) 反三角函数$\arcsin x$和$\arccos x$的图形分别如下所示.

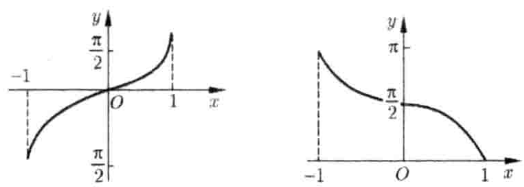


图1.1.12.

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数被称为基本初等函数. 初等函数就是基本初等函数与常数函数经过有限次四则运算和有限次复合而成的函数. 因为高中已经讲述了基本初等函数, 因此我们在这里就不再细述了.

例1.1.7. $y=(x^3+3^x\log_2 x)^2$ 是初等函数.

例1.1.8. 和角公式与和差化积公式: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha$, $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$. $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$. $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$. $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$.

练习题

1. 在下列各题中, 求由给定函数复合而成的复合函数:
(1) $y=u^2, u=\ln v, v=\frac{x}{3}$. (2) $y=\sqrt{u}, u=e^x-1$.
(3) $y=\ln u, u=v^2+1, v=\tan x$. (4) $y=\sin u, u=\sqrt{v}, v=2x-1$.
2. 指出下列各函数是由哪些基本初等函数复合而成的:
(1) $y=\arccos\sqrt{x}$. (2) $y=\ln\sin^2 x$. (3) $y=x^x$. (4) $y=\arctan e^{\sqrt{x}}$.
作业: 1, 2.

1.2 极限与连续

在这一节中, 我们引进了极限概念; 给出了极限的性质和四则运算; 用两个重要极限去求极限; 证明了极限收敛的柯西准则.

1.2.1 数列极限

$1, 2, 3, 4, \cdots.$
$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots.$
$\frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots.$
$\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{2\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{4\pi}{2}, \cdots.$

这些称为数列. 一般来讲, $a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$ 称为数列. a_n 为第n 项, 也称为一般项. 由于我们只能写出一个数列的有限项, 那么, 怎样去理解在n 趋近于无穷大时, 数列的变化趋向是什么. 这就需要引进极限的概念.

定义1.2.1. $\{a_n\}$ 是一个数列, A 是一个数. 如果对任意的$\varepsilon > 0, \exists N$, 当$n > N$ 时有$| a_n - A |< \varepsilon$, 则称A 为数列$\{a_n\}$ 的极限.

例1.2.1. (1) 若$a_n = n$, 则$\{a_n\}$ 无极限.

(2) 若$a_n = \frac{n+1}{n}$ 时, 由于$|1 - a_n| = |\frac{1}{n}|$, 对于任意的$\varepsilon > 0$, 要使$|1 - a_n| < \varepsilon$, 即$\frac{1}{n} < \varepsilon, n > \frac{1}{\varepsilon}$ 只要$N > \frac{1}{\varepsilon}$. 取$N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. 当$n > N$ 时, 有$|1 - a_n| < \varepsilon$, 因此$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(3) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. $\forall\varepsilon > 0$, 要使$|a_n| < \varepsilon$, 即$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$, 只要$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 即$n > (\frac{1}{\varepsilon})^2$, 取$N = [(\frac{1}{\varepsilon})^2] + 1$ 即可.

(4) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ 无极限.

(5) $a_n = \sqrt{n + \sin n} - \sqrt{n}$. $a_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n+\sin n} - \sqrt{n}}, \forall\varepsilon > 0$, 要使$|a_n| < \varepsilon$, 只要$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, 取$N = [\frac{1}{\varepsilon}^2] + 1$ 即可.

定理1.2.1. (柯西准则) 数列$\{a_n\}$ 收敛当且仅当对任何$\epsilon > 0$, 存在一个自然数N, 当$m, n > N$ 时, 有$| a_m - a_n |< \epsilon$.

证明 必要性是显然成立的.

