普通高等教育“十二五”规划教材
PUTONG GAODENG JIAOYU "12·5" GUIHUA JIAOCAI

高等数学

（留学生版）

陈学慧　王丹龄　编

冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

（留学生版）

陈学慧　王丹龄　编

北京
冶金工业出版社
2015

内容提要

本书根据对留学生“高等数学”课程的教学要求及作者多年的教学实践编写而成，在内容安排上适当降低理论深度，增加基础知识的介绍。主要内容安排分成两部分，第一部分包括一元函数微积分学和常微分方程，在微积分基本概念、基本理论和方法的基础上，着重于数学分析基本思维方法的训练；第二部分包括向量代数、解析几何、多元函数微积分、微分方程和无穷级数，所讨论的空间由一维推广到 n 维，加强了向量在 n 维空间有关概念和理论中的计算和应用，内容更趋符合留学生的学习要求。

本书可作为高等学校留学生“高等数学”课程的教材或教学参考书，也可供高等院校文科类专业学生学习使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(留学生版)/陈学慧，王丹龄编.—北京：冶金工业出版社，2015.5

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5024-6926-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①陈…　②王…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 095375 号

出 版 人　谭学余
地　　址　北京市东城区嵩祝院北巷 39 号　邮编　100009　电话　(010)64027926
网　　址　www.cnmip.com.cn　电子信箱　yjcbs@cnmip.com.cn
责任编辑　赵亚敏　美术编辑　吕欣童　版式设计　孙跃红
责任校对　石　静　责任印制　李玉山
ISBN 978-7-5024-6926-9
冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；三河市双峰印刷装订有限公司印刷
2015 年 5 月第 1 版，2015 年 5 月第 1 次印刷
787mm×1092mm　1/16；17 印张；409 千字；259 页
43.00 元

冶金工业出版社　投稿电话　(010)64027932　投稿信箱　tougao@cnmip.com.cn
冶金工业出版社营销中心　电话　(010)64044283　传真　(010)64027893
冶金书店　地址　北京市东四西大街 46 号(100010)　电话　(010)65289081(兼传真)
冶金工业出版社天猫旗舰店　yjgycbs.tmall.com

前　　言

留学生教育是人才培养的重要组成部分，教学工作是留学生教育工作的重中之重，教学水平的高低与我国留学生教育事业的发展以及国际声誉等息息相关。留学生“高等数学”课程教学在留学生培养过程中发挥着极其重要的作用，是高等院校数学教学工作的一个重要组成部分。相对而言，留学生数学教学起步较晚，基础较弱，加上生源国不同造成的种种差异，使得教学过程中出现了一些亟待解决的问题。

“高等数学”是工科院校留学生教学计划中必不可少的一门主干基础课，它是留学生掌握数学工具的主要课程，是培养理性思维的主要载体，是学生接受数学美感熏陶的一种途径。编者根据教学实践中所积累的经验，吸取了广大教师的宝贵意见，在现有留学生高等数学教材的基础上，对教学内容进行调整和重组，编写了这本教材。本书具有以下特色：

第一，适合留学生使用。本书以“加强基础，强调应用”为原则，以“必需、够用”为度，每章内容以知识结构框图引出，以例题讲解结束，符合留学生学习知识的心理认知规律，利于学生形成完整的知识框架，进一步掌握所学知识。

第二，重视基本能力的培养。本书的例题、习题较多，解题分析较为深入，旨在让学生在反复求解的过程中，对基本概念有更深层次的理解，同时能够熟悉运算过程，精通解题技巧，掌握数学分析基本思维方法，从而为灵活运用知识奠定基础。

第三，适当安排了实际应用的内容。本书部分章节安排了来自客观世界的例题，比如物理、经济管理领域和日常生活中的一些问题。旨在激发学生学习数学的兴趣，引导学生发现问题并提高利用数学知识解决实际问题的能力。

