复旦卓越

普通高等教育21世纪规划教材·工程类·经济类

工程数学基础

吴建春　王彦军　杜忠佩　编著

复旦大学出版社

复旦卓越·普通高等教育21世纪规划教材·工程类、经济类

工程数学基础

吴建春　王彦军　杜忠佩　编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学基础/吴建春,王彦军,杜忠佩编著.—上海:复旦大学出版社,2011.8
(复旦卓越·普通高等教育21世纪规划教材·工程类、经济类)
ISBN 978-7-309-08249-4

Ⅰ.工… Ⅱ.①吴…②王…③杜… Ⅲ.工程数学-高等学校-教材 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第130859号

工程数学基础
吴建春 王彦军 杜忠佩 编著
责任编辑/张志军

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海第二教育学院印刷厂

开本787×1092 1/16 印张20.25 字数505千
2011年8月第1版第1次印刷
印数1—5 100

ISBN 978-7-309-08249-4/T·424
定价:38.00元

内 容 提 要

根据高职高专数学教学创新的特点、需求及教育培养目标，我们本着“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，以及重能力培养、重知识应用、重素质教育、求创新的总体思路，在教学观念上解放思想，编写了本教材。本书的内容设计有利于提高学生的应用能力，培养学生的数学意识，形成学生较高的知识水平，实现以下目标：使学生具有较好的量化分析基础、数学知识基础、数学素养基础、数学应用意识。

这本书是为工科类、经济类专业的高职高专学生编写的，也可供其他专业的高职高专学生和教师参考。

Preface

·工·程·数·学·基·础·

前　言

高等数学既是科学的基础，又是文化的基础，是学生核心能力培养的一个重要方面，在培养学生的综合素质和创新意识方面起着十分重要的作用。现在，全国高职高专教育教学改革正在如火如荼地展开，广大高职教育工作者都在积极探索高职教育的新思路和新方法。

根据高职高专数学教学创新的特点、需求及高职高专教育培养目标，我们本着“以应用为目的，以必须够用为度”的原则，以及重能力培养、重知识应用、重素质教育、求创新的总体思路，在教学观念上解放思想，编写了本教材，供高职高专院校工科类、经济类学生使用。本教材在许多方面都具有明显的高职特色，具体反映在：

1. 在教材编写过程中，注重加强学生应用意识和应用能力的培养，融合高等数学必须的基础部分、专业拓展部分和强化应用能力部分内容，整合成工程数学。充分融合各专业必需知识部分，以“加强基础，强化应用，整体优化，注重效果”为原则，将微积分、线性代数及概率统计基本知识有机地整合在一起，根据学生的认知水平、数学的认知规律，设计、组织和编排全书内容，力求实现基础性、实用性和可持续发展3方面需求的和谐与统一。

2. 着重讲解基本概念、基本理论和基本方法，对基本理论和结论一般不做论证，尽量用几何图形、数表、案例说明其实际背景和应用价值。由此加深对基本理论和概念的理解，立足于实践和应用，使传授数学知识和培养学生的数学素养得到很好的结合。

3. 教材从数学应用广泛性这一特点出发，从现实生活题材中引入数学概念；加强数学和专业的联系；打破传统学科限制格局，提倡在数学课程中研究与数学有关的其他问题。用“与学生所学专业密切联系的应用性课题”培养学生学数学、用数学的兴趣，进而训练学生用数学解决实际问题的能力。

注重加强数学的实际应用。注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，强化应用数学知识解决实际问题的能力训练，培养学生举一反三、融会贯通的能力，创新能力和职业能力，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求。

4. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强对学生的数学应用意识、兴趣及能力培养。培养学生用数学的原理和方法消化吸收工程概念、工程原理和专业知识的能力，加强数学建模思想的教学内容，将工程问题转化为数学问题的思想贯穿全书各章，注意与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换。

5. 本教材每节后配有练习题，每章后配有总习题。习题按循序渐进的原则配置，其中有一般能力检测的基本题和应用能力检测的综合题。

6. 本教材精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学。

在教材编写过程中，编者做过大量的调查和调研，以确定本教材内容是相关专业必需的基

本要求。本书的内容设计有利于提高学生的应用能力，培养学生的数学意识，形成学生较高的知识水平，实现以下目标：使学生具有较好的量化分析基础、数学知识基础、数学素养基础、数学应用意识。对学生在后续课程学习中，数学知识也基本够用。

