概率论与数理统计

主编 张好治 王 健

科学出版社

概率论与数理统计

主 编 张好治 王 健
副主编 袁冬梅 李冬梅

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书分两部分:第 1～5 章为概率论部分,包括随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理;第 6～9 章为数理统计部分,包括数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析. 每章配有难易适中的习题,书末附有习题参考答案.

本书通俗易懂、适应性广泛,可作为高等学校非数学类专业概率论与数理统计课程的教材以及考研和自学的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张好治,王健主编. —北京:科学出版社,2014.6
ISBN 978-7-03-041206-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… ②王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 128324 号

责任编辑:石 悦 李梦华 / 责任校对:朱光兰
责任印制:赵 博 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 1/16
2015 年 8 月第三次印刷 印张:16
字数:322 000

定价:33.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

本书编委会

主　编　张好治　王　健

副主编　袁冬梅　李冬梅

编　者　(按姓氏笔画排序)

于家举　王　健　王　萍

王忠锐　王敏会　王殿坤

尹晓翠　孙金领　李冬梅

李桂玲　张好治　陈秀荣

袁冬梅　程　冰

前　　言

概率论与数理统计是专门研究随机问题的一门学科，基于现代社会中自然科学、社会科学和工程技术等各领域随机问题存在的广泛性以及大量应用，概率论与数理统计被列为高等学校理工科类、农科类以及经济管理类等各专业的一门重要基础课，根据教育部大学数学课程教学指导委员会最新修订的各科类数学基础课程教学基本要求，我们结合 20 多年的教学实践经验，编写了本书. 针对随机问题解决的抽象性和复杂性，本书力求严谨性与趣味性、灵活性相结合，通过基本理论和基本概念的介绍，循序渐进地导入随机问题处理的基本规律和方法，注重学生的基本素养和应用能力的培养和提高. 本书在如下几个方面做了努力.

(1)从通俗易懂的实际例子入手，引入基本概念和介绍基本方法，对一些抽象的内容多以实际例子做直观说明，淡化一些定理和性质的证明. 在表述上尽量保持数学学科本身的严谨性和系统性，重点强调和突出有关理论和方法在各方面的应用.

(2)在内容选取上充分考虑非数学类各专业对概率论与数理统计知识的需求，尽量保持概率论与数理统计学科知识的系统性、通用性. 对一些较深入的知识，留给有需求时的后续课程学习.

(3)考虑到应用的广泛性，我们注意举例选择的多样性. 例题与习题的选择涉及工业、农业、经济管理、医药、商业和保险等领域. 这样既可以突出学科应用的广泛性，也可以提高学生处理不同领域随机问题的应用能力.

本书由青岛农业大学张好治教授、山东理工大学王健教授主编，适合非数学类各专业使用. 全书内容大约需要讲授 60 学时. 对不需要讲授数理统计知识的专业，可只讲授前 5 章概率论部分的内容，这部分内容可在 32～36 学时讲授完.

在本书的编写过程中，得到了科学出版社和兄弟院校的大力支持，对本书质量的提高起到了重要作用，对此我们深表感谢. 由于我们水平有限，本书的疏漏和不足恳请各位读者批评指正.

编　者

2014 年 2 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律的一门学科，是近代数学的重要组成部分. 概率论是随机数学的理论基础. 本章将介绍事件之间的关系及其运算，概率的定义与性质，以及古典概型、几何概型、全概率公式、贝叶斯公式、二项概率公式等计算方法，这些都是我们学习概率论与数理统计的基础.

随机事件在一次试验中发生与否带有不确定性. 但在大量重复实验中，这些无法准确预测的现象并非杂乱无章的，而是存在着某种规律，我们称这种规律为随机现象的统计规律. 概率论与数理统计的理论和方法在物理学、医学、生物学等学科以及农业、工业、国防和国民经济等方面具有极广泛的应用.

1.1　随机事件与样本空间

1.1.1　随机现象和确定性现象

人们在生产活动、社会实践和科学试验中所遇到的自然现象和社会现象大体分为两类：一类是确定性现象，是事先可预知的，即在一定条件下必然发生某种结果的现象. 例如，每天早晨太阳从东方升起；在标准大气压下，水加热到 100℃ 时会沸腾；竖直向上抛一重物，则该重物一定会竖直落下等. 这类现象的结果是可以准确预知的.

