学科案例教学论书系

总主编 王祖浩/夏志芳

中国教师教育课程标准

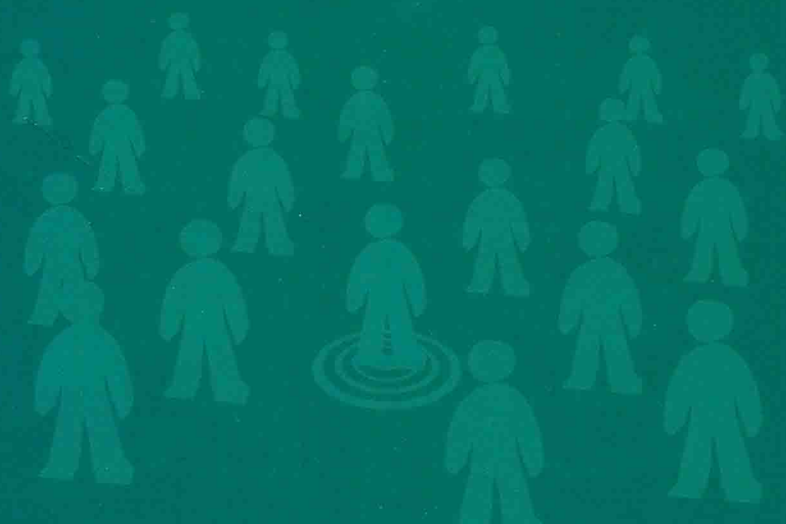
模块教材

数学案例教学论

李士锜 黄兴丰 编著

SHU XUE

ANLI JIAOXUELUN



时代出版传媒股份有限公司

安徽教育出版社

教育部普通高等学校人文社会科学重点研究基地
—— 华东师范大学课程与教学研究所研究成果

数学
案例教学论

李士锜　黄兴丰　编著

时代出版传媒股份有限公司
安 徽 教 育 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

数学案例教学论 / 李士锜，黄兴丰编著. —合肥：安徽教育出版社，2011.12

（学科案例教学论书系）

ISBN 978-7-5336-6444-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①李…②黄… Ⅲ. ①中学数学课—教案（教育） Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 270984 号

书名：**数学案例教学论** 作者：李士锜 黄兴丰

出 版 人：郑 可 策划编辑：杨多文 责任编辑：李福军

责任印制：王 琳 装帧设计：许海波

出版发行：时代出版传媒股份有限公司 http://www.press-mart.com

安徽教育出版社 http://www.ahep.com.cn

（合肥市繁华大道西路 398 号，邮编：230601）

营销部电话：(0551)63683012，63683013

排 版：安徽创艺彩色制版有限责任公司

印 刷：合肥创新印务有限责任公司 电话：(0551)64456946

（如发现印装质量问题，影响阅读，请与印刷厂商联系调换）

开本：720×1000 1/16 印张：16.75 字数：300 千字

版次：2011 年 12 月第 1 版 2014 年 6 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5336-6444-2 定价：39.80 元

序

自21世纪初开始,我国基础教育课程发生了巨大的变革,10年来改革成绩显著,“为学生的发展而教”的理念已深入人心,新的“课程范式”经受了实践的检验,较好地实现了从“应试教育”向“素质教育”的转型,其中教师在课程实施中所起的作用不可低估。布鲁纳强调,“不管我们的教育计划变得多么周密,其中一定要留个重要的位置给教师。因为,归根结底,行动只在那里发生。”“课程即教师”。显然,课程改革的成败归根结底取决于教师。如何让我们的每一位学科教师都能拥有较高的专业素养,不仅能主动地研究新课程,而且能有效地执行新课程,这是需要深入研究的一大问题。

教师的质量是一切教育质量的基础。近年来,指向培养未来教师的高师教育课程体系远落后于基础教育课程改革的需求已成为不争的事实。以“老三门”(教育学、心理学、学科教材教法)为主体的传统的教师教育课程体系存在明显的缺陷,如课程体系相对封闭、课程内容陈旧、知识脱离实践、缺乏方法论指导等。高师的教师教育课程本应是为学生未来从事教师职业所提供的专业基础,但在现实中往往被强硬的“专业学术课程”挤压,学生认为这些“软课程”一知半解就行;教师传授的术语、原理脱离学科教学实际,缺乏方法指导。因此,30年来改革高师教师教育课程的呼声此起彼伏。今天,建立与新基础教育课程接轨的课程结构、课程内容和教学方法,已是当务之急。