充分性. 让$A := \{a \in \mathbb{R} \mid$ 存在自然数N 使得当$n > N$ 时有$a_n < a\}$, 并且$A' = \mathbb{R} \setminus A$. 对任何$\epsilon > 0$, 存在$N$, 当$m, n > N$ 时, 有$| a_n - a_m |< \frac{\epsilon}{2}$, 即: $a_m - \frac{\epsilon}{2} < a_n < a_m + \frac{\epsilon}{2}$. 于是$a_m + \frac{\epsilon}{2} \in A$, 同时, $a_m - \frac{\epsilon}{2} \in A'$. 易知$A \cup A' = \mathbb{R}$. 对任何$x \in A$, $y \in A'$, 显然$y \leq x$. 从而存在$a \in \mathbb{R}$, 使得$y \leq a \leq x$. 观察$a_m - \epsilon < a_m - \frac{\epsilon}{2} \leq a \leq a_m + \frac{\epsilon}{2} < a_m + \epsilon$, 即: $| a_m - a |< \epsilon$. □

如果 $b_k = a_{n_k}$, $k = 1, 2, \cdots$, 并且$n_1 < n_2 < \cdots$, 那么$\{b_k\}$ 称为$\{a_n\}$ 的子序列.

定理1.2.2. (i) 数列$\{a_n\}$ 收敛当且仅当数列$\{a_n\}$ 的两个子序列$\{a_{2k}\}$ 和$\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一个数.

(ii) 如果数列$\{a_n\}$ 的任何子序列都收敛, 那么这些子序列收敛于同一个数.

(iii) 数列$\{a_n\}$ 收敛当且仅当数列$\{a_n\}$ 的任何子序列都收敛.

证明 (i) 由极限的定义可得.

(ii) 用反证法. 如果存在两个子序列$\{a_{n_k}\}$ 和$\{a_{m_k}\}$, 它们分别收敛于A 和B, 并且$A \neq B$. 作$\{a_n\}$ 的一个子序列$\{a_{l_k}\}$, 使得$\{a_{l_k}\}$ 的偶数项是在$\{a_{n_k}\}$ 中, $\{a_{l_k}\}$ 的奇数项是在$\{a_{m_k}\}$ 中. 由(i) 知$\{a_{l_k}\}$ 不收敛, 矛盾.

(iii) 由(ii) 可得. □

定理1.2.3. 有限区间内的任何一个数列$\{a_n\}$ 必有收敛的子序列.

证明 设$M > 0$, 使得$a_n \in [-M, M]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 将$[-M, M]$ 二等分, 让$[b_1, c_1]$ 是$[-M, M]$ 的一半, 使得$[b_1, c_1]$ 中有数列$\{a_n\}$ 的无限多个元. 将$[b_1, c_1]$ 二等分, 让$[b_2, c_2]$ 是$[b_1, c_1]$ 的一半, 使得$[b_2, c_2]$ 中有数列$\{a_n\}$ 的无限多个元. 这样继续下去, 我们得到两个序列$\{b_n\}$ 和$\{c_n\}$. 选$a_{n_k} \in [b_k, c_k]$, 使得$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, $k = 1, 2, \cdots$. 那么, $\{a_{n_k}\}$ 是$\{a_n\}$ 的收敛子序列. □

1.2.2 函数极限

考虑$y = x\sin\frac{1}{x}$ 在$x_0 = 0$ 附近的情况. 为了描述$x = x_0$ 点的情况, 我们引进了函数的极限.

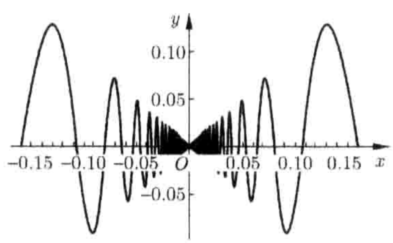


图1.2.1.

如果$x_0 \in (a, b)$, 那么(a, b) 被称为x_0 的一个邻域; $(a, b) \setminus \{x_0\}$ 为x_0 的一个去心邻域.

定义1.2.2. $y = f(x)$ 是函数, A 是一个数, x_0 是一个固定的点, 并且在函数$y = f(x)$ 的定义域内存在x_0 的一个去心邻域. 若对$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$, 那么称当x 趋近于x_0 时, $f(x)$ 的极限为A, 记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

例1.2.2. 证明$y = x\sin\frac{1}{x}$ 在$x \to 0$ 时的极限为0.

证明 对$\forall\epsilon > 0$, 要使$\mid x\sin\frac{1}{x} \mid < \epsilon$, 只要$\mid x \mid < \epsilon$, 取$\delta = \epsilon$ 即可. □

例1.2.3. 证明$y = \frac{x^2-1}{2(x+1)}$ 在$x \to -1$时的极限为-1.

证明 对$\forall\epsilon > 0$, 要使$\mid \frac{x^2-1}{2(x+1)} - (-1) \mid < \epsilon$, 即: $\mid \frac{1}{2}(x+1) \mid < \epsilon$, 只要取$\delta = 2\epsilon$ 即可. □

练习题

1. 求下列极限: