

中学数学解题前沿方法荟要

解方程及方程组的方法

JIEFANGCHENG JI FANGCHENGZU DE FANGFA

谷学勤 编著

$$\begin{cases} F_1(x, y, \dots, z) = 0, \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0, \\ \dots \\ F_n(x, y, \dots, z) = 0. \end{cases} \dots (\omega)$$


安徽师范大学出版社

中学数学解题前沿方法荟要

解方程及方程组的方法

JIEFANGCHENG JI FANGCHENGZU DE FANGFA

谷学勤 编著

 安徽师范大学出版社

·芜湖·

责任编辑:郭明乐 孔令清 责任校对:吴毛顺
装帧设计:丁奕奕 责任印制:郭行洲

图书在版编目(CIP)数据

解方程及方程组的方法 / 谷学勤编著. — 芜湖:安徽师范大学出版社, 2014.7
ISBN 978-7-5676-1201-3

I. ①解… II. ①谷… III. ①方程 - 方程组 - 中学 - 教学参考资料 IV. ①
G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第001586号

解方程及方程组的方法

谷学勤 编著

出版发行:安徽师范大学出版社

芜湖市九华南路189号安徽师范大学花津校区 邮政编码:241002

网 址:<http://www.ahnupress.com/>

发 行 部:0553-3883578 5910327 5910310(传真) E-mail:asdcbsfxb@126.com

印 刷:安徽芜湖新华印务有限责任公司

版 次:2014年7月第1版

印 次:2014年7月第1次印刷

规 格:880×1230 1/32

印 张:9.75

字 数:250千

书 号:ISBN 978-7-5676-1201-3

定 价:19.50元

凡安徽师范大学出版社版图书有缺漏页、残破等质量问题,本社负责调换。

前 言

解答数学问题,不仅可以温习、巩固数学知识,而且可以提高逻辑思维水平,形成解题的技巧与能力.

学习数学的主要目的是应用,而在应用的时候,总是要把各种各样的实际问题转化为数学问题,再一个一个加以解决.将实际问题抽象为数学问题,进而解决这些数学问题,是一种数学能力.构筑这种能力的要素有数学知识、解题思想、解题方法和技巧等.

本书以通俗的语言、简洁流畅的叙述,针对解方程及方程组方法的问题,分别归类介绍各自的解题方法与技巧,并予以适当的点评例说,以便触类旁通.这种分类介绍的解题方法,我们将其称为解题的“个类方法”.

“个类方法”当然需要“宏观数学方法”(如唯物辩证法等)的指导,且离不开与一般逻辑方法(如分类比较、归纳与演绎、分析与综合、一般与特殊、抽象与具体、论证与猜想等)的相互关联依赖,也离不开和现代方法(如模型化、公理化、系统化、结构化、控制方法、信息方法等)的相互渗透贯通.为此,本书特意将一般逻辑方法与某些现代方法作了引用、阐述和例示.当然,针对各类题型,一般逻辑方法与现代方法并不能千篇一律地套用,需要我们深入开展对解题的个性方法,即“个类方法”的研究.本书正志于此,并对它作了较系统的探索,虽不能说尽善尽美,但也算是一种有益的尝试.

解题的“通用方法”与“个类方法”相互依存,各有千秋.“个类方法”具有鲜明的个性特征,是解题中的最直接的方法.读者在解决各类问题时,可从所列举的方法中,酌情选用.由于它直接应用于解题,因而避免了方法与应用的脱节.它把解题实际操作具体化、明朗化,

可操作性强,有利于教师和学生解题思路的梳理和掌握,对开拓解题思路、灵活选择解法十分有益.

本书专门介绍解方程及方程组的方法,可供具有一定数学功底的读者作为学习此内容的指导用书.执此一书,可减少许多解题不得其法的烦恼,少走一些弯路.

谷学勤

2013年10月

目 录

前 言	1
总 论	1
§ 1 析因法	2
§ 2 换元法	20
一、单式换元法	21
二、差常换元法	25
三、均值换元法	28
四、循环换元法	30
§ 3 比例性质法	33
§ 4 非负值性法	43
一、应用偶次算术根的非负性	43
二、利用绝对值的非负性	45
三、利用实数的偶次幂或偶次方根的非负性	48
§ 5 不等式法	53
一、利用均值不等式	53
二、利用不等式来确定或界定方程(组)的根	55
§ 6 初等超越方程的基本解法	61
一、指数方程	61
二、对数方程	69
三、无理指数的幂函数方程	81
四、最简单的三角方程	82
五、反三角函数最简方程	92
§ 7 利用根与系数关系法	93