本书可供工科类、经济类专业的高职高专教学使用，也可供其他专业的学生和教师参考。本书内容大约为120课时，不同专业可选取所需内容教学，一般在60～90课时，目录中打“*”号的可作选学内容。

本书在编写中得到了酒泉职业技术学院机电工程系杜静、张云鹏、王莉老师和应用化工系孙晓东老师，科研处梁潇老师的大力支持与帮助。在书稿校对中，他们提出了许多宝贵的修改意见和建议，在此一并致以诚挚的谢意！

由于编写时间仓促，书中疏漏之处在所难免，恳请同仁和读者批评指正。

编　者

2011年5月27日

Exordium

·工·程·数·学·基·础·

绪　论

高等数学是高职工科类、经济类、管理类专业必修的一门重要的基础课和工具课，主要内容包括一元及多元函数微积分学、微分方程、空间解析几何以及矩阵、线性方程组、概率和数理统计的基础知识。现在，数学的思想、数学的方法已经融入各个专业之中，许多专业基础课和专业课都是建立在高等数学基础之上的，一方面数学为其他各个学科提供了数学基础和分析问题、解决问题的思想及方法；另一方面也对其他学科提供了进行严密判断和精确计算的方法和工具。

1. 数学及其特点

我们从小学到大学一直在学习数学，那数学究竟是什么？数学是研究空间形式和数量关系的一门学科，是研究抽象结构及其规律、特性的学科。数学具有严密的符号体系，独特的公式结构，形象的图像语言。

作为一门科学，高等数学有其固有的特点，那就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。

(1) 高度的抽象性　抽象性并非数学所独有的，如何一门学科都离不开抽象，因为每门学科都有自己的概念系统，二概念都是经过了不同程度的抽象过程才形成的。然而，数学的抽象，在对象以及程度上和其他学科是不同的，数学是借助于抽象建立起来并借助于抽象发展的。数学的抽象撇开了抽象的具体内容，仅仅保留了数量关系和空间形式。如几何中的“点”、“线”、“面”的概念，代数中的“集合”、“方程”、“函数”等概念都是抽象思维的产物，“点”被看作没有大小的东西，无长无宽无高，“面”被看作是可无限延伸的无高是面。实际上，理论上的“点”、“线”、“面”在现实中是不存在的，只有充分发挥自己的想象力才能真正理解。正因为此，才可以使数学研究在个性和深度上不断发展，让我们的思维在“抽象的高地”上自由飞翔。例如微积分中的导数是从变速运动的速度及几何上的切线推导、抽象出来的，但利用导数的知识就不单单是解决变速运动的速度和几何上的切线这一类简单的问题了。

(2) 严密的逻辑性　严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中，无论是概念和表述，还是判断和推理，都要运用逻辑的规则，遵循思维的规律。任何数学结论都必须经过逻辑推理的严格证明才能被承认。数学的研究对象是具有高度抽象性的数量关系和空间形式，是一种形式化的思想材料。数学运算、数学推理、数学证明以及数学理论的正确性等，不能借助于可重复的实验来检验，而只能借助于严密的逻辑来实现。因此，通常数学问题的解决，不仅要遵循数学规律，而且要合乎逻辑，在逻辑上无误。

(3) 应用的广泛性　人类社会的进步，与数学这门科学的广泛应用是分不开的。数学做为一种工具和手段，几乎在任何一门学科及一切社会领域中被应用。我国已故著名数学家华

罗庚教授指出:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之迷,日用之繁,无处不用数学。”这是对数学应用的广泛性的精辟概括。现今,随着科学技术的飞速发展,电子计算机的出现和普及使得数学的应用领域更加拓宽,现代数学正成为科技发展的强大动力,已渗透到现代科学、技术的各个领域,国民经济的各个部门,在社会生活和生产实践活动中也无时不在地应用数学。

数学的这三个特点是互相联系的,数学高度的抽象性,决定了其严密的逻辑性,同时又保证其应用的广泛性。

2. 初等数学和高等数学的联系和区别

初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系和空间形式,而高等数学主要研究事物运动、变化过程中的数量关系。主要的区别有:

(1) 从孤立、静止的观念到普遍联系、运动的观念　初等数学解决实际问题常常用孤立的静止的观念来研究,有很多问题不能得到最终答案,甚至无法解决。高等数学用运动的辨正观点研究变量及其依赖关系,极限的方法是研究变量的一种基本方法,贯穿高等数学的始终。用高等数学解决实际问题,计算往往比较简单,且能获得最终的结果。

(2) 从有限到无限　初等数学解决实际问题常常只能在有限的范围内来研究问题,具有较大的局限性,高等数学则在无限的范围内来研究,从有限到无限。

(3) 从具体到抽象　初等数学研究问题抽象性较低,基本上是指具体的、实际的问题,高等数学则越来越抽象。

3. 为什么要学习高等数学

在当今,科学分为自然科学、社会科学和数学科学三大类的观点为学术界所认可,数学有科学之母的美称。数学与能源、材料等并列为必须优先发展的基础研究领域。

高等数学课程是高职高专院校理工科、经济管理等学科各专业学生必修的一门重要的基础理论课和工具课。因此,高等数学学习不仅关系到学生在整个大学期间的学习质量,而且还关系到学生的思维品质、思辨能力、创造潜能等科学和文化素养。它在培养学生的综合素质和创新意识方面起着十分重要的作用。

学好高等数学,充分利用数学的工具性和基础作用,为学生在后继专业基础课和专业课程的学习扫清障碍、做好铺垫。同时,学生通过高等数学的学习奠定较坚实的数学基础,形成较强的自我学习、可持续发展的能力。因此,学好高等数学对我们来说非常重要。

4. 如何学好高等数学

由于数学高度的抽象性和严密的逻辑性,平心而论,高等数学确实是一门比较难的课程。如微积分中极限概念的理解、无穷小量概念、无限累加思想、空间解析几何等。

因此,很多学生困惑“怎样才能学好这门课程?”“学了高数有什么用?”这些问题。要想学好高等数学,要做到以下几点:

(1) 正确理解概念　高等数学内容主要是概念、定义、性质、定理等知识点,以及帮助消化理解这些知识点的例题和习题。概念反映的是事物的本质,弄清楚了它是如何定义的、有什么性质,才能真正地理解一个概念。

(2) 掌握定理和方法　定理是一般分为条件和结论两部分。要正确的理解定理的条件和结论,理解其内涵,掌握它的实质。对于在学习中用的方法,应熟练掌握,灵活应用。

(3) 在弄懂例题的基础上作适量的习题　教材上的例题都是很典型的,有助于理解概念和掌握定理,要注意不同例题的特点和解法,在理解例题的基础上做适量的习题。作题时要善

于总结。这样,作完之后才会有所收获,才能举一反三。

(4) 总结提高　要对所学的知识有个整体的把握,及时总结知识体系,这样不仅可以加深对知识的理解,还会对进一步的学习有所帮助。同时要总结所学知识中所蕴含的数学思想方法。

(5) 和自己的专业相联系　在学习中和自己的专业加强联系,对数学应用意识、兴趣及能力培养是非常重要的。

Contents

工·程·数·学·基·础

目　录

第一章

函数、极限与连续

函数是高等数学的基础，是现实生活和生产实践中量与量之间的依从关系在数学中的反映，是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象。极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键。连续是函数的一个重要性态。本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法。

第一节 函数的概念

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着。17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海问题等）的研究中引出了函数这个基本概念。此后 200 多年以来，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置。本节将介绍函数的概念、函数关系的结构与函数的特性。

一、常量与变量

1. 变量的定义

我们在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量。其中，有的量在过程中不起变化，称之为**常量**；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，称之为**变量**。

注： 在过程中还有一种量，它虽然是变化的，但是它的变化相对于所研究的对象是极其微小的，我们则把它看作常量。

2. 邻域

定义 1 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中，点 a 叫做该邻域的**中心**，δ 叫做该邻域的**半径**，如图 1－1 所示。数集 $\{x|0<|x-a|<$