“教学在本质上是一种‘学术的专业’(Learned Profession),一种复杂性的智慧工作”(舒尔曼,1986)。包括舒尔曼在内的诸多学者认

为，教师所拥有的教学知识可以分为两类：一种是学科内容的知识，另一种是学科教学法的知识。所谓学科内容的知识，就是所教学科的专业知识。如语文学科中的文学知识、理科中的科学知识、数学学科中的几何学知识等。这些知识是该领域的专家所拥有的知识，亦即专业所固有的知识。但是，教师应当具备的知识决不是这种学科内容的专门化知识，它是必要条件，但不是充分条件。即便拥有了专业学科的深厚知识却没有教学的技艺，作为教师的专业性是不充分的。在这里，更加受到重视的是教学论知识，可以说它是高师教师教育的核心课程。

如果说教育学是高等师范院校最具"师范性"的课程，那么"学科教学论"则是将专业性特征与师范特征相融合的代表性课程。它虽未能承担起培养合格中学教师的全部使命，并且学科自身的体系也有待完善，但它在培养新一代教师教学能力上所起的作用仍是不可低估的。学科教学论的核心是"以实践为目的"的理论设计，关注理论的具体化和操作化，能解决学科教学中的实际问题，并且通过研究中小学教学实践中的问题丰富学科教学的理论。学科教学论的"实践取向"不仅是指在课程结构、课程内容中要加大实践环节的比重，还应改变课程实施以单一的讲授为主的状况，强化学习与实践相结合、教学方法与中小学课堂实践紧密结合思想，倡导以情境创设、典型案例分析、问题解决、经验分享、合作研讨等多种形式的参与式教学，注重培养教师在具体情境中解决问题的能力。

20 世纪 80 年代以来，人们越来越意识到实践在教师教育中的重要作用，不少国家都将"现场经验"与"临床实践"作为教师培养的专门标准提出。正如医生、律师从病例和判例的案例中得到学习一样，教师也必须从教学实践的案例中学习。美国卡内基教育基金会 1986 年出版的报告《准备就绪的国家——21 世纪的教师》中明确指出："应当采用的方法，就是法学和管理学院得到充分发展、但在教师教育中却

几乎陌生的案例分析。提示了大量教学问题的‘案例’教育，应当作为讲授的主要焦点加以开发。”

案例是“关于实践的”，基于真实的教育情境或教学事件，包含有一个或多个疑难问题，同时也可能包含有解决这些问题的方法。优秀的教学案例运用重要的教学两难问题给学生提供替代性经验，通过向学生提供专家型教师思考和处理教学两难问题的模型的方式，增强他们的教育教学技能，并帮助学生明确重大的教育问题，学会从专业的角度进行思考和解决实际教学问题。

在专家型教师思考和解决教学实践问题的案例支持下，学科教学论课程的教学不是“传递经验”“讲解要领”“指导方法”之类的单向训练，而是基于创造性实践的经验和反思的自我形成与相互交流。具体而言，要求通过收集和建构“解决实践问题的策略”而展开的借助案例研究的思路。教师教育不是简单地基于行为主义的能力训练，而是基于认知情境理论的“实践智慧”的发展。此乃教师专业发展的重要途径。

教师知识的研究表明，专业教育、专业发展不能与经验分离，实际情境中所面临的问题往往都非常复杂，而理论知识则往往是单纯的、概括的、简化的。这两者之间无法直接一一对应，教育实践工作者无法把先前所学的知识直接拿来一一应用。理论的作用更多的不是指导实践而是促进实践者反思、提升实践者的反思水平；教师教育的目的应是帮助教师通过新的教育理论来理解、检验和批判性地反思自己的实践性知识，从而改组或改造原有的教育知识结构；职前和在职教师的教育理论教学不能停留在灌输的水平；教师教育不应是呈现一套固定的规则，要求教师照搬，而应提供各种代表性的理论观点及背景和依据，扩展教师的视野，加深他们对教育的理解，从而帮助他们做出更明智的选择，帮助教师丰富和发展他们的个人实践性知识。

由两位国内著名的学科教育专家、华东师范大学博士生导师王祖

浩教授、夏志芳教授主编的“学科案例教学论书系”，尝试借助丰富的学科案例创造性地反映教师教育的规律，力图“自下而上”地揭示学科教学的规律，阐释专家教师的“教学实践智慧”。以实践记录与反思为基础，重视学习者在班级、课堂等实际情境中对教育知识的自我建构，从而提高学习者面对复杂教育教学情境的决策能力和行动能力。