本书共10章，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与向量代数、二元函数微积分、无穷级

数和微分方程。本书第1、2、3、9、10章由陈学慧编写，第4、5、6、7、8章由王丹龄编写。陈学慧负责本书的策划、统稿和最终定稿工作。另外，本书在编写过程中得到了北京科技大学胡志兴教授、朱婧副教授和李晔老师等的大力支持和帮助。本教材已经列入北京科技大学校级“十二五”规划教材，教材的编写得到了北京科技大学教材建设基金的资助，对此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有缺点和错误，敬请广大读者批评指正。

编 者

2015年2月

目　录

1 函　　数

微积分是高等数学的基本内容,是研究自然和社会规律的重要工具,它不仅在经济领域中有着直接的应用,而且也是学习其他经济数学知识的基础. 微积分的主要研究对象是函数,本章我们将在已有知识的基础上,复习和介绍集合、函数的相关知识,并作适当延伸.

本章知识结构导图:

- 函数
  - 集合
  - 实数集
  - 函数的概念及基本性质
    - 函数概念
    - 函数的基本性质
      - 有界性
      - 单调性
      - 奇偶性
      - 周期性
    - 分段函数
    - 反函数
  - 初等函数
    - 基本初等函数
    - 复合函数
  - 函数关系的建立

1.1　函数的概念和基本性质

1.1.1　集合

“集合”是数学中的一个基本概念,在数学领域,它具有无可比拟的特殊重要性. 最简单的说法,我们常常研究某些事物组成的集体,例如,一班学生、一束鲜花、一盒粉笔、所有正整数,等等,这些由某类特定事物组成的集体都是**集合**.

一般来说,具有某种共同属性的事物的全体称为**集合**. 集合中的事物称为该集合的**元素**.

下面列举几个例子,来理解集合的概念,请具体说出下面集合的元素.

例 1.1.1　教室内所有的学生.

解:教室内的每一个学生是这个集合的元素.

例 1.1.2　全体偶数.

解:每一个偶数是该集合的元素.

例 1.1.3 方程 $x^2+3x+2=0$ 的根.

解: -1, -2 是这个集合的元素.

由有限个元素构成的集合,称为**有限集合**,如例 1.1.1、例 1.1.3;由无限个元素构成的集合,称为**无限集合**,如例 1.1.2.

集合中的元素有三个特征:

确定性:集合中的元素是确定的.

例如:某班高的同学,因为不知道什么范围才算高,所以某班高的同学不能算是一个集合.

互异性:集合中的元素互不相同.

例如集合 $A=\{1,a,2\}$, 则 a 不能等于 1 和 2.

无序性:集合中的元素没有先后之分.

例如$\{1,3\}$与$\{3,1\}$是同一个集合.

通常,我们用大写字母 A、B、M、N、X、Y 等表示集合,用小写字母 a、b、m、n、x、y 等表示集合中的元素. 我们通常用 $\mathbf{R}$ 表示实数集,用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集,用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集,用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集.

给定一个集合 A,如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a\in A$, 读作"a 属于 A";如果 a 不是 A 中的元素,则记作 $a\notin A$, 读作"a 不属于 A".

集合的表示方法有两种:

(1)列举法:把集合中的元素一一列举出来,中间用逗号隔开.

例 1.1.4 由方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合可表示为

$$A=\{1,-1\}$$

例 1.1.5 自然数集 $\mathbf{N}$ 可以记作

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

例 1.1.6 所有大于 0 且小于 10 的奇数组成的集合可表示为

$$A=\{1,3,5,7,9\}$$

(2)描述法:用确定的条件表示某些对象是否属于这个集合的方法.

例 1.1.7 设 A 为方程 $x^2+3x+2=0$ 的根构成的集合,则 A 可表示为

$$A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$$

例 1.1.8 设 A 为全体奇数的集合,则 A 可表示为

$$A=\{x\mid x=2n+1,n\text{ 为整数}\}$$

集合以及集合间的关系可以用图形来表示,称为**文氏图**. 文氏图是用一个平面区域来表示一个集合,如图 1.1 所示. 集合内的元素以区域内的点来表示.

