先行一步 胜人一筹

——数学规划初步

章宗鉴

湖北教育出版社

先行一步，胜人一筹

——数学规划初步

章宗鉴

湖北教育出版社

先行一步　胜人一筹

——数学规划初步

章 宗 鉴

*

湖北教育出版社出版、发行　新华书店湖北发行所经销
通山县印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本　5印张　123 000字
1990年 5 月第1版　1990年 5 月第1次印刷
印数：1—1,200
ISBN 7—5351—0504—1/G·394
定价：2.20元

内 容 提 要

全书共八章，内容包括线性规划、整数规划、动态规划及非线性规划初步四个部分. 简要介绍各部分的基本概念、原理和方法，重点讲解其应用.

本书深入浅出，通俗易懂，行文流畅，趣味生动. 只需具备中学数学知识就能顺利阅读，便于自学.

本书可作为中学生、中专生的普及读物或课外读物，也可供从事这方面教学和科普工作者参考.

目 录

第一章　线性规划

§1　线性规划简介 …… 1
§2　线性规划问题的表述 …… 3

第二章　线性规划的数学原理

§1　线性规划问题的图解法 …… 8
§2　线性规划问题的代数解法 …… 12

第三章　单纯形法

§1　单纯形法 …… 19
§2　单纯形法的进一步讨论 …… 25

第四章　对偶问题

§1　对偶问题的提出 …… 37
§2　原问题与其对偶问题的关系 …… 41
§3　对偶单纯形法 …… 46

第五章　运输问题

§1　运输问题的数学模型 …… 51
§2　运输问题的图上作业法 …… 54
§3　改进的图上作业法 …… 61

§4　中国邮递员问题 …………………………………… 66
§5　运输问题的表上作业法 ……………………………… 71

第六章　　整数规划

§1　整数规划问题的提出 ………………………………… 85
§2　分枝定界法 ………………………………………… 89
§3　割平面法 …………………………………………… 93
§4　0—1 型整数规划 …………………………………… 100
§5　分派问题 …………………………………………… 108

第七章　　动态规划简介

§1　多阶段决策问题 …………………………………… 116
§2　动态规划问题的解法 ………………………………… 117

第八章　　非线性规划初步

§1　基本概念 …………………………………………… 129
§2　图解法 ……………………………………………… 131
§3　一维搜索 …………………………………………… 134

第一章　线性规划

§1　线性规划简介

数学规划（或称规划论）主要包括线性规划、整数规划、动态规划及非线性规划四个部分，它是运筹学的一个重要分支．所谓“运筹”，就是运用和筹划．而运用指安排、使用、调度、控制；筹划指筹算、规划．通俗地说，就是动脑筋，想办法，我国古代早就有“运筹帷幄之中，决胜千里之外”的说法，但作为一门成熟的学科来说，却是近几十年的事．

运筹学虽有许多分支，如数学规划、排队论、对策论、图论、存贮论及质量控制论等等．但就其所运用的数学方法来讲，大体上可分为两类．一类是求各式各样的条件极值问题——数学规划；另一类是研究随机现象的过程和状态的数学方法，如排队论和质量控制论．

对于数学规划来说，线性规划是研究较早、理论较完整的，而应用又最为广泛的一个分支．它是数学规划以及运筹学其它一些分支的基础．线性规划问题最早是苏联数学家康脱诺维奇于 1939 年在他发表的《生产组织与计划中的数学方法》一书中提出来的．但是，在当时并未引起人们的注意，他也没能给出一个解一般线性规划问题的方法．直到 1947 年美国数学家丹捷格提出了单纯形法之后，线性规划理论才日趋完善，应用日益广泛．根据美国《幸福》杂志对全美为首的 500 家大公司的调查，线性规划的应用范围十分广泛，其中有 85%的公司频繁地使用线性规划．国内在产品生产的配比量、下料、库存以及运输等方面均采用了线性规划方法，并取得

了一定的成果.

为了介绍线性规划，在此先举两个求最小值和最大值的例子.