另一类是不确定性现象，又称为随机现象. 是指事先不能预知的，即在一定的条件下可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果，具有偶然性的现象. 例如，掷一枚硬币，观察下落后的结果，有可能正面向上，也可能反面向上；观察种子发芽的情况，某粒种子可能发芽，也可能不发芽；某个射手向一目标射击，结果可能命中，也可能不中. 这类现象的结果在测试之前是不可准确预知的.

1.1.2　随机试验和样本空间

为了获得随机现象的统计规律，必须在相同的条件下做大量的重复试验，若一个试验满足以下三个特点：

(1)在相同的条件下可以重复进行；

(2)每次试验的结果不止一个，但是在试验之前可以确定一切可能出现的结果；

(3)每次试验结果恰好是这些结果中的一个,但在试验之前不能准确地预知哪种结果会出现.

称这种试验为**随机试验**,简称**试验**,记作 E.

定义 1　随机试验 E 可能发生的最基本结果称为随机试验的一个**基本事件**,如果把基本事件视为一个单点构成的集合,就称为**样本点**. 基本事件或样本点常用 ω 表示. 样本点的全体构成的集合称为随机试验的样本空间,用 Ω 表示,$\Omega=\{\omega\}$. 显然 $\omega\in\Omega$.

例 1　观察一粒种子的发芽情况,一次观察就是一次试验,试验的结果为

$$\omega_1=\text{“发芽”},\quad \omega_2=\text{“不发芽”},\quad \Omega=\{\omega_1,\omega_2\}.$$

例 2　掷两枚硬币,观察正反面的情况,用 T 表示正面向上,用 H 表示反面向上,试验的可能结果有

$$\omega_1=\{T,T\},\quad \omega_2=\{H,T\},\quad \omega_3=\{T,H\},\quad \omega_4=\{T,T\},\quad \Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}.$$

例 3　观测某地的年降雨量,写出样本空间:$t=$“年降雨量”,$\Omega=\{t\mid t\in[0,+\infty)\}$.

例 4　从 J、Q、K、A 四张扑克中随意抽取两张,写出其样本空间:

$\omega_1=\{J,Q\}$,　$\omega_2=\{J,K\}$,　$\omega_3=\{J,A\}$,　$\omega_4=\{Q,K\}$,　$\omega_5=\{Q,A\}$,　$\omega_6=\{K,A\}$,

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

例 5　某人向一圆形平面靶 G 射击,观察击中点位置的分布情况,假设射击不会脱靶,并且在此平面上建立了坐标系,则样本空间为

$$(x,y)=\text{“击中点 }P(x,y)\text{”},\quad \Omega=\{(x,y)\mid(x,y)\in G\}.$$

需要注意的是:

(1)样本空间中的基本事件不但要涵盖随机试验的全部结果,而且基本事件不能重复出现.

(2)样本空间中的元素可以是数,也可以不是数.

(3)从样本空间含有样本点的个数来看,样本空间可以分为有限样本空间和无限样本空间两类.

在观察随机现象时,不仅要考虑基本事件,而且还要考虑复杂事件.

随机试验 E 的样本空间 Ω 的任一子集称为一个**随机事件**,简称**事件**,常用大写的字母 $A,B,C,\cdots$表示. 在试验中,如果事件 A 中所包含的任一个基本事件 ω 出现了,则称 A 发生. 反之,则称 A 不发生. 样本空间 Ω 是自身的子集,从而是随机事件,它包含所有样本点,在每次试验中必然发生,称为**必然事件**. $\varnothing$ 是 Ω 的子集,从而是随机事件,但它不包含任何样本点,故在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

1.1.3　随机事件的关系与运算

为了将复杂事件用简单事件来表示,以便研究复杂事件发生的可能性,需要建立事件之间的关系和事件之间的运算.

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，$A,B,A_i(i=1,2,3,\cdots)$是 Ω 的子集.

1. 随机事件之间的关系

(1)事件的包含.

若事件 A 中任一样本点都属于 B，称事件 A 包含于事件 B（或称事件 B 包含事件 A）. 记作：$A\subset B$ 或 $B\supset A$. 若事件 A 发生，则事件 B 必然发生，如图 1-1 所示.

(2)事件的相等.

若事件 $A\subset B$，同时 $B\subset A$，则称 A 与 B 为相等事件，记作 $A=B$.

(3)互不相容事件.