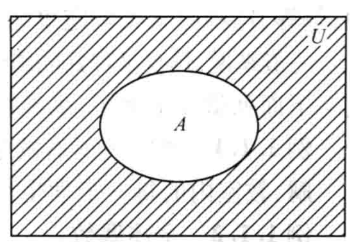

图 1.1

一般的,如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为**全集**,通常记作 U.

一般的,不包含任何元素的集合为**空集**,记作$\varnothing$.

例 1.1.9 集合 $\{x\mid x>3 \text{ 且 } x<2\}$ 是个空集.

定义 1.1.1 对于两个集合 A 与 B,若所有属于 A 的元

素都属于 B,我们就说 A 是 B 的**子集**. 即"如果 $a \in A$, 则 $a \in B$", 则称 A 为 B 的子集. 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$, 读作" A 包含于 B"或"B 包含 A",如图 1.2 所示.

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 和集合 B 相等,记作 $A = B$, 它表示集合 A 和 B 中的元素完全相同.

例 1.1.10　设 $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{3,5\}$ 则

$$B \subset A$$

例 1.1.11　设集合 $A = \{x \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$ 和集合 $B = \{-1, -2\}$, 则

$$A = B$$

定义 1.1.2　所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,称作 A 和 B 的**并集**,记作 $A \cup B$(或 $B \cup A$),读作"A 并 B"(或"B 并 A"),即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$(如图 1.3 的阴影部分).

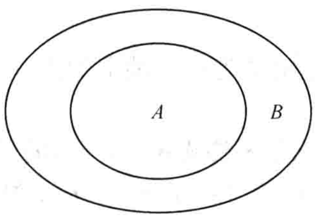

图 1.2

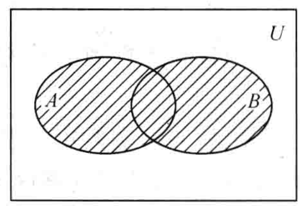

图 1.3

定义 1.1.3　所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,称作 A 和 B 的**交集**,记作 $A \cap B$(或 $B \cap A$),读作"A 交 B"(或"B 交 A"),即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$(如图 1.4 的阴影部分).

定义 1.1.4　设有集合 A 和 B,属于 A 而不属于 B 的所有元素构成的集合,称为 A 与 B 的**差**,记为 $A - B$, 即 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$(如图 1.5 的阴影部分).

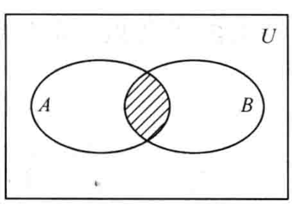

图 1.4

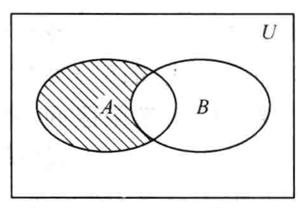

图 1.5

例 1.1.12　设 $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{3,5\}$ 则

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

$$B \cap A = \{3,5\}$$

$$A - B = \{1,2,4\}$$

例 1.1.13　设 A 为某班来自欧洲的学生的集合, B 为该班来自英国的学生的集合,则 $B \cup A$ 表示该班来自欧洲的同学的集合;

$A \cap B$ 表示该班来自英国的同学的集合；

$A - B$ 表示该班来自除了英国以外的欧洲国家的同学的集合.

定义 1.1.5 全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的**补集**，记为 $\bar{A}$，如图 1.6 的阴影部分.

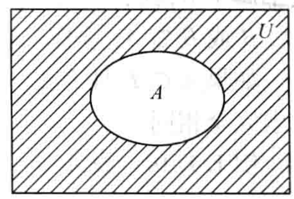

图 1.6

例 1.1.14 设参加考试的学生的全集为 U，如果 A 表示及格的学生，则 $\bar{A}$ 表示不及格的学生.