【例 1】　已知一个边长为 a 的正方形 $ABCD$. 现在从 A、B、C、D 分别向 B、C、D、A 方向截取相等线段 AP、BQ、CR、DS，连接 PQ、QR、RS、SP 成一个正方形 $PQRS$. 要使这个正方形的面积最小，P、Q、R、S 应在怎样的位置？并正方形 $PQRS$ 的面积的最小值是多少？

〔解〕　见图 1-1，设 $x = AP = BQ = CR = DS$，那么 $PB = QC = RD = SA = a - x$. 正方形 $PQRS$ 的面积

$$S = x^2 + (a - x)^2$$
$$= 2x^2 - 2ax + a^2$$

从一元二次函数的极值求法知，当 $x = \frac{-(-2a)}{2\times 2} = \frac{a}{2}$ 时，S 为极小值，这一问题肯定有最小值，此时极小值就是最小值，且最小值为

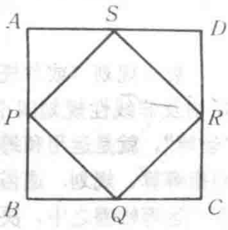

图 1—1

$$(\frac{a}{2})^2 + (a - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{2}$$

【例 2】　欲将一块边长为 60 cm 的正方形白铁片做成一个开口的盒子，要在四角截去一个同样大小的小正方形. 问小正方形的边长为多少时，盒子容积最大？

〔解〕　见图 1-2. 设 x 表示所截去的小正方形每边之长. V 表示开口盒子的容积. 由长方体求积公式，得到

$$V = x(60 - 2x)^2$$

如何来求这一问题的最大值呢？通常可采用求导的方法，但也可以用初等数学的方法来解.

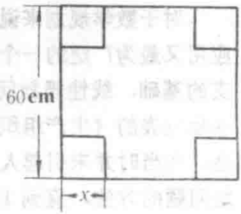

图 1—2

将上式略加变换，便有

$$4V = 4x(60 - 2x)(60 - 2x)$$

由于在求积公式两边乘上一个常数“4”，因此，当 $4V$ 为极大时，V 也必为极大. 又从初等数学知道：“如果若干个正数的和等于一个常数，则当这些正数都相等时，其乘积极大.”这里，$4x+(60-2x)+(60-2x)=120$，为常数. 所以使乘积 $4V$ 为极大（显然这时 V 也为极大），必须

$$4x=60-2x=60-2x$$

即 $x=10\text{cm}$. 同上例，此时的极大值就是最大值. 于是，当每边各裁去 10cm 时，所做成的开口盒子容积为最大，其值为

$$10\times(60-2\times10)^2=16000(\text{cm}^3)$$

最小值，最大值问题的应用极其广泛. 例 1、例 2 都是一个自变量，且有唯一解的最小、最大值问题. 但在实际生活中，问题往往复杂得多. 所涉及的自变量一般不止一个，而且常具有多个解，要从中选取一个（有时可能是数个相互等价的）最优解. 遇上这类问题，采用微分学的求导方法已无能为力了，初等数学的方法更无济于事. 若是采用线性规划的方法，则可能迎刃而解.

线性规划所研究的问题主要有两类. 一类是在给定数量的人力、物力和时间等资源下，如何运用这些资源去完成最大量任务；另一类是在给定任务的情况下，如何统筹安排，使用最小量的资源去完成这项任务. 其实这两类问题只不过是同一个问题的两种不同提法而已. 象初等数学中，如“在周长为一定的四边形中，以正方形的面积为最大”及“在面积为一定的四边形中，以正方形的周长为最小”，就是同一个问题的两种不同提法，这两类问题的解答之间存在着一定的联系. 这种联系表现为，只要其中一类问题有解答后，另一类问题就不难解出.