§ 8	配方法	98
§ 9	构造辅助式或辅助方程(组)法	104
	一、共轭因式法	104
	二、应用同解定理构造辅助方程	107
	三、用平方法构造辅助方程组	109
	四、由方程结构的一致性构造辅助方程	110
	五、由方程(组)的对称性构造辅助方程	113
	六、由给定的条件及函数的性质构造辅助方程	114
	七、运用三角对偶式构造辅助方程(组)	114
§ 10	判别式法	116
§ 11	公式法	123
	一、开方公式法	123
	二、求根公式法	126
	三、求根公式的逆用法	137
	四、乘法公式法	138
	五、克莱姆(Cramer)公式法	141
§ 12	乘方法	145
§ 13	唯一性法	146
	一、利用无理数表达形式的唯一性	147
	二、利用复数相等时,其实部与虚部对应相等的唯一性	147
	三、利用分数变换成连分数形式的唯一性	148
	四、利用相同数量方幂同形项的和相等,其对应指数的唯一性	149
	五、利用相同数量分式同形项的和相等,分子对应相等,其分母的唯一性	150
§ 14	有理系数方程的有理根求法	150
§ 15	三角代换法	156
§ 16	分式方程变形法	160

一、真分式法	160
二、乘公分母化整法	163
三、约分法	165
四、换元法	166
五、比例法	169
六、讨论法	170
七、部分分式法	172
八、分段通分法	175
九、行列式法	176
§ 17 零点分段法	177
§ 18 常量与变量互换法	180
§ 19 方程组消元法	183
一、代入消元法	183
二、比较消元法	187
三、加减消元法	188
四、高斯消元法	189
§ 20 三角方程的辅助角法	196
§ 21 累加连乘法	198
§ 22 结式法	203
§ 23 对称方程组的解法	209
一、第一类对称方程组的解法	209
二、第二类对称方程组的解法	211
§ 24 相除法	214
§ 25 倒数方程的解法	218
一、倒数方程的类别及性质	218
二、倒数方程的解法	220
§ 26 开方法	225
§ 27 定义域、值域讨论法	232

§ 28	函数单调性法	235
§ 29	几何法	237
§ 30	不定方程的解法	238
	一、二元一次不定方程	238
	二、多元一次不定方程及方程组	256
	三、沛尔(Pell)方程解法	262
	四、勾股方程的解法	263
	五、解不定方程 $xy = z^2$ 的有理比值法	266
	六、解形如 $ay^2 = x(x+1)$ 二次不定方程的递推法	269
	七、解多元高次不定方程的奇偶性分析法	273
§ 31	线性同余方程的解法	276
	一、同余式的概念及性质	276
	二、剩余类与完全剩余系	278
	三、简化剩余系	278
	四、Euler 定理、Fermat 定理、Wilson 定理	279
	五、线性同余方程的解法	279
	六、一次同余方程组的解法	294
	结束语	303

总 论

方程及方程组的一些基本概念:

形如 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ 的等式叫做方程, f 不是常量函数, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 叫做方程 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ 的未知量, 方程的未知量的允许值集叫做函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的定义域, 记为 M .

若存在一组数 (c_1, c_2, \dots, c_n) 满足方程, 使得 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)=0$ 成立, 则 (c_1, c_2, \dots, c_n) 就称为方程的一组解(或根), 但是必须满足 $c_1, c_2, \dots, c_n \in M$. 若它们在定义域 M 以外, 则那些根就毫无意义. 因此, 又把这个函数的定义域 M 称为方程的存在域. 求方程解的过程, 叫做解方程.

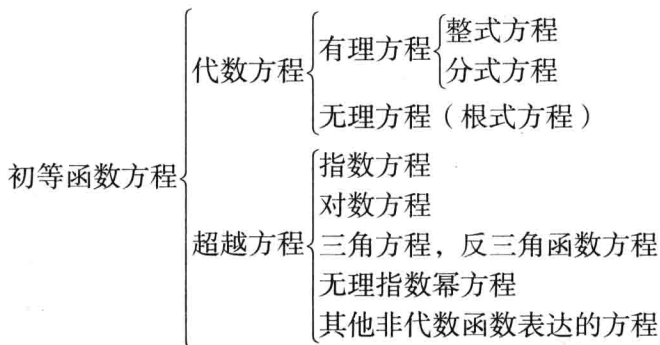
设含有 n 个未知量 x_1, x_2, \dots, x_n 的 m 个方程式的集合:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)=0, \\ \dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)=0. \end{cases} \dots\dots (\omega)$$

(ω) 叫做含有 n 个自变量的 m 个方程的方程组.