若事件 A 和 B，满足 $AB=\varnothing$，则称 A,B 为互不相容事件或互斥事件，在一次试验中 A,B 两个事件不能同时发生，如图 1-2 所示.

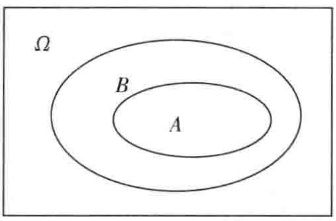

图 1-1

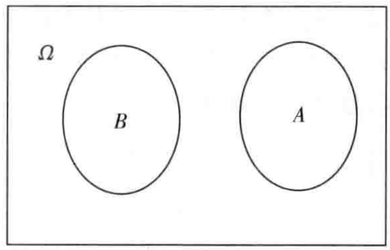

图 1-2

(4)对立事件.

由样本空间 Ω 中不属于 A 的样本点组成的集合 B，称事件 A 与 B 互为对立事件或互为逆事件，记为 $B=\overline{A}=\Omega-A$.

显然有 $A\overline{A}=\varnothing$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$.

2. 事件之间的运算

(1)事件的并.

由事件 A 和 B 中所有样本点组成的集合称为事件 A 和 B 的并事件或和事件，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$. 若 $A\cup B$ 发生，则两个事件至少有一个发生，如图 1-3 所示.

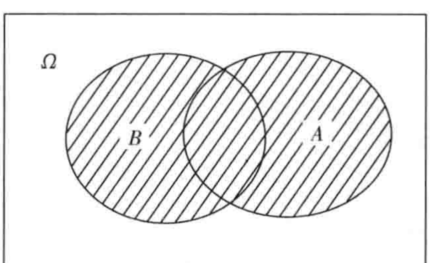

图 1-3

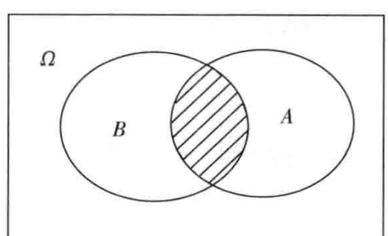

图 1-4

类似地，n 个事件的和事件记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，若 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 发生，则 n 个事件中至少有一个发生.

(2)事件的交.

由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的集合，称为事件 A 和 B 的交事件或积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB，若事件 AB 发生，则 A,B 两个事件同时发生，如图 1-4 所示.

类似地，n 个事件的积事件记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$，若事件 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 发生，则 n 个事件同时发生.

(3)事件的差.

由属于 A 但不属于 B 的所有样本点组成的集合，称为事件 A 和 B 的差事件，记作 $A-B$. 当事件$A-B$发生，则事件 A 发生而事件 B 不发生，如图 1-5 所示.

在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 不能同时发生，但在每次试验中必有一个发生，且仅有一个发生，如图 1-6 所示.

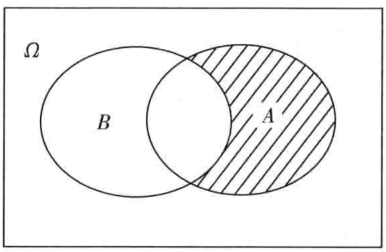

图 1-5

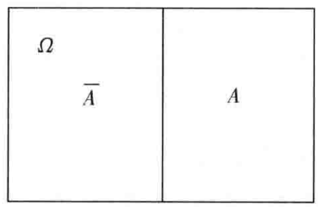

图 1-6

对于事件的差有如下的结论：

$$A-A=\varnothing,\quad A-\varnothing=A,\quad A-B=A-AB=A\overline{B},\quad \Omega-A=\overline{A},$$
$$A-\Omega=\varnothing,\quad (A-B)\cup B=A\cup B.$$

事件之间的运算存在如下规律.

(1)交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2)结合律：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3)分配律：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C);$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$$

(4)De Morgan 公式：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 6　设 A,B,C 是 Ω 中的三个事件，用事件的运算式子表示下列各事件：

(1)三个事件中恰好有两个发生：$AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

(2)三个事件中至少发生一个：$A \cup B \cup C$.

(3)三个事件中至少发生两个：$AB \cup BC \cup AC$.

(4)A 与 B 发生，C 不发生：$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$.

(5)三个事件都不发生：$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$或$\overline{A \cup B \cup C}$.

(6)三个事件中至多发生一个：$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} \cup A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\overline{B}C$.