§2 线性规划问题的表述

初学者往往会问：什么是规划？为什么叫线性规划？

所谓规划，是指在一定的条件下运用特定的方法（这里是用数

学的方法)，达到最佳的效果．之所以称为线性规划，是因为反映问题的具体数学模型的所有方程、不等式以及函数全是一次型的，而一次方程、一次不等式和一次函数在数学上称为线性方程，线性不等式和线性函数．

线性规划所讨论的问题有什么特点呢?如何对它进行描述呢?为了回答这一问题，我们先看两个例子．

【例 3】 某家俱厂有木料 180 米^3,五合板 1200 米^2,准务加工成写字台和书橱出售。已知出售一张写字台和一个书橱分别可获利润 40 元和 60 元；生产每张写字台和每个书橱所消耗的木料和五合板如表 1-1 所示．问如何安排生产可使该厂的总利润最大?

表 1-1

	写字台（张）	书橱（个）
木料（米^3）	0.1	0.2
五合板（米^2）	2	1

这个问题的目标是追求最大利润，即是一个求极大值的实际问题．其次，家俱厂的生产可以有多种可供选择的方案．如由于书橱利润大，可以只生产书橱．按现有的木料可生产书橱 $180 \div 0.2 = 900$ 个；按现有的五合板可生产书橱 $1200 \div 1 = 1200$ 个．而书橱是由木料和五合板做成的，如果全部作书橱，五合板有大量剩余；如只生产写字台，经类似分析只能生产 600 张，木料有大量剩余．显然，必须同时生产两种产品，才能充分利用木料和五合板两种资源，从而获得最大利润．可是，两种产品的搭配组合，又有多种情况，必须合理安排才能达到目的．

要解决这个问题，必须先将它归结为数学问题，即把它抽象为一组数学式子，称之为数学模型，然后再求解．建立一个实际问题的数学模型，一般采用以下四个步骤（以例三为例）：

第一步 为明确该问题的背景，必须把具体问题的条件列成表

格形式（表 1-2），使之一目了然.

表 1-2

	写字台（张）	书橱（个）	材料资源
木料（米^3）	0.1	0.2	180
五合板（米^2）	2	1	1200
利润（元）	40	60	

第二步　将需要决定的主要因素设为未知量，称为决策变量.

在本例中设写字台如书橱的产量分别为 x_1 和 x_2.

第三步　把问题所要达到的目标，用决策变量的函数表示出来，称之为目标函数.

在本例中，该厂所获总利润为 Z，则

$$Z = 40x_1 + 60x_2$$

第四步　把问题的各限制条件列成方程或不等式.

在本例中，写字台和书橱所用木料总数不能超过厂内现有木料数，即

$$0.1x_1 + 0.2x_2 \leqslant 180 \tag{i}$$

同样地，写字台和书橱所用五合板总数不能超过厂内现有五合板数，即

$$2x_1 + x_2 \leqslant 1200 \tag{ii}$$

另外，写字台和书橱的产量不能为负数，故有

$$x_1 \geqslant 0 \quad , \quad x_2 \geqslant 0 \tag{iii}$$

(i)，(ii)，(iii) 联合在一起，构成该问题的约束条件.

综上所述，这个问题的数学模型可写成

求 $\mathrm{Max}Z = 40x_1 + 60x_2$，且满足

$$\begin{cases} 0.1x_1 + 0.2x_2 \leqslant 180 \\ 2x_1 + \quad x_2 \leqslant 1200 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，“ Max ” 表示最大值.

【例 4】 某化工厂生产 500 克重的瓶装涂料. 它由 A、B 两种原料混合而成,工艺规定 A 种原料最多不能超过 350 克,B 种原料不能少于 200 克. 已知原料成本 A 种每克 0.5 分,B 种每克 1 分. 求每瓶中两种原料各用多少,才能使成本最低?

这个问题的目标是追求成本最低,即是一个求极小值的实际问题. 该厂的涂料生产也有多种可供选择的方案.