这套书的出版，不仅体现了我国教师教育系统中学科教学论教材内容的创新，弥补了我国教学论研究的不足，更重要的意义还在于直接影响了教师教育的观念和教学方式的变革，这将为我国高等师范培养优秀的未来教师提供更多先行的经验，为探索创新型教师的特质和成长规律开辟新途径。

教育部全国教师教育课程资源专家委员会主任委员
华东师范大学课程与教学研究所名誉所长
华东师范大学终身教授、博士生导师
钟启泉
2011 年 5 月

前　言

近日观摩了一堂小学数学公开课——认识单位分数。教师和学生在课前都预先准备好了一张 A4 纸。课堂上，师生把纸的大小看成单位 1，然后通过折纸很快认识了$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$等单位分数。课堂的氛围和效果看起来都很好，听课的教师都觉得课上得很成功。有好事者，在课间拿了张 B5 纸，跑去问学生，两张纸都可以折出$\frac{1}{2}$，那为什么表示它们的大小却不一样呢？一连问了几个学生，无人能解其中缘由。

这样的一则案例，可以引出许多问题的讨论。比如，关于数学的意义——单位分数的本质是什么？关于教学的反思——这样的教学策略是否真正有效？关于学习的问题——学生认识分数的困难在哪里？借助类似的案例思考数学教学中的问题，其长处是显而易见的。它不仅内容鲜活生动，源于现实，而且可以在现实情境中把数学与教学法知识有机的整合在一起，有利于促进教师形成舒尔曼所强调的教师核心知识——学科教学知识(Pedagogical Content Knowledge)。

本书的编写，正是在这样的思考下形成的。我们以案例为先导，引出讨论的话题，再展开分析、总结和提炼。事实上，"案例"，在我国的数学教育界已经不再是一个新的名词，十来年前就开始流行。案例的方法，作为教师培训的一种新视角，已经为大家接受和重视。本书出版的目的，是想继续倡导这种教师培训的新模式，提升数学教师培训的效果，引导未来和在职教师学习和理解数学教学理论，培养他们对教学实践的反思能力，改进教学。

本书一共七章。第一章围绕课程改革的热门话题展开，涉及了许多争论的话题，如既然提倡探究式学习，是否还要接受性学习。第二

章关注具体数学内容的教学，比如，在数学概念教学中，分别讨论了代数、几何和概率概念的特征以及相应的教学策略等。第三章介绍课程教学改革前后的数学教学模式，比如有以前的自学辅导教学模式，青浦教学模式，现在的数学情境教学模式等。第四章探讨了对数学思想方法的基本认识，及其相应的教学策略和教学途径。第五章是数学课堂教学评价，分两个部分讨论：第一是评价的过程，强调了教师的共同参与；第二是评价的核心，包括教师对数学概念的理解，问题解决的能力等方面。第六章涉及数学教育技术的问题，介绍了代数、几何以及概率统计教学中信息技术的使用方法和意义。另附了第七章，是师范生的一些习作——数学教育故事，短小精悍，从特有的视角，蕴涵了耐人寻味的教育意义。

参与本书讨论和编写的成员还有华南师范大学的苏洪雨博士（第一章），华东师范大学在读的硕士研究生金敏老师（第三章），河北师范大学的陈雪梅博士（第四章），南通大学的钟志华博士（第四章），江苏省常熟中学的胡慧敏老师（第五章），华东师范大学在读的博士研究生袁智强老师（第六章），和常熟理工学院的田中老师（第七章）。在此，向他们的努力和支持表示衷心的感谢！在本书中，我们也引用了许多教师的课堂实录、教学设计和案例点评等，在此也一并表示诚挚的谢意。

编者

2010 年 10 月

目 录 Contents

第一章　数学课程理念

课堂教学是实践中的课程，兰珀特(Lampert)认为，在教学中，教师的实践同时建立了教师与学生，教师与教学内容，教师与“学生—教学内容”的三个联系. ① 在这些复杂关系中，教师处于核心的地位，教师的行为最终决定了课堂里会发生什么. 在课堂上教师不仅要关注学生、教学内容，更困难和更重要的是，要及时有效地对“学生——教学内容”的动态过程进行调控. 然而，课堂里究竟会发生什么，一般总是事先难于意料的，因此有效的调控，主要依赖于教师的临场应变，取决于教师的教学理念和经验智慧. 因此，对于教师而言，把握数学课程的基本理念，对于新课程的改革至关重要. 假如教师狭隘地把数学课程当作考试的指导纲要，那么他可能将“应试”作为其教学的主要目的. 如果教师把数学课程看做是“促进学生全面、持续、和谐地发展，培养公民素质的基础课程”，那么培养学生的数学素养，提高学生的整体素质，可能是他贯彻始终的目标.