1.2　随机事件的概率

对于随机事件，在一次试验中是否发生，有很大的不确定性，不同的事件在同样的试验中发生的可能性有大有小，如一只口袋中有 5 只球，其中 2 只白球，3 只黑球，随机取一球，取到两种颜色球的可能性大小是不同的. 为了对随机试验有更深入的了解，人们希望对任一事件发生的可能性大小都能做出客观描述，并用一个数值对它进行度量.

简单来说，我们把度量随机事件发生的可能性大小的数值，称为事件 A **发生的概率**，记为 $P(A)$.

1.2.1　概率的统计定义

定义 1　若随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次，则称 n_A 为 A 在这 n 次试验中发生的**频数**，称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为 A 在这 n 次试验中发生的**频率**(frequency).

频率的性质：

(1)非负性：$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2)规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3)有限可加性：对于 n 个两两互不相容事件 $A_1,\cdots,A_n$，有 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f_n(A_i)$.

每 n 次试验，事件 A 的频率一般来说是不同的，具有随机性. 但当 n 不断增大时，$f_n(A)$能呈现某种规律性. 历史上，著名统计学家蒲丰(Comte de Buffon)和皮尔逊(Karl Pearson)曾进行过大量的抛掷硬币试验. A 表示硬币正面向上，结果见表 1-1.

表 1-1

试验者	n	n_A	$f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述数据可以看出，随着 n 的增大，频率 $f_n(A)$ 呈现一定的稳定性，即当 n 逐渐增大时，$f_n(A)$ 总是在 0.5 附近波动，且逐渐稳定于 0.5.

定义 2 在相同的条件下，重复进行 n 次试验，如果随着试验次数的增大，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一确定的常数 p 附近摆动，则称常数 p 为**事件 A 发生的概率**. 记为 $P(A)=p$，这个定义称为概率的统计定义. 概率与频率不同，概率是固定不变的，而频率是变化的.

概率的统计定义有以下性质：

(1)非负性：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)有限可加性：对于 n 个两两互不相容的事件 $A_1,\cdots,A_n$，有 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

1.2.2 古典概率模型

人们在生活中最早研究的是一类简单的随机试验，它们满足以下条件：

(1)有限性：样本空间中含有有限个样本点.

(2)等可能性：每次试验中，每个样本点出现的可能性大小相同.

这类随机试验是概率论发展过程中最早的研究对象，通常称这类随机试验为**古典概率模型**，简称**古典概型**.

定义 3 设 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 为古典概型 E 的样本空间，其中 $P(\omega_i)=\dfrac{1}{n}$，设事件 A 包含 n_A 个样本点，则定义 $P(A)=\dfrac{n_A}{n}=\dfrac{A\text{ 中基本事件的个数}}{\Omega\text{ 中基本事件的个数}}$ 为事件 A 发生的概率.

法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年把上式作为概率的定义，并在 19 世纪广泛流传，现在称它为**概率的古典定义**. 但这种定义只适合于具有有限性、等可能性的古典概型，有一定的局限性. 后来这个结果虽然推广到了拥有无限多个可能发生的结果，每个结果具有等可能性的随机试验，如几何概率，但还是没有解决概率的定义问题.

例 1　将一枚均匀的硬币连续掷两次，计算(1)正面只出现一次的概率；(2)正面至少出现一次的概率.

解　设 H="正面向上"，T="反面向上"，

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}.$$

设 A="正面只出现一次"，B="正面至少出现一次"，则 $n_A=2, n_B=3$，故

(1)$P(A)=\frac{2}{4}$，(2)$P(A)=\frac{3}{4}$.

例 2　设有 N 个产品，其中有 M 个次品，从这批产品中，任取 n 个产品，求其中恰有 m 个次品的概率.

解　Ω 中样本点的总数为C_N^n，设 A="n 件产品中恰有 m 个次品"，则 $n_A=C_M^m C_{N-M}^{n-m}$，

$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$(超几何分布).

例 3　10 张奖券，其中 2 张有奖，8 张无奖. 有 10 人依次去抽，每人一张，问第 k $(k=1,\cdots,10)$个人抽到有奖的概率是多少？

解　样本空间中含有样本点个数 $n_\Omega=10!$. A="第 k 个人抽中有奖"，则 A 中样本总数为 $n_A=C_2^1\cdot 9!$，故 $P(A)=\frac{n_A}{n_\Omega}=\frac{C_2^1\cdot 9!}{10!}=\frac{1}{5}$.