集合运算律：

(1)交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2)结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3)分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

1.1.2 实数集

实数是有理数和无理数的总称. 数学上，实数直观地定义为和数轴上的点一一对应的数.

区间是常用的一类实数集. 设 a,b 为实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的**开区间**，记作 (a,b)，即 $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$，如图 1.7 所示.

满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的**闭区间**，记作 $[a,b]$，如图 1.8 所示.

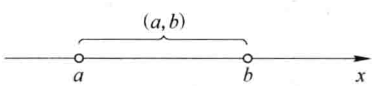

图 1.7

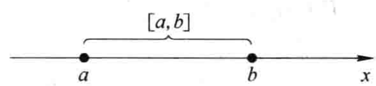

图 1.8

满足不等式 $a < x \leqslant b$(或 $a \leqslant x < b$) 的所有实数 x 的集合，称为以 a,b 为端点的**半开区间**，记作 $(a,b]$(或$[a,b)$) 如图 1.9 所示.

以上三类区间为**有限区间**，有限区间的右端点 b 和左端点 a 的差 $b-a$ 称为**区间的长度**. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段.

还有下面几类无限区间：$[a, +\infty)$ 表示不小于 a 的实数的全体，也可记为 $a \leqslant x < +\infty$；$(-\infty, a)$ 表示小于 a 的实数的全体，也可记为 $-\infty < x < a$；$(-\infty, +\infty)$ 表示全体实数，也可记为 $-\infty < x < +\infty$.

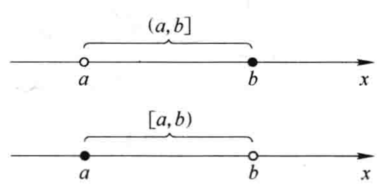

图 1.9

注意：其中 $-\infty$和 $+\infty$，分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅仅是记号.

定义 1.1.6 设 x_0 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$. 满足不等式 $|x - x_0| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 x_0 的 **δ 邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为此邻域的**中心**，δ 称为此邻域的**半径**，即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

在数轴上，$U(x_0,\delta)$ 表示以 x_0 为对称中心，以 δ 为半径画出的开区间，如图 1.10 所示. 常用的还有点 x_0 的空心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$（见图 1.11），即

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

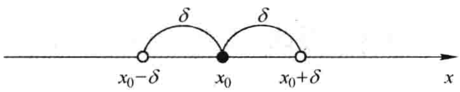

图 1.10

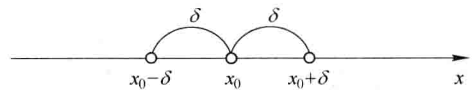

图 1.11

1.1.3 函数概念

1.1.3.1 函数定义

在对自然现象与社会现象的观察和研究过程中，人们会遇到各种各样的量，在某个问题的研究过程中保持不变的量称为**常量**，可以取不同数值的量称为**变量**. 例如：一个学校的面积是常量，每天到学校的人数是变量.

在同一个问题研究中，常常同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 下面我们就来探索一下变量之间的相互关系.

例 1.1.15 如图 1.12 所示，一枚炮弹发射后，经过 26s 落到地面击中目标，炮弹的射高为 845m，且炮弹距地面的高度时间的变化规律为 $h = 130t - 5t^2\,(0 \leqslant t \leqslant 26)$. 当时间 t 取定一个数值时，由上式可以确定炮弹的高度 h 的数值.

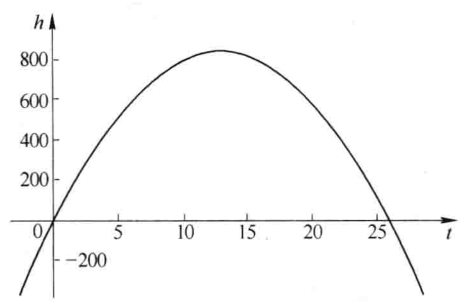

图 1.12

例 1.1.16 当圆的半径 r 变化时，圆的周长 l 也跟着变化. 这两个变量之间的关系为 $l = 2\pi r$，$0 < r < +\infty$. 其中，π 是圆周率，是常量. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内取定一个数值时，由上式可以确定圆的周长 l 的相应数值.