［**开篇案例**］

独角戏

这是一节关于不等式及其性质的教学课.

首先，教师给出例子，比较代数式的大小. 如：

例 1　比较$(a+3)(a-5)$和$(a+2)(a-4)$的大小；

例 2　已知 $2x+4y=1$，问 x^2+y^2 与$\frac{1}{20}$的大小关系.

教师在黑板上开始示范解答例 1：我们可以考虑，把它们相减.

$$\begin{aligned}\text{因为}\quad &(a+3)(a-5)-(a+2)(a-4)\\&=(a^2-2a-15)-(a^2-2a-8)\\&=-7<0,\end{aligned}$$

① Lampert M. Teaching Problems and the Problems of Teaching. New Haven: Yale University Press, 2003

所以　$(a+3)(a-5)<(a+2)(a-4)$.

接着,教师总结比较大小的一般方法:作差——恒等变形——判断符号——得出结论.他的语速比较缓慢,声音柔和.在此基础上,他又解答了例2,教师依然作差——变形——…偶尔,教师会这样问,“这个是多少?”,“刚好吧?”不过,大都是自问自答.有时,全班学生会“填空式”简单地回应教师的问话,“对的”,“是的”……整个课堂气氛凝重.对于有些例题,教师也会让学生先自己动手做,但是他从不走进学生中间,查看他们的解题过程,和他们一起探讨,或者个别指导出现困难的学生.

立华是个爱思考的学生,在教师布置解题后,他并没有马上动手,而是和同桌小薇轻声讨论起来.立华问:“为了比较两个代数式的大小,能不能先取定字母的特殊值,比如在例1中取 $a=0$,那么很容易发现前者的代数式值要比后者小.为什么一定要做差比较呢?”小薇摇摇头,觉得这样似乎不妥,不过她也有新的想法:“在例1中的两个代数式都可以对应到抛物线,从图像特征上来看,后者可以通过前者向上平移得到,这样可以说明两者的大小关系吗?”“对呀!我怎么没想到!例2中的 x^2+y^2 在 $2x+4y=1$ 的条件下可以看成一个二次函数,求出它的最值,也可以与 $\frac{1}{20}$ 比较大小关系?”这时,教师开始讲课了,立华和小薇的讨论不得不停下来.

从整个教学来看,教师完成了一节“独角戏”式的课堂教学,而学生大都是观众,偶尔师生之间的交流也是形式化的,学生并没有积极参与到课堂教学中来.难道教师讲授的内容真的不值得和学生探讨交流吗?其实,学生的想法会很多,只是教师没有给予学生必要的机会罢了.“独角戏”展现的只是教师的表演,真的不知道在课堂结束之后,究竟可以给学生留下什么.

那么在课堂上,教师的角色如何转变?如何让学生体验学习的过程?在本章,我们将结合具体的数学教学案例,分析新课程的基本理念、教师的作用、学生的学习方式、课堂活动以及数学内容的组织.

第一节　课程标准:“过程与结果二分,还是整合”

[**核心问题**]

《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》的理念指出,课程内容既要反映

社会的需要、数学学科的特征，也要符合学生的认知规律. 它不仅包括数学的结论，也应包括数学结论的形成过程和数学思想方法. 课程内容要贴近学生的生活，有利于学生体验、思考与探索. 内容的组织要处理好过程与结果的关系，直观与抽象的关系，生活化、情境化与知识系统性的关系. 同时，《普通高中数学课程标准(实验)》也指出，学生的数学学习活动不应只限于接受、记忆、模仿和练习，高中数学课程还倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式. 这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程. 两者都对于数学知识“过程与结果”的关系提出了看法，也就是说既要注重数学的结论，也要重视数学结论形成的过程，学生要从接受学习的模式转变为积极主动、勇于探索的方式. 那么在教学实践中，我们如何把握数学知识“过程与结果”的关系？二者如何合理地进行整合？

［**案例导读**］

1. 在数学的历史中，用字母表示数经历了怎样的发展阶段？在数学课程中，字母表示数具有哪些重要的意义？

2. 在数学知识形成过程中，教师应当扮演怎样的角色？教师应当如何处理数学知识“过程”和“结果”之间的关系？

［**案例呈现**］

字母表示数[①]

教师问：“搭 1 个正方形需 4 根火柴棒，那么，接连相邻搭 2 个正方形需几根火柴棒？”话没讲完，下面已有学生小声报出答案：7 根. 教师装作没听见，继续问：“那么搭 3 个又需几根火柴棒呢？下面请大家先想一想，不妨用火柴棒拼一拼，来解决这个问题.”