例 4　有 5 条线段，长度分别为 1，3，5，7，9，任取 3 条，求恰好能构成三角形的概率.

解　Ω 中含样本点的总数为$n_\Omega=C_5^3$，设 A="3 条线段恰好能构成三角形"，则 $n_A=3$，故 $P(A)=\frac{n_A}{n_\Omega}=\frac{3}{C_5^3}=\frac{3}{10}$.

例 5　假设有 r 个球，随机放入 n 个盒子中，试求

(1)某指定的 r 个盒子中各有一球的概率.

(2)恰有 r 个盒子中各有一球的概率.

解　样本空间中共有 n^r 个样本点，即 $n_\Omega=n^r$.

A="某指定的 r 个盒子中各有一球"，$n_A=r!$；

B="恰有 r 个盒子中各有一球"，$n_B=C_n^r r!$；

$P(A)=\frac{n_A}{n_\Omega}=\frac{r!}{n^r}$，$P(B)=\frac{n_B}{n_\Omega}=\frac{C_n^r r!}{n^r}$.

1.2.3　几何概率

在古典概率模型中，试验的结果是有限的，具有非常大的限制. 在概率发展早期，人们当然要竭尽全力突破这个限制，尽量扩大自己的研究范围. 一般情况下，当试验结果为无限时，会出现一些本质性的困难，这里我们讨论一种简单的情况，即具有某种等可能性的问题.

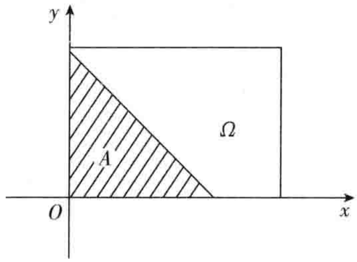

图 1-7

引例　设 Ω 为平面内的一个区域，其面积为 S_{Ω}，A 为 Ω 一个子区域，面积为 S_A，向区域 Ω 内等可能地投点，即每个点被投中的可能性大小相等．求点落入 A 的概率(图 1-7)．

解　A＝"点落在子区域 A 中"，则点落在 A 中的概率与 S_A 成正比，与 A 的位置形状没有关系．故

$$P(A)=\frac{S_A}{S_{\Omega}}.$$

定义 4　若一个随机试验 E 满足如下两条：

(1)样本空间 Ω 可以用一个几何区域 G 来表示；

(2)样本点 ω 落在 G 的任一个子区域 A 中的可能性与区域 A 的几何测度(曲线的长度、曲面的面积、立体的体积)成正比，但与 A 的形状以及 A 在 G 中所处的位置无关，即样本点出现具有等可能性，称随机试验 E 为**几何概型**.

定义 5　在几何概型 E 中，Ω 可用区域 G 表示，A 是 E 的任一事件(G 的子区域)，其概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的几何测度}}{G\text{ 的几何测度}},$$

并称之为**几何概率**(geometric probability).

例 6　假设在 3mL 血液中有一个肝炎病菌，今从中任取$\frac{1}{30}$mL 血液作检查，求恰好发现病菌的概率．

解　设 A＝"恰好发现病菌"，$P(A)=\dfrac{\frac{1}{30}}{3}=\dfrac{1}{90}$.

例 7　甲、乙两人相约在 0 到 T 这段时间内在约定地点会面，先到的人等候另一人，经过时间 $t(t<T)$后离去，设每人在 0 到 T 内到达的时刻是等可能的，且两个人到达的时刻互不牵连，求甲、乙两人能会面的概率．

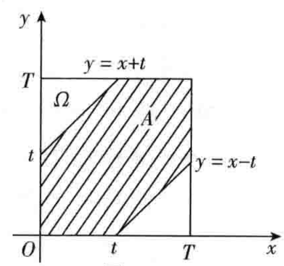

图 1-8

解　设 x,y 分别表示甲、乙两人到达的时刻(图 1-8)，A＝"两人能会面"，(x,y)表示平面上的点，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant T,0\leqslant y\leqslant T\},$$

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant t\},$$

因此 $P(A)=\dfrac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\dfrac{t}{T}\right)^2$.

1.2.4　概率的公理化定义

定义 6　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于试验 E 的每一个随机事件 A，都赋