中学数学解题前沿方法荟要

解方程及方程组的方法

JIEFANGCHENG JI FANGCHENGZU DE FANGFA

谷学勤 编著

$$\begin{cases} F_1(x,y,\cdots,z)=0, \\ F_2(x,y,\cdots,z)=0, \\ \cdots \\ F_n(x,y,\cdots,z)=0. \end{cases} \quad \cdots(\omega)$$

安徽师范大学出版社

中学数学解题前沿方法荟要

解方程及方程组的方法

JIEFANGCHENG JI FANGCHENGZU DE FANGFA

谷学勤　编著

安徽师范大学出版社

·芜湖·

责任编辑:郭明乐　孔令清　责任校对:吴毛顺
装帧设计:丁奕奕　　　　　责任印制:郭行洲

图书在版编目(CIP)数据

解方程及方程组的方法 / 谷学勤编著.—芜湖:安徽师范大学出版社,2014.7
ISBN 978-7-5676-1201-3
Ⅰ.①解… Ⅱ.①谷… Ⅲ.①方程-方程组-中学-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603
中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第001586号

解方程及方程组的方法
谷学勤　编著

出版发行:安徽师范大学出版社
芜湖市九华南路189号安徽师范大学花津校区　邮政编码:241002
网　　址:http://www.ahnupress.com/
发 行 部:0553-3883578　5910327　5910310(传真)　E-mail:asdcbsfxb@126.com
印　　刷:安徽芜湖新华印务有限责任公司
版　　次:2014年7月第1版
印　　次:2014年7月第1次印刷
规　　格:880×1230　1/32
印　　张:9.75
字　　数:250千
书　　号:ISBN 978-7-5676-1201-3
定　　价:19.50元

前言

解答数学问题，不仅可以温习、巩固数学知识，而且可以提高逻辑思维水平，形成解题的技巧与能力.

学习数学的主要目的是应用，而在应用的时候，总是要把各种各样的实际问题转化为数学问题，再一个一个加以解决.将实际问题抽象为数学问题，进而解决这些数学问题，是一种数学能力.构筑这种能力的要素有数学知识、解题思想、解题方法和技巧等.

本书以通俗的语言、简洁流畅的叙述，针对解方程及方程组方法的问题，分别归类介绍各自的解题方法与技巧，并予以适当的点评例说，以便触类旁通.这种分类介绍的解题方法，我们将其称为解题的“个类方法”.

“个类方法”当然需要“宏观数学方法”（如唯物辩证法等）的指导，且离不开与一般逻辑方法（如分类比较、归纳与演绎、分析与综合、一般与特殊、抽象与具体、论证与猜想等）的相互关联依赖，也离不开和现代方法（如模型化、公理化、系统化、结构化、控制方法、信息方法等）的相互渗透贯通.为此，本书特意将一般逻辑方法与某些现代方法作了引用、阐述和例示.当然，针对各类题型，一般逻辑方法与现代方法并不能千篇一律地套用，需要我们深入开展对解题的个性方法，即“个类方法”的研究.本书正志于此，并对它作了较系统的探索，虽不能说尽善尽美，但也算是一种有益的尝试.

解题的“通用方法”与“个类方法”相互依存，各有千秋.“个类方法”具有鲜明的个性特征，是解题中的最直接的方法.读者在解决各类问题时，可从所列举的方法中，酌情选用.由于它直接应用于解题，因而避免了方法与应用的脱节.它把解题实际操作具体化、明朗化，

可操作性强，有利于教师和学生对解题思路的梳理和掌握，对开拓解题思路、灵活选择解法十分有益.

本书专门介绍解方程及方程组的方法，可供具有一定数学功底的读者作为学习此内容的指导用书.执此一书，可减少许多解题不得其法的烦恼，少走一些弯路.

谷学勤

2013年10月

目　录

总　论

方程及方程组的一些基本概念：

形如 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 的等式叫做方程，f 不是常量函数，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 叫做方程 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 的未知量，方程的未知量的允许值集叫做函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域，记为 M.