方程组 (ω) 中 m 个方程的允许值集的交集, 叫做方程组 (ω) 的允许值集, 或存在域. 方程组 (ω) 中 m 个方程的解集的交集, 叫做方程组 (ω) 的解. 寻求方程组 (ω) 解的过程, 叫做解方程组. 方程组 (ω) 的解不能叫做根, 因为仅对于一个方程 $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n)=0 (1 \leq k \leq m)$ 的解, 仅在单变量时才叫根.

方程分类的根据主要看方程 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ 中的函数式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是属于何种函数, 分类如下:



解各类方程,除了符合各自特点的解法外,还有不少通用的具有共同特性的方法,现分述如后.

§ 1 析因法

所谓析因,就是分解因式的意思.用析因法来解方程(组)方法如下.

在给定数域 ω 里,方程(组) F_1 和方程(组) F_2 ,如果它们的解集相同,则把方程(组) F_1 和方程(组) F_2 称为同解方程(组).假如 F_1 的解集 δ 是 F_2 解集 θ 的子集,即 $\delta \subseteq \theta$,则称 F_2 是 F_1 的结果方程(组).析因法主要应用下面两个因式分解定理来解方程(组).

定理 1 如果 $F(x, y, \dots, z) = f_1(x, y, \dots, z) \cdot f_2(x, y, \dots, z) \cdots f_n(x, y, \dots, z)$, 那么方程

$$F(x, y, \dots, z) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

与 n 个方程的集合

$$M = \{f_k(x, y, \dots, z) = 0, k = 1, 2, \dots, n\} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

是同解的.

也就是说,①中的每一个解都是②中的解;反之,②中任一个方程的解,只要能使②中其余的方程有意义,就都是①的解.

定理 2 如果 $F(x, y, \dots, z) = f_1(x, y, \dots, z) \cdot f_2(x, y, \dots, z) \cdots f_n(x,$

$y, \dots, z)$, 那么方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, \dots, z) = 0, \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0, \\ \dots \\ F_n(x, y, \dots, z) = 0 \end{cases}$$

与方程组的集合

$$\begin{aligned} M = \{ & f_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, \dots, F_n = 0, \\ & f_2 = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, \dots, F_n = 0, \\ & \dots \\ & f_n = 0, F_2 = 0, F_3 = 0, \dots, F_n = 0 \} \end{aligned}$$

是同解的.

例1 解方程: $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

解 先将方程左端的多项式析因, 得

$$x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x-2)^3(x^2+x+1),$$

则

$$(x-2)^3(x^2+x+1) = 0.$$

故原方程的解为

$$x_{1,2,3} = 2 \text{ (三重根)}, x_4 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, x_5 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

例2 解方程: $x^3 + 10 + 9i\sqrt{3} = 0$.

解 由于

$$-10 - 9i\sqrt{3} = (2 - i\sqrt{3})^3,$$

所以原方程可以化为

$$x^3 - (2 - i\sqrt{3})^3 = 0,$$

即

$$[x - (2 - i\sqrt{3})][x^2 + (2 - i\sqrt{3})x + (2 - i\sqrt{3})^2] = 0.$$

故得

$$x - (2 - i\sqrt{3}) = 0 \text{ 和 } x^2 + (2 - i\sqrt{3})x + (2 - i\sqrt{3})^2 = 0,$$

解得

$$x_1 = 2 - i\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{1 + 3i\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = \frac{-5 - i\sqrt{3}}{2}.$$

例3 解方程: $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$.

解 将原方程化为

$$(2x)^2 + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot (3x)^2 = 0,$$

析因式得

$$(2^x + 2 \cdot 3^x)(2^x - 3^x) = 0.$$

因为 $2^x + 2 \cdot 3^x > 0$, 所以

$$2^x - 3^x = 0,$$

即 $2^x = 3^x$, 故 $x = 0$.

例4 解方程:

$$\sqrt{x^2 + 4x - 21} + \sqrt{x^2 - x - 6} = \sqrt{6x^2 - 5x - 39}.$$

解 先将根号内的多项式析因式, 得

$$\sqrt{(x-3)(x+7)} + \sqrt{(x-3)(x+2)} = \sqrt{(x-3)(6x+13)}.$$

移项后提取公因式, 得

$$\sqrt{x-3}(\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} - \sqrt{6x+13}) = 0.$$

由 $\sqrt{x-3} = 0$, 得 $x_1 = 3$.

由 $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} - \sqrt{6x+13} = 0$ 得

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13},$$

平方后析因, 得

$$(x-2)(3x+5) = 0.$$

解得 $x_1 = 2, x_2 = -\frac{5}{3}$. 但原方程中函数的定义域为 $x \geq 3$, 所以 x_1, x_2 不在定义域范围内, 故它们都是增根.