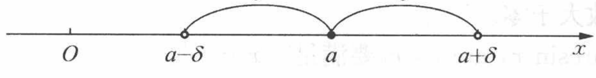

图 1－1

$\delta\}$ 称为点 a 的 δ **空心邻域**，记为 $U^{\circ}(a, \delta)$，即

$$U^{\circ}(a, \delta)=\{x \mid a-\delta<x<a \text{ 或 } a<x<a+\delta\}。$$

【例题 1】 写出下例各点的邻域和空心邻域所表示的数集：

(1) $U(0, 0.1)$； (2) $U(1, 0.01)$； (3) $U(3, 0.02)$； (4) $U^{\circ}(-1, 0.1)$。

解：(1) $a=0$，$\delta=0.1$，因为 $U(0, 0.1)=\{x \mid 0-0.1<x<0+0.1\}$，因此，$U(0, 0.1)$ 表示区间 $(-0.1, 0.1)$。

(2) $a=1$，$\delta=0.01$，因为 $U(0, 0.1)=\{x \mid 1-0.01<x<1+0.01\}$，因此，$U(1, 0.01)$ 表示区间 $(0.99, 1.001)$。

(3) $a=3$，$\delta=0.02$，因为 $U(3, 0.02)=\{x \mid 3-0.02<x<3+0.02\}$，因此，$U(3, 0.02)$ 表示区间 $(2.98, 3.02)$。

(4) $a=-1$，$\delta=0.1$，因为 $U^{\circ}(-1, 0.1)=\{x \mid -1-0.1<x<-1\} \cup \{x \mid -1<x<-1+0.1\}$，因此，$U^{\circ}(-1, 0.1)$ 表示区间 $(-1.1, -1) \cup (-1, -0.9)$。

二、函数的概念

1. 函数的定义

定义 2 设有两个非空集合 D, M，如果当变量 x 在 D 内任意取定一个数值时，按照确定的法则 f，在 M 内有唯一的 y 与它相对应，则称 y 是 x 的**函数**。通常 D 叫做这个**函数的定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**函数值(或因变量)**，变量 y 的变化范围 M 叫做这个**函数的值域**。其中定义域 D 和对应法则 f 叫做函数的两要素。

为了表明 y 是 x 的函数，我们用记号 $y=f(x)$，$y=F(x)$ 等来表示。这里的字母"f"，"F"表示 y 与 x 之间的对应法则即函数关系，它们是可以任意采用不同的字母来表示的。如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数。这里我们只讨论单值函数。

【例题 2】 设函数 $f(x)=x^3-x+3$，求 $f(0)$，$f(a)$，$f(a^2)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$。

解：$f(0)=3$，$f(a)=a^3-a+3$，

$f(a^2)=(a^2)^3-(a^2)+3=a^6-a^2+3$，

$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^3-\left(\dfrac{1}{a}\right)+3=\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{a}+3$。

2. 函数的定义域

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，其定义域根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是对抽象地用算式表达式的函数，通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合。一般应遵循以下原则：

(1) 在分式中分母不能为零。

(2) 在偶次根式内非负。

(3) 在对数中真数大于零。

(4) 反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $|x| \leqslant 1$。

(5) 两函数和(差)的定义域，应是两函数定义域的公共部分。

(6) 分段函数的定义域是各段定义域的并集。

(7) 求复合函数的定义域时，一般是由外层向里层逐步求解。

(8) 求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集。

【例题 3】 确定下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$；　(2) $y=\ln(x-2)$。

解：(1) 要使得算式有意义，x 应满足不等式 $3+2x-x^2\geqslant 0$，即

$$x^2-2x-3\leqslant 0。$$

解此不等式，得其定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$，即$[-1,\ 3]$。

(2) 要使得算式有意义，x 应满足不等式 $x-2>0$，有 $x>2$，即函数的定义域为$(2,\ +\infty)$。

【例题 4】 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}+\sqrt{5-x}$；　(2) $g(x)=\arccos \mathrm{e}^{x-1}$；

(3) $h(x)=\sqrt{\ln(\mathrm{sln}\,x)}$。

解：(1) 该函数的定义域满足 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x^2-4\neq 0\\ 5-x\geqslant 0\end{cases}$，解方程组得 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x\neq\pm 2\\ x\leqslant 5\end{cases}$，在数轴上画出区间，取其交点便得 $f(x)$的定义域为$[1,\ 2)\cup(2,\ 5]$。