于是每个学生兴致盎然地拿出课前准备的火柴棒进行实际操作. 一会儿，教师看大家都思考得差不多了，于是又问：“哪个同学来回答？”学生纷纷举手，班上回答问题最踊跃的学生刘宇边举手边站起来说：“我来，我来”. 教师不禁一笑，说：“好，你来，你是用什么方法来解决这个问题的.”刘宇一脸自信：“那还不简单，摆出来一数就出来了，第一个空的答案是 7 根，第二个空的答案是 10 根.”

---

① 数学课程标准研制组. 走进课堂——初中数学新课程案例与评析. 北京：高等教育出版社，2004

“嗯，很好.”教师接着又问：“除了这种方法，有没有哪个同学是用其他方法来解决的.”明显地，举手的学生寥寥无几了. 于是教师叫王慧起来回答，“我认为搭第一个正方形需要4根火柴棒，而搭第二个正方形时，增加了3根，$4+3=7$，所以第一空填7根. 而搭第三个时，又增加了3根，$7+3=10$，所以第二个空填10根.”

“那么搭10个，100个，x个正方形需要几根火柴棒？”教师问道. 没一个学生吭声. 略微停顿后，教师说：“如果我像刘宇同学一样把它们一一摆出来，再去数一数，不就成了.”大家哄堂大笑，都摇头说：“不行，不行.”教师无奈地一摆手说：“那怎么办呢？”此时，学生都沉浸在思考之中.

“刚才王慧用的是不同于刘宇的方法，也解决了第一问，那么她的做法能不能给我们以启发呢？”学生眼睛一亮说：“能”.“王慧又是通过什么方法解决问题的呢？”教师又问. 此时不少人纷纷举手，陈峰站起来说：“王慧是通过寻找规律的方法来解决问题的.”“很好，下面大家试试看，能否发现某种规律，来解决这三个问题.”

教师先让学生独立思考一段时间，再分小组讨论交流，并要求他们每个小组要指定两个人，一个做好记录，另一个代表小组回答问题. 教师留出充分的时间给予学生操作、思考，表达与交流. 这时，课堂气氛很活跃，由于学生真正成了课堂的主体，所以每个学生的积极性非常高，最后到了学生给出各自答案的时候了. 教师先让学生说，然后根据学生所说在黑板上画出相应的图解，接下来由学生按自己发现的规律叙述得出的结果，同时教师在黑板上列出相应的算式. 在教师的引导下学生不知不觉地由具体数字表示过渡到了一般符号表示.

[**案例分析**]

从具体数字到字母的一般化表示，是学生从算术思维向代数思维过渡的重要一步. 在这个案例中，教师首先提出具体的问题，让学生动手操作，初步形成了两种不同的解决方法——数数和寻找规律. 在此基础上，教师又提出了三个问题“那么搭10个，100个，x个正方形需要几根火柴棒？”，促进学生对已有解决问题方法的比较和反思. 虽然，这个问题对学生而言是具有挑战性的，但是在教师的不断启发和引导之下，课堂开始转入探究规律的小组活动. 由于教师给予了学生充分的探究时间，以及学生之间的相互合作和交流，全班学生最终采用了多种方法解决了教师提出的问题，成功地使用字母表示了蕴涵其中的数量关系. 显然，在这堂课，学生经历了整个过程，而不是简单地被动接受结果.

