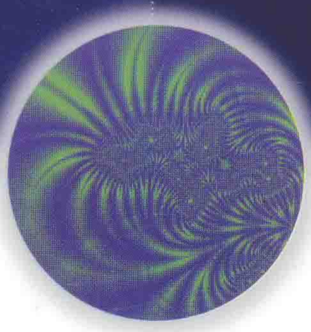
"十二五"
普通高等教育本科
国家级规划教材

# 大学数学

## ——微积分习题课教程


吉林大学数学学院 主编
白岩 刘静 马瑞杰


第3版 下册




高等教育出版社

“十二五”
普通高等教育本
国家级规划教材

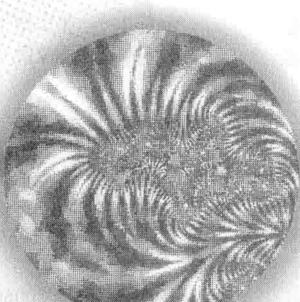
eijifen Xitike Jiaocheng

# 大学数学

## ——微积分习题课教程

吉林大学数学学院
白岩 刘静 马瑞杰 主编

第3版 下册



高等教育出版社·北京

内容提要

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材，是与《大学数学——微积分》（第3版）配套的习题课教材，全书共分上、下两册。上册有六讲，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，空间解析几何；下册有七讲，内容包括：多元函数的极限和连续性，多元函数的微分学及其应用，重积分，第一型曲线积分与曲面积分，第二型曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程与差分方程。每一讲包含内容提要、例题解析、练习题及练习题参考答案，书末附两套综合练习题及答案。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生选用，也可供工程技术人员参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

大学数学．微积分习题课教程．下册／白岩，刘静，马瑞杰主编．--3版．-- 北京：高等教育出版社，2015.8

ISBN 978-7-04-043518-4

Ⅰ．①大…　Ⅱ．①白…　②刘…　③马…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材②微积分－高等学校－教材　Ⅳ．①O13 ②O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第164725号

策划编辑　兰莹莹　　责任编辑　李冬莉　　封面设计　张申申　　版式设计　王艳红
插图绘制　杜晓丹　　责任校对　张小镝　　责任印制　赵义民

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　北京市白帆印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　14
字　　数　260千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598

网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn

版　　次　2006年5月第1版
　　　　　2015年8月第3版
印　　次　2015年8月第1次印刷
定　　价　22.50元


物 料 号　43518-00

# 《大学数学》教材编委会

# 第三版前言

《大学数学》教材第二版面世已经 5 年多了, 在此期间, 许多高校同行和读者给我们提出了宝贵的意见, 也给予本套教材充分的肯定。结合过去 5 年读者反馈的意见、我们使用本套教材的体会和近几年大学数学课程改革的最新成果, 编委会决定对本套教材进行再次修订、完善, 以更好地适应当前的教学需求。

本次修订的指导思想是: 1. 保持原书的风格与特色, 力求叙述严谨准确, 清晰易懂。2. 与主教材紧密配合, 通过习题课教程的学习, 读者能够进一步加深对课程内容的理解和掌握。3. 合理安排每讲内容, 力求题型全面, 难易适中, 深入浅出。

根据读者的意见和我们的教学实践, 本次修订改正了第二版中存在的不当之处, 更换了部分例题和习题, 使内容更充实, 题型更全面。在例题解析中, 更加注重学习方法和解题技巧, 为读者解惑答疑, 使得内容的编排、例题与习题的搭配更加合理, 文字叙述和理论推导更加准确、完善。

参加本书第三版修订的有马瑞杰 (第一、二讲)、刘静 (第三、四、七讲)、白岩 (第五、六讲), 最后由白岩统审、定稿。

在本书的修订过程中, 得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社理工出版事业部数学分社的大力支持和帮助, 吴晓俐女士承担本套教材修订的编务工作, 在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限, 书中不当之处, 敬请广大读者批评指正。