若存在一组数 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 满足方程，使得 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n)=0$ 成立，则 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 就称为方程的一组解（或根），但是必须满足 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in M$.若它们在定义域 M 以外，则那些根就毫无意义.因此，又把这个函数的定义域 M 称为方程的存在域.求方程解的过程，叫做解方程.

设含有 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个方程式的集合：

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0, \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0, \\ \quad\cdots \\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0. \end{cases} \qquad \cdots\cdots(\omega)$$

(ω) 叫做含有 n 个自变量的 m 个方程的方程组.

方程组 (ω) 中 m 个方程的允许值集的交集，叫做方程组 (ω) 的允许值集，或存在域.方程组 (ω) 中 m 个方程的解集的交集，叫做方程组 (ω) 的解.寻求方程组 (ω) 解的过程，叫做解方程组.方程组 (ω) 的解不能叫做根，因为仅对于一个方程 $f_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0(1 \leqslant k \leqslant n)$ 的解，仅在单变量时才叫根.

方程分类的根据主要看方程 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$ 中的函数式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是属于何种函数，分类如下：

- 初等函数方程
  - 代数方程
    - 有理方程
      - 整式方程
      - 分式方程
    - 无理方程（根式方程）
  - 超越方程
    - 指数方程
    - 对数方程
    - 三角方程，反三角函数方程
    - 无理指数幂方程
    - 其他非代数函数表达的方程

解各类方程,除了有符合各自特点的解法外,还有不少通用的具有共同特性的方法,现分述如后.

§ 1　析因法

所谓析因,就是分解因式的意思.用析因法来解方程(组)方法如下.

在给定数域 ω 里,方程(组)F_1和方程(组)F_2,如果它们的解集相同,则把方程(组)F_1和方程(组)F_2称为同解方程(组).假如F_1的解集 δ 是F_2解集 θ 的子集,即 $\delta\subseteq\theta$,则称F_2是F_1的结果方程(组).析因法主要应用下面两个因式分解定理来解方程(组).

定理 1 如果 $F(x,y,\cdots,z)=f_1(x,y,\cdots,z)\cdot f_2(x,y,\cdots,z)\cdot\cdots\cdot f_n(x,y,\cdots,z)$,那么方程

$$F(x,y,\cdots,z)=0\quad\cdots\cdots①$$

与n个方程的集合

$$M=\{f_k(x,y,\cdots,z)=0,\ k=1,2,\cdots,n\}\quad\cdots\cdots②$$

是同解的.

也就是说,①中的每一个解都是②中的解;反之,②中任一个方程的解,只要能使②中其余的方程有意义,就都是①的解.

定理 2 如果 $F(x,y,\cdots,z)=f_1(x,y,\cdots,z)\cdot f_2(x,y,\cdots,z)\cdot\cdots\cdot f_n(x,$

$y, \cdots, z)$,那么方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, \cdots, z)=0, \\ F_2(x, y, \cdots, z)=0, \\ \qquad \cdots \\ F_n(x, y, \cdots, z)=0 \end{cases}$$

与方程组的集合

$$\begin{aligned} M=\{ & f_1=0, F_2=0, F_3=0, \cdots, F_n=0, \\ & f_2=0, F_2=0, F_3=0, \cdots, F_n=0, \\ & \qquad \cdots \\ & f_n=0, F_2=0, F_3=0, \cdots, F_n=0 \} \end{aligned}$$

是同解的.

例 1 解方程:$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=0$.

解 先将方程左端的多项式析因,得

$$x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8=(x-2)^3(x^2+x+1),$$

则

$$(x-2)^3(x^2+x+1)=0.$$

故原方程的解为

$$x_{1,2,3}=2(\text{三重根}),\ x_4=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ x_5=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

例 2 解方程:$x^3+10+9i\sqrt{3}=0$.