从代数学发展的历史来看，用字母表示数也是一个长期的过程. 内塞尔曼

(Nesselmann)把代数学符号化的历史过程划分为三个阶段，第一个阶段是文字表示的代数学，其中问题的解法完全用文字来叙述，而没有任何简写和符号. 第二个阶段是简写的代数学，其中采用速记式的简写来表示一些经常出现的量、关系和运算. 最后一个阶段是符号代数学，这时问题的解法大都是用数学速记法来表达，其中采用的各种符号同它们所表示的实际内容和思想几乎没有什么明显的联系. ①

在数学课程中，字母可以用来表示一般意义的数，比如正方形的周长是 a 厘米等. 在方程中表示未知数. 也可以表示一些特殊的已知量，如π^2. 最重要的是可以代表变量，比如，函数中的自变量. ② 特别是，要求学生用字母表示具体情境中的数量关系，即要求学生在变化中，概括出不变的规律和法则——蕴含了函数的思想和方法，对刚刚开始学习代数的学生而言，具有一定的难度. 我们认为，最恰当的方法就是让学生经历和体验这个过程. 否则，如果在教学中，教师把"字母表示数"的观念强加于学生，学生也许能接受这样的结论，但学生的学习是机械的，被动的.

[观点提炼]

数学教学是直接传授知识，还是帮助学生通过"做数学"、"用数学"来理解数学，体验数学呢?

也许有些教师还是习惯于直接讲授. 可能有两种情况，第一，教师的观念，他们认为讲的越多，学生就学得越多，把学生当成了"盛水的瓶子"，忽视了学生的积极性和互动性. 第二，教师尽管认识到学生自主学习的重要性，但是实际操作往往比较困难，对教师课堂驾驭能力的要求很高，相比而言，不如直接讲授更加方便. 教师精辟的讲解和恰到好处的释疑对数学教学来说，无疑是十分重要的，不能一并否定. 甚至，有些抽象的数学内容要更多地依赖教师的讲解，比如，无理数指数幂的概念. 不过，我们也应当清楚地认识到，无论是教师讲授，还是学生探究，归根到底都要落实到有利于学生积极主动的学习和发展他们的能力上来——"教就是为了不教". 建构主义的教学观强调，教师哪怕给予学生再多的数学知识，也不如他们在亲历"用数学"和"做数学"中获得的体验来得重要.

当前的课程改革积极倡导教学由重"结果"向重"过程"转变，试图改变过去

---

① [美]H·伊夫斯. 数学史上的里程碑. 北京:北京科学技术出版社，1990

② 李士锜. PME:数学教育心理. 上海:华东师范大学出版社，2001

重“结果”、轻“过程”的做法，这对于发展学生的数学能力无疑具有积极的作用. 教学重在“过程”也已经开始成为大家的共识.

然而，过于片面和极端的认识也随即而来. 有人认为“数学知识”已经不重要，重要的只是获取知识的方法. 否则，就是限制了学生学习的主动性，就会染上“只重结果，不重过程”的“罪名”. 还有一些人，则把气氛异常活跃，哪怕没有数学内涵的课照样称作为“新课程”改革的示例.

注重过程的学习，也绝不能淡化数学知识本身的掌握. 我们不妨再看一个教学案例，也许对我们会有更多的启迪.

正弦定理①

师：上节课布置给大家的思考题，不知道完成得怎么样？谁能简要地说说探索过程和结论？

（多媒体投影上节课的思考题）

思考：(1)在顶角 $A=120^\circ$ 的等腰△ABC 中，若 $a=2\sqrt{3}$，则△ABC 的边角之间有什么关系吗？

(2)在 $C=90^\circ$ 的△ABC 中，上述关系是否也成立？

(3)请你任意画一个三角形，测量出边长和角度，再验证这个关系是否还成立.

生 1：在第(1)题中，可求出等腰三角形的腰长 $b=c=2$，于是有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=4$. 在第(2)题中，由于 $\sin A=\frac{a}{c}$，$\sin B=\frac{b}{c}$，$\sin C=1=\frac{c}{c}$，所以也有 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. 在第(3)题中，我任意画了一个△$ABC$，量得 $a=6.0$ cm，$b=5.0$ cm，$c=4.4$ cm，$A=80^\circ$，$B=54^\circ$，$C=46^\circ$. 于是计算出 $\frac{a}{\sin A}\approx6.10$，$\frac{b}{\sin B}\approx6.18$，$\frac{c}{\sin C}\approx6.12$. 由于精确度问题，我估计 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 仍然成立.

生 2：我的结论与他相同. 在第(3)题中我画了一个钝角三角形，量得 $a=6$ cm，$b=3$ cm，$c=3.8$ cm，$A=122^\circ$，$B=26^\circ$，$C=32^\circ$，通过计算也近似得到 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，所以我猜测如果没有测量和计算误差的影响，上面的关系一定

---

① 张健. 数学知识形成过程的教学策略及其案例分析. 中国数学教育，2009(10)：19—22