《大学数学》教材编委会

2015 年 3 月

# 第二版前言

《大学数学》系列教材面世已经 5 年了。在此期间，有不少高校同行在使用本系列教材的过程中提出了许多宝贵意见。结合过去 5 年我们使用本系列教材的教学实践经验和近几年大学数学课程改革的一些新动态，编委会决定对本系列教材进行修订、完善。

这次习题课教程修订的指导思想是: 1. 与主教材紧密配合，通过习题课的讲解，使读者进一步加深对课程内容的理解。2. 基本按习题课的学时安排编写每一讲，教师也可根据教学情况进行调整。3. 习题的难易搭配适中。

本书密切配合《大学数学 —— 微积分》(第二版) (下册)，内容充实，题型全面，各讲首先概括总结主要内容，继而进行例题选讲，并配有练习题、综合练习题及参考答案。本书总结学习规律，解决疑难问题，提示注意事项，特别注重提高学生分析问题、解决问题的能力。

本书第一、二讲由马瑞杰编写，第三、四、七讲由刘静编写，第五、六讲由白岩编写，最后由白岩统审、定稿。

在本书的修订过程中，得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助，吴晓俐女士承担了本系列教材的编务工作，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中的错误和不当之处，敬请读者批评指正。

《大学数学》系列教材编委会

2010 年 3 月

# 第一版前言

大学数学习题课教程系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》的配套教材。本套教材分两册:《微积分习题课教程》和《线性代数与随机数学习题课教程》。每册分上、下两篇。《微积分习题课教程》的上篇为一元微积分, 下篇为多元微积分。《线性代数与随机数学习题课教程》的上篇为线性代数, 下篇为随机数学。

大学数学习题课教程系列教材借鉴了国内外同类教材的精华, 汲取了当前教学改革和教学研究的最新成果; 是针对非数学类专业理工科大学生对基础数学的要求而编写的。本教材密切配合大学数学系列教材, 注意到了时代的特征和学生的特点, 本着“加强基础、强化应用、整体优化、注重后效”的原则, 力争做到科学性、系统性与可行性的统一。其特点是: 体现了现代数学思想与方法, 解决疑难问题, 总结学习规律, 提示注意事项, 特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力。本教材可作为高等学校非数学类理工科各专业学生学习数学的辅助教材或参考书。本教材内容充实, 每章配有综合练习及参考答案与提示。参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者。

《微积分习题课教程》上篇共五章, 第一章由张朝凤编写, 第二章由王瑞廷编写, 第三章由王颖编写, 第四章由王颖和李岩波编写, 第五章由李岩波编写; 上篇由张朝凤统审、定稿。下篇共七章, 第六、七章由马瑞杰编写, 第八、九章由刘静编写, 第十章由白岩编写, 第十一章由赵建华编写, 第十二章由韩燕编写; 下篇由赵建华统审、定稿。

在《大学数学习题课教程》的编写过程中, 得到了吉林大学教务处和数学学院的大力支持。青年教师孙鹏、任长宇及研究生王军林、姜政毅、徐忠海、高懿、陈明杰、杨旭辉、朱复康完成了本套教材的排版制图工作。在此一并致谢。编者要特别感谢高等教育出版社数学分社的领导和编辑们, 他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平有限, 书中的错误和不妥之处, 恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 5 月

# 目　　录

# 第一讲　多元函数的极限和连续性

## 内 容 提 要

### 1.1　二元函数的定义

设 $D$ 为平面上的一个点集, 若 $\forall(x,y)\in D$, 变量 $z$ 按一定的法则, 总有确定的值和它对应, 则称变量 $z$ 是变量 $x,y$ 的二元函数, 记作 $z=f(x,y)$.

### 1.2　二元函数的极限

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某去心邻域内有定义, $A$ 为常数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时, 有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, 则称函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)$ 趋于 $(x_0,y_0)$ 时, 以 $A$ 为极限, 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

### 1.3　二元函数的连续性

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$, 则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续.