(2) 该函数的定义域满足 $-1\leqslant \mathrm{e}^{x-1}\leqslant 1$。因为 $\mathrm{e}^{x-1}>0$，上述不等式左边总是成立的。$\mathrm{e}^{x-1}\leqslant 1=\mathrm{e}^0$。所以函数 $g(x)=\arccos \mathrm{e}^{x-1}$ 的定义域为 $x-1\leqslant 0$，即 $x\leqslant 1$。

由此例可知，已知某函数定义域求另一与此有关的函数的定义域的方法，可以称为变量变换法。作一个适当的变量变换，将已知的定义域转化为欲求的定义域。

(3) 由 $h(x)$的表达式知，函数应满足 $\ln(\ln x)\geqslant 0$，也就是 $\ln x\geqslant 1$，即 $x\geqslant 10$。此即为 $h(x)$的定义域。

由此例可见，求复合函数的定义域时，一般是由外层向里层逐步求解。

【例题 5】 (1) 已知 $f(x)$的定义域为$[0,\ 1]$，求 $f(\ln(x+1))$的定义域；

(2) 已知 $f(\mathrm{e}^x)$的定义域为$(-1,\ 1)$，求 $f(x)$的定义域。

解：(1) 记 $g(x)=f(u)$，$u=\ln(x+1)$。外层函数的定义域 $0\leqslant u\leqslant 1$ 限制了内层函数 $u=\ln(x+1)$ 的取值范围 $0\leqslant\ln(x+1)\leqslant 1$，即 $\mathrm{e}^0\leqslant x+1\leqslant \mathrm{e}^1$，即 $0\leqslant x\leqslant \mathrm{e}-1$。

故 $g(x)=f(\ln(x+1))$ 的定义域为$[0,\ \mathrm{e}-1]$。

(2) 记 $u=\mathrm{e}^x$，从而知 $f(u)$的定义域为 $\mathrm{e}^{-1}<u<\mathrm{e}^1$。于是知 $f(x)$的定义域为 $\mathrm{e}^{-1}<x<\mathrm{e}$。

3. 函数相等

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为定义域、对应关系和值域。由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称两个**函数相等**。

【例题 6】 判断下列函数是否为相等函数：

(1) $y=|x|$ 和 $y=\sqrt{v^2}$；　(2) $y=1$ 和 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

(3) $y=x+1$ 和 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$；　(4) $y=\ln x^2$ 和 $y=2\ln x$；

(5) $y=\cos x$ 和 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$；　(6) $y=\ln 5x$ 和 $y=\ln 5\cdot\ln x$。

解：因为(1)与(2)中两函数的两要素分别相同，所以是相等函数；(3)与(4)中两函数的定义域不同，所以是不相等函数；(5)和(6)的对应法则不同所以是不相等函数。

4. 函数的表示方法

(1) 解析法　用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法，即是解析法。例如，在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$。

根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为显函数、隐函数、用参数方程表示的函数和分段函数 4 种。

① 显函数：函数 y 由 x 的解析表达式直接表示。例如，$y=(x+1)^2$。

② 隐函数：函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x, y)=0$ 来确定。例如，$e^{xy}=x+y$。

③ 参数方程表示的函数：函数自变量 x 与因变量 y 的对应关系通过第三个变量联系起来。例如，$\begin{cases} x=g(t) \\ y=f(t) \end{cases}$，$t$ 为参变量。

④ 分段函数：函数在定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式。以下举几个分段函数的例子。

(2) 表格法　将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法，即是表格法。例如，某地某一天的气温每隔两个小时的数据记录于下表：

时间/h	0	2	4	6	8	10	12
温度/℃	6	7	7	8	12	16	24

(3) 图示法　用坐标平面上曲线来表示函数的方法，即是图示法。一般用横坐标表示自变量，纵坐标表示因变量。例如，在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆用图示法表示，如图 1-2 所示。