解 由于

$$-10-9i\sqrt{3}=(2-i\sqrt{3})^3,$$

所以原方程可以化为

$$x^3-(2-i\sqrt{3})^3=0,$$

即

$$[x-(2-i\sqrt{3})][x^2+(2-i\sqrt{3})x+(2-i\sqrt{3})^2]=0.$$

故得

$$x-(2-i\sqrt{3})=0 \text{ 和 } x^2+(2-i\sqrt{3})x+(2-i\sqrt{3})^2=0,$$

解得

$$x_1=2-i\sqrt{3},\ \ x_2=\frac{1+3i\sqrt{3}}{2},\ \ x_3=\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}.$$

例 3 解方程：$4^x+6^x=2\cdot 9^x$.

解 将原方程化为

$$(2x)^2+2^x\cdot 3^x-2\cdot(3x)^2=0,$$

析因式得

$$(2^x+2\cdot 3^x)(2^x-3^x)=0.$$

因为 $2^x+2\cdot 3^x>0$，所以

$$2^x-3^x=0,$$

即 $2^x=3^x$，故 $x=0$.

例 4 解方程：

$$\sqrt{x^2+4x-21}+\sqrt{x^2-x-6}=\sqrt{6x^2-5x-39}.$$

解 先将根号内的多项式析因式，得

$$\sqrt{(x-3)(x+7)}+\sqrt{(x-3)(x+2)}=\sqrt{(x-3)(6x+13)}.$$

移项后提取公因式，得

$$\sqrt{x-3}(\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}-\sqrt{6x+13})=0.$$

由 $\sqrt{x-3}=0$，得 $x_1=3$.

由 $\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}-\sqrt{6x+13}=0$ 得

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x+2}=\sqrt{6x+13},$$

平方后析因，得

$$(x-2)(3x+5)=0.$$

解得 $x_1=2$，$x_2=-\frac{3}{5}$.但原方程中函数的定义域为 $x\geqslant 3$，所以 x_1，x_2 不在定义域范围内，故它们都是增根.

例 5 解方程：

$$-\frac{36}{x^2}+\frac{72}{x}-11=(x-6)^2.$$

解 将方程左边通分，析因后得

$$-\frac{(x-6)(11x-6)}{x^2}=(x-6)^2,$$

移项，提取公因式 $x-6$，得

$$\frac{1}{x^2}(x-1)(x-2)(x-3)(x-6)=0.$$

故得 $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=6$，且经检验都是原方程的根.

例6 解方程组：

$$\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0,\\2x^2-5xy-10y^2-3x+9y+7=0.\end{cases}$$

解 每个方程左边先析因

$$\begin{cases}(x+4y-7)(x-2y+1)=0,\\(x-3y)(x+2y-3)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y-7=0,\\x-3y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+4y-7=0,\\x+2y-3=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2y+1=0,\\x-3y=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2y+1=0,\\x+2y-3=0.\end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases}x_1=3,\\y_1=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_3=-3,\\y_3=-1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_4=1,\\y_4=1.\end{cases}$$

例7 解方程：$\sin^3x-\sin^2x\cos x-3\sin x\cos^2x+3\cos^3x=0$.

解 两边除以 $\cos^3x$，使得三角函数变名，得

$$\tan^3x-\tan^2x-3\tan x+3=0,$$

再将方程左边析因

$$(\tan x-1)(\tan^2x-3)=0\Leftrightarrow\tan x-1=0\text{ 或 }\tan^2x-3=0.$$

所以

$$\left\{x\middle|x=n\pi\pm\frac{\pi}{4},\ n\in\mathbf{N}\right\}\cup\left\{x\middle|x=n\pi\pm\frac{\pi}{3},\ n\in\mathbf{N}\right\}.$$

例8 解方程组：

$$\begin{cases}(x+y)^2-4(x+y)=45,\\(x-y)^2-2(x-y)=3.\end{cases}$$

解 移项后析因，得

$$\begin{cases}(x+y-9)(x+y+5)=0,\\(x-y-3)(x-y+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-9=0,\\x-y-3=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y-9=0,\\x-y+1=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y+5=0,\\x-y-3=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y+5=0,\\x-y+1=0.\end{cases}$$