### 1.4　有界闭区域上连续函数的性质

(1) 有界性定理: 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则它在 $D$ 上有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $\forall(x,y)\in D$, 都有

$$|f(x,y)|\leqslant M.$$

(2) 最值定理: 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则它在 $D$ 上必有最小值和最大值, 即 $\exists(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$, 使得 $\forall(x,y)\in D$, 都有

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2).$$

## 例 题 解 析

【例 1】 设 $f\left(\sqrt{x^2+y^2},\arctan\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, 求 $f(x,y)$.

【解】 设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$,

$$f(u,v)=\frac{u\cos v\cdot u\sin v}{[(u\cos v)^2+(u\sin v)^2]^2}=\frac{\sin 2v}{2u^2},$$

故

$$f(x,y)=\frac{\sin 2y}{2x^2}.$$

【注】 已知复合函数的表达式, 求简单函数, 只需通过中间变量 $u,v$ 的表达式解出 $x,y$, 代入复合函数中即可.

【例 2】 求 $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域并画出其图形.

【解】 要使 $\ln[x\ln(y-x)]$ 有意义, 应有 $y-x>0, x\ln(y-x)>0$, 即

$$y>x\text{ 且 }\begin{cases}x>0,\\ \ln(y-x)>0\end{cases}\qquad\text{或 } y>x\text{ 且 }\begin{cases}x<0,\\ \ln(y-x)<0.\end{cases}$$

故函数的定义域为

$$\begin{cases}x>0,\\ y>x+1\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}x<0,\\ x<y<x+1.\end{cases}$$

如图 1.1 (阴影部分) 所示.

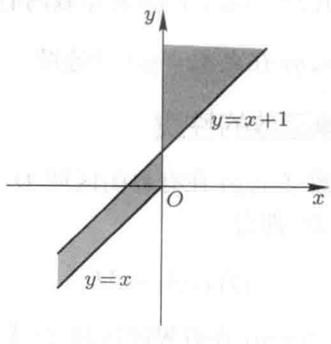



图 1.1

【例 3】 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2)$.

**【解】** (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = 2.$

(2) 由于

$$0 \leqslant \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2 \to 0 \quad (x\to 0, y\to 0),$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

(3) 由于 $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$, 则

$$0 \leqslant |xy\ln(x^2+y^2)| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|.$$

设 $u = x^2+y^2$, 则

$$x\to 0,\quad y\to 0 \text{ 时 } u\to 0.$$

又

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = \lim_{u\to 0} u\ln u$$
$$= \lim_{u\to 0} \frac{\ln u}{\dfrac{1}{u}} = \lim_{u\to 0} \frac{\dfrac{1}{u}}{-\dfrac{1}{u^2}} = 0.$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\ln(x^2+y^2) = 0.$$

**【注】** 多元函数极限计算往往借助一元函数极限计算的各种方法及公式, 但不能直接使用 L'Hospital 法则.

**【例 4】** 证明函数 $z = (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 在点 $(0,0)$ 处的极限不存在.

**【证明】** 令 $x+y=2x$, 即 $y=x$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}]^{\frac{x^2}{2x}} = 1.$$

而令 $x+y=x^2$, 即 $y=x^2-x$, 则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2-x}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim_{x\to 0}(1+(x^3-x^2))^{\frac{1}{x^3-x^2}\cdot\frac{x^3-x^2}{x^2}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

以上两个极限值不相等, 故函数在 $(0,0)$ 处的极限不存在. □

**【注】** 证明多元函数极限不存在, 可通过选择不同的路径, 其极限值不相等即可.

**【例 5】** 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

**【解】** (1) 显然函数在 $x\neq 0$ 处连续, 而在直线 $x=0$ 上任意一点 $(0,y_0)$ 处, 由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=y_0=f(0,y_0),$$

故函数在直线 $x=0$ 上连续, 从而函数在 $xOy$ 平面上处处连续.

(2) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 有

$$xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=r^2\cos\theta\sin\theta\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2}=\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta,$$

$$0\leqslant\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta\right|\leqslant\frac{1}{4}r^2,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{1}{4}r^2\sin 4\theta=0=f(0,0),$$

即函数在 $xOy$ 平面上处处连续.