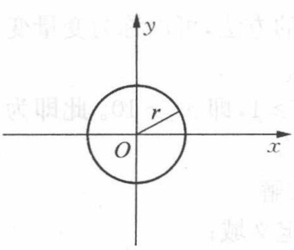

图 1-2

【引例 1】　绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域 $M=[0, +\infty)$，如图 1-3 所示。

【引例 2】　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$，值域为 $M=\{-1, 0, 1\}$，如图 1-4 所示。

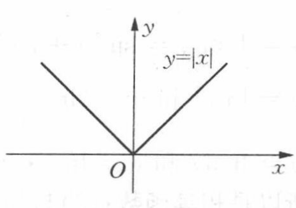

图 1-3

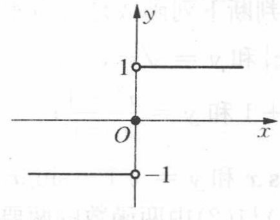

图 1-4

【引例 3】　取整函数 $y=[x]$，其中，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。例如，$\left[\frac{2}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-2.3]=-3$。

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=Z$，如图 1-5 所示。

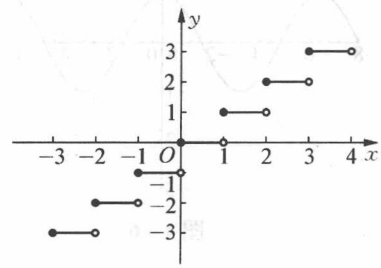

图 1-5

【引例 4】　狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $M=\{0,1\}$。

【例题 7】　设函数 $\begin{cases}3x+1 & x\leqslant 1\\ x^2-1 & x>1\end{cases}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f[f(1)]$的值。

解：$f(0)=3(0)+1=1$；$f(2)=2^2-1=3$；由于 $f(1)=4$，因此 $f[f(1)]=f(4)=4^2-1=15$。

习题 1-1

1. 判断下列各组函数是否相等，并说明理由：

(1) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$；　(2) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；

(3) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(4) $f(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$。

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(2) $f(x)=\dfrac{\lg(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求函数 $f(x+3)$ 定义域。

4. 某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元，超过部分每公里为 $\dfrac{4}{5}k$ 元。求运价 m 和里程 s 之间的函数关系。

第二节

函数的几种性质

一、函数的有界性

如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们就称 $f(x)$ 在区间 I 有界；否则，便称无界。

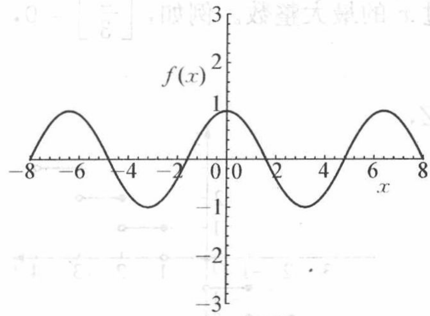

图 1-6

注： 一个函数，如果在其整个定义域内有界，则称为有界函数。

例如，函数 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，如图 1-6 所示。

再如，当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$，所以函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数。这里 $M = 1$。（当然，也可以取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)| < M$ 成立。）

有界函数的图像是位于直线 $y = -M$ 与 $y = M$ 之间的带状区域。

二、函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而增大，即，对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是**单调增加**的。如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 增大而减小，即，对于 (a, b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是**单调减小**的。

例如，函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的，在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是减少的。

再如，函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减小的，在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的。

三、函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 对于定义域 $(-a, a)$ 内的任意 x 都满足 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**偶函数**；如果函数 $f(x)$ 对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**奇函数**。

注： 偶函数的图形是关于 y 轴对称的，如函数 $y = \cos x$；奇函数的图形是关于原点对称的，如函数 $y = \sin x$。

【例题 1】 判断函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性。

解： $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$。

由函数奇偶性的定义知，该函数在其定义区间内为奇函数。

【例题 2】 (1) 讨论 $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ 的奇偶性；(2) 设 $\varphi(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，$\psi(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数，讨论 $\psi(\varphi(x))$ 的奇偶性。

解析 函数的奇偶性一般按定义讨论。

解： (1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且 $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) = f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

(2) $\psi(\varphi(-x)) = \psi(-\varphi(x)) = \psi(\varphi(x))$，所以 $\psi(\varphi(x))$ 为偶函数。