分别解得

$$\begin{cases}x_1=6,\\y_1=3\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_2=4,\\y_2=5\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_3=-1,\\y_3=-4\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_4=-3,\\y_4=-2.\end{cases}$$

例9　解方程组:

$$\begin{cases}(x+y)^2(x-y)=3xy+6y, & \cdots\cdots①\\x^2-y^2=x+2. & \cdots\cdots②\end{cases}$$

解　将②代入①,得

$$(x+2)(x+y)=3xy+6y,$$

即

$$(x+2)(x-2y)=0.\qquad\cdots\cdots③$$

由②和③构成的方程组,等价于

$$\begin{cases}x+2=0,\\x^2-y^2=x+2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2y=0,\\x^2-y^2=x+2.\end{cases}$$

解得其解

$$\begin{cases}x_{1,2}=-2,\\y_{1,2}=\pm2\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_{3,4}=\dfrac{2\pm2\sqrt{7}}{3},\\y_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{7}}{3}.\end{cases}$$

例10　解方程组:

$$\begin{cases}x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3=0,\\2x^2-7xy+3y^2-5x+5y+2=0.\end{cases}$$

解　原方程组各个方程左边析因,得

$$\begin{cases}(x-2y+3)(x+4y-1)=0,\\(2x-y-1)(x-3y-2)=0,\end{cases}$$

此方程组等价于下面四个方程组

$$\begin{cases}x-2y+3=0,\\2x-y-1=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-2y+3=0,\\x-3y-2=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+4y-1=0,\\2x-y-1=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+4y-1=0,\\x-3y-2=0.\end{cases}$$

分别解之,得原方程组的解

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{3},\\y_1=\dfrac{7}{3}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_2=-13,\\y_2=-5\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_3=\dfrac{5}{9},\\y_3=\dfrac{1}{9}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_4=\dfrac{11}{7},\\y_4=-\dfrac{1}{7}.\end{cases}$$

例 11 解方程组:

$$\begin{cases}x^2-y^2=0,\\(x-a)^2+y^2=1.\end{cases}$$

解 将第一个方程左边析因

$$\begin{cases}(x+y)(x-y)=0,\\(x-a)^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=0,\\(x-a)^2+y^2=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x+y=0,\\(x-a)^2+y^2=1.\end{cases}$$

分别将第一个方程变为显函数,代入第二个方程得到原方程组的解

$$\begin{cases}x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\\y_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_{3,4}=\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2},\\y_{3,4}=-\dfrac{a\pm\sqrt{2-a^2}}{2}.\end{cases}$$

例 12 解方程:

(1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$, $x\in(0,\pi)$;

(2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$;

(3) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$.

解 (1)将原方程变形为

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,$$

析因,得

$$2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0,$$

括号内利用和差化积公式变形,得

$$4\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}=0.$$

因为$x\in(0,\pi)$,所以方程的解集为$\left\{x\middle|x=\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5},\frac{\pi}{2}\right\}$.

(2)利用和差化积变形后再析因,得

$$\cos x(2\cos x+1)(2\sin x-1)=0.$$

故原方程的解集为

$$\left\{x\middle|x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\middle|x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ n\in\mathbf{Z}\right\}\cup$$
$$\left\{x\middle|x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbf{Z}\right\}.$$

(3)原方程变换为

$$-2\sin^2 2x\cos 2x+\sin^2 2x=0,$$

析因,得

$$\sin^2 2x(1-2\cos 2x)=0.$$

所以原方程的解集为

$$\left\{x\middle|x=\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\middle|x=n\pi\pm\frac{\pi}{6},\ n\in\mathbf{Z}\right\}.$$

例13 解方程:

(1) $\tan x+\tan 2x=\tan 3x$;

(2) $2\cos^2\frac{x}{4}+\sin x=1$;

(3) $\cos 2x=\cos x+\sin x$.

解 (1)原方程变换为

$$\tan x+\tan 2x=\frac{\tan x+\tan 2x}{1-\tan x\tan 2x},$$

移项析因

$$\tan x+\tan 2x\left[1-\frac{1}{1-\tan x\tan 2x}\right]=0,$$