**【例 6】** 求函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0\end{cases}$$

的定义域, 并证明 $f(x,y)$ 在其定义域内连续.

【解】 函数的定义域为 $1+xy>0$. 当 $x \neq 0$ 时, 函数 $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$ 连续. 又

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} f(x,y) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to b}} \frac{\ln(1+xy)}{x}\\ &= b = f(0,b).\end{aligned}$$

由 $b$ 的任意性, 知 $f(x,y)$ 处处连续.

【注】 一切多元初等函数在其定义区域内连续.

【例 7】 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当一个变量固定时, 对另一个变量是连续的, 但 $f(x,y)$ 在原点处是不连续的.

【证明】 先固定 $y=a$, 若 $a\neq 0$, 则得变量 $x$ 的函数

$$g(x)=f(x,a)=\frac{2ax}{x^2+a^2},$$

显然 $g(x)$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 均连续; 若 $a=0$, 则 $f(x,0)\equiv 0$, 显然连续, 故当变量 $y$ 固定时, 函数 $f(x,y)$ 对变量 $x$ 是连续的. 同理可证, 当变量 $x$ 固定时, 函数 $f(x,y)$ 对变量 $y$ 也是连续的.

当点 $(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2},$$

随着 $k$ 的取值不同极限值不同, 从而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在, 故 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续. □

【注】 此例说明, 对二元函数 $z=f(x,y)$, 即使 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处对变量 $x$ 和 $y$ 均连续, 也保证不了其在该点的连续性.

# 练 习 题

1. 试判断 $z_1=\ln[x(x-y)]$ 与 $z_2=\ln x+\ln(x-y)$ 是否为同一函数, 为什么?

2. (1) 设 $f(x,y)=x^y+y^x$, 求 $f(xy,x+y)$;

(2) 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|}$, 求 $f(x)$;

(3) 设 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$, 求 $f(x,y,z)$.

3. 求下列函数的定义域并绘图:

(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; (2) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$;

(3) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$; (4) $z=\ln(1-|x|-|y|)$.

4. 求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-x+xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

5. 证明下列函数当 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限不存在:

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$; (2) $z=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

6. 求下列函数的不连续点:

(1) $z=\dfrac{xy}{x+y}$; (2) $z=\dfrac{1}{\sin x\cos y}$;

(3) $z=\dfrac{1}{\sin(x^2+y^2)}$; (4) $z=\ln(1-x^2-y^2)$.

# 练习题参考答案

1. 不是. 因为 $z_1$ 与 $z_2$ 的定义域不同.

2. (1) $(xy)^{x+y}+(x+y)^{xy}$; (2) $\sqrt{1+x^2}$; (3) $x^z+z^{x+y}$.

3. (1) $y\geqslant 0, x\geqslant 0, x^2\geqslant y$;

(2) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\dfrac{1}{4}, (x-1)^2+y^2<1$;

(3) $4x\geqslant y^2, 0<x^2+y^2<1$;

(4) $|x|+|y|<1$.

4. (1) 1; (2) $-\dfrac{1}{4}$; (3) 0.

5. (1) 略; (2) 选 $y=kx^3$.

6. (1) $x+y=0$; (2) $x=k\pi, y=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ ($k$ 为整数);

(3) $x^2+y^2=n\pi$ ($n$ 为整数); (4) $x^2+y^2=1$.

# 第二讲　多元函数的微分学及其应用

## 内 容 提 要

### 2.1　偏导数

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义, 则函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 和 $y$ 的偏导数分别定义为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

### 2.2　高阶偏导数

如果函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ 对于 $x,y$ 的偏导数仍存在, 则称它们为函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数, 记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y),$$

其中 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 为 $z=f(x,y)$ 的两个混合二阶偏导数. 当这两个混合二阶偏导数都连续时, 有 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

### 2.3　全微分

如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$