上述例子都描述了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应法则，根据这一对应法则，当其中一个变量在其范围内取定任一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系正是函数概念的实质.

定义 1.1.7 若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使得每一个 $x \in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个**函数关系**，或称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y = f(x), x \in D$.

习惯上我们称此函数关系中的 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

集合 D 称为函数的**定义域**，也可以记作 $D(f)$.

若 $x_0 \in D$，则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有定义.

x_0 所对应的 y 值，记作 y_0 或者 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$，称为当 $x = x_0$ 时，函数 $y = f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x)\}, x \in D$，称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**，记作 Z.

函数的定义域 D、值域 Z 和对应法则 f 是一个函数的三个要素.

关于函数定义的几点说明:

(1)函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号 f 也可以改用其他字母,例如“φ”,“ψ”,“F”,等等.这时函数就记为 $y=\varphi(x)$,$y=\psi(x)$,$y=F(x)$,等等.有时也可直接记作 $y=y(x)$.

(2)定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个主要因素.因此,某两个函数相同,是指它们有相同的定义域和对应法则.

两个相同的函数,其对应法则的表达形式可能不同,如函数 $y=|x|$,$x\in\mathbf{R}$ 和 $y=\sqrt{x^2}$,$x\in\mathbf{R}$ 是两个相同的函数,但其对应法则的表达形式不同.

两个相同的函数,其变量的表示符号也可能不同,如函数 $y=\sin x$,$x\in\mathbf{R}$ 和 $u=\sin v$,$v\in\mathbf{R}$ 是两个相同的函数,但其自变量和因变量采用了不同的表示符号.

(3)在函数定义中,对每一个 $x\in D$,若只有唯一的一个 y 与之对应,则这样的函数称为**单值函数**;若同一个 x 值可以对应多于一个的 y 值,则称这种函数为**多值函数**.例如,函数 $y=\dfrac{\pm\sqrt{x^2+4}}{2}$,$x\in\mathbf{R}$,是多值函数.在本书中,如没有特殊说明,指的都是单值函数.

(4)用公式法表达的函数关系,在前面所遇到的函数中,他们的对应规则都是因变量用自变量的一个数学表达式表示出来的,如 $y=x^2$,$y=\sqrt{25-x^2}$,$y=\dfrac{1}{x}$ 等等,这些函数都称为**显函数**;而有些函数,他们的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的,称为**隐函数**,如 $xy=1$,$x^2+y^2=25$,等等.

1.1.3.2 函数的表示法

常用的函数表示方法有三种,即解析法、图像法、列表法.

(1)**解析法**(或称**公式法**).用代数式表达一个函数关系的方法称为**解析法**,上述思考案例中,函数 $h=130t-5t^2$ 是以解析式刻画函数之间的变量关系.

有些函数,对于其定义域内自变量不同的值,其对应规则不能用一个统一的数学表达式表达,需要两个或两个以上的式子表达,但它表示的是一个函数而不是几个函数.

例 1.1.17 取整函数

$$y=[x]$$

记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,例如,$[0.3]=0$,$[2.5]=2$,$[-2.5]=-3$.

取整函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.其图像如图 1.13 所示.

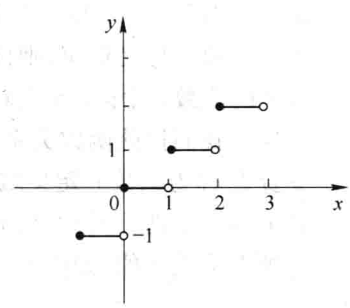

图 1.13

例 1.1.18 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$,$x\in R$.

(2)**列表法**.用一个表格来表达一个函数关系的方法称为列表法,如表 1.1 所示.