例5 解方程:

$$-\frac{36}{x^2} + \frac{72}{x} - 11 = (x-6)^2.$$

解 将方程左边通分, 析因后得

$$-\frac{(x-6)(11x-6)}{x^2} = (x-6)^2,$$

移项,提取公因式 $x-6$, 得

$$\frac{1}{x^2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6) = 0.$$

故得 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=6$, 且经检验都是原方程的根.

例6 解方程组:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0, \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0. \end{cases}$$

解 每个方程左边先析因

$$\begin{cases} (x+4y-7)(x-2y+1) = 0, \\ (x-3y)(x+2y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4y-7=0, \\ x-3y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+4y-7=0, \\ x+2y-3=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2y+1=0, \\ x-3y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2y+1=0, \\ x+2y-3=0. \end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=-1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_4=1, \\ y_4=1. \end{cases}$$

例7 解方程: $\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + 3 \cos^3 x = 0$.

解 两边除以 $\cos^3 x$, 使得三角函数变名, 得

$$\tan^3 x - \tan^2 x - 3 \tan x + 3 = 0,$$

再将方程左边析因

$$(\tan x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \text{ 或 } \tan^2 x - 3 = 0.$$

所以

$$\left\{ x \mid x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ x \mid x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{N} \right\}.$$

例8 解方程组:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) = 45, \\ (x-y)^2 - 2(x-y) = 3. \end{cases}$$

解 移项后析因, 得

$$\begin{cases} (x+y-9)(x+y+5)=0, \\ (x-y-3)(x-y+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-9=0, \\ x-y-3=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y-9=0, \\ x-y+1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y+5=0, \\ x-y-3=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y+5=0, \\ x-y+1=0. \end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases} x_1=6, \\ y_1=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=-4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-2. \end{cases}$$

例9 解方程组:

$$\begin{cases} (x+y)^2(x-y)=3xy+6y, & \dots\dots\textcircled{1} \\ x^2-y^2=x+2. & \dots\dots\textcircled{2} \end{cases}$$

解 将②代入①,得

$$(x+2)(x+y)=3xy+6y,$$

即

$$(x+2)(x-2y)=0. \quad \dots\dots\textcircled{3}$$

由②和③构成的方程组,等价于

$$\begin{cases} x+2=0, \\ x^2-y^2=x+2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2y=0, \\ x^2-y^2=x+2. \end{cases}$$

解得其解

$$\begin{cases} x_{1,2}=-2, \\ y_{1,2}=\pm 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_{3,4}=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{3}, \\ y_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}. \end{cases}$$

例10 解方程组:

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2-5x+5y+2=0. \end{cases}$$

解 原方程组各个方程左边析因,得

$$\begin{cases} (x-2y+3)(x+4y-1)=0, \\ (2x-y-1)(x-3y-2)=0, \end{cases}$$

此方程组等价于下面四个方程组

$$\begin{cases} x-2y+3=0, \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x-2y+3=0, \\ x-3y-2=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+4y-1=0, \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+4y-1=0, \\ x-3y-2=0. \end{cases}$$

分别解之,得原方程组的解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3}, \\ y_1 = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -13, \\ y_2 = -5 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_3 = \frac{5}{9}, \\ y_3 = \frac{1}{9} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_4 = \frac{11}{7}, \\ y_4 = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

例 11 解方程组:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

解 将第一个方程左边析因

$$\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+y=0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

分别将第一个方程变为显函数,代入第二个方程得到原方程组的解

$$\begin{cases} x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}, \\ y_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_{3,4} = \frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}, \\ y_{3,4} = -\frac{a \pm \sqrt{2-a^2}}{2}. \end{cases}$$

例 12 解方程:

(1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0, \quad x \in (0, \pi);$

(2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x;$

(3) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x.$

解 (1)将原方程变形为

$$2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0,$$

析因,得

$$2 \sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 0,$$

括号内利用和差化积公式变形,得

$$4 \sin \frac{5x}{2} \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} = 0.$$

因为 $x \in (0, \pi)$, 所以方程的解集为 $\left\{ x \mid x = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{2} \right\}$.

(2) 利用和差化积变形后再析因,得

$$\cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0.$$

故原方程的解集为

$$\left\{ x \mid x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ x \mid x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ x \mid x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

(3) 原方程变换为

$$-2\sin^2 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 0,$$

析因,得

$$\sin^2 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

所以原方程的解集为

$$\left\{ x \mid x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z} \right\} \cup \left\{ x \mid x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

例 13 解方程:

(1) $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$;

(2) $2 \cos^2 \frac{x}{4} + \sin x = 1$;

(3) $\cos 2x = \cos x + \sin x$.

解 (1) 原方程变换为

$$\tan x + \tan 2x = \frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x},$$

移项析因

$$\tan x + \tan 2x \left[1 - \frac{1}{1 - \tan x \tan 2x} \right] = 0,$$