设每瓶涂料中用 A 种原料 x_1 克,B 种原料 x_2 克. 经过类似于前面的分析,这个问题的数学模型为:

求 $\mathrm{Min}Z = 0.5x_1 + x_2$,且满足

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500 \\ x_1 \qquad \leqslant 350 \\ \qquad x_2 \geqslant 200 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

以上两例都是线性规划问题. 一般地,线性规划问题的数学模型可归结为:

求 $\mathrm{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

(或 $\mathrm{Min}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$)

且满足

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1(\text{或} =,\text{或} \geqslant) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2(\text{或} =,\text{或} \geqslant) \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m(\text{或} =,\text{或} \geqslant) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 c_j、b_i 和 a_{ij} 是常数,而 x_j 是决策变量($i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n$).

另外,从上述两例可见,应用线性规划解决问题必须具备以下条件:

1. 问题必须是最大化或最小化的问题. 如例 3 是最大化问题,而例 4 是最小化问题.

2. 达到目标必须有不同的方案，即有选择的可能性. 如例 3 中，生产写字台和书橱的数量有多种方案可供选择.

3. 问题所追求的目标还要受到一定的限制，即带有约束条件. 如例 3 中，生产写字台和书橱所用木料及五合板的总数均不能超过厂内的存料数.

4. 问题所追求的目标必须表示成线性函数，而约束条件必须表示成线性等式或线性不等式.

这就是应用线性规划讨论问题所具有的特点.

第二章　线性规划的数学原理

§1　线性规划问题的图解法

从本章开始，将陆续介绍线性规划的求解方法. 本节介绍最简单的图解法. 这个解法仅仅适用于两个变量的线性规划问题，虽然这种方法应用的范围狭窄，但是能帮助读者理解线性规划的直观意义，而且由此得出的一些结论也适用于多个变量的情况.

先看极大问题的图解法.

【例 1】　某咖啡馆配制两种饮料. 甲种饮料用奶粉、咖啡、糖分别为 9 克、4 克、3 克；乙种饮料用奶粉、咖啡、糖分别为 4 克、5 克、10 克. 已知每天原料的使用限额为：3600 克奶粉、2000 克咖啡、3000 克糖. 如果甲种饮料每杯能获利 7 角，乙种饮料每杯能获利 1 元 2 角. 问每天应配制两种饮料各多少杯（假设这些饮料能全部售出）能获利最大？

〔解〕　设每天应配制甲种饮料 x_1 杯，乙种饮料 x_2 杯，由题意可建立如下数学模型：

求 $\mathrm{Max}Z = 7x_1 + 12x_2$，且满足

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 3600 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 2000 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 3000 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

这是两个变量的线性规划问题，可用图解法来求解. 如图 2-1 建立平面直角坐标系.

1. 先分析约束条件.

(1) 由于 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，所以满足约束条件的点都落在第一象限内.

(2) 满足约束条件 $9x_1 + 4x_2 \leqslant 3600$. 坐标满足这个不等式的所有点，均位于 $9x_1 + 4x_2 = 3600$ 这条直线上以及该直线左下的半平面内.

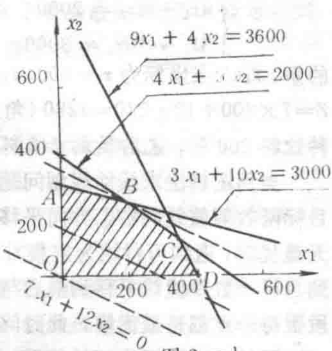

图 2—1

坐标满足 $4x_1 + 5x_2 \leqslant 2000$ 的所有点位于直线 $4x_1 + 5x_2 = 2000$ 上及该直线的左下方的半平面.

坐标满足 $3x_1 + 10x_2 \leqslant 3000$ 的所有点位于直线 $3x_1 + 10x_2 = 3000$ 上及该直线的左下方的半平面.

同时满足 (1)、(2) 的点位于由两坐标轴及三条直线所围成的凸多边形 $OABCDO$ 的边界上或内部. 这些点的坐标的集合称它为线性规划问题的可行解（满足约束条件的解）集合，或称为可行域.

2. 再考虑问题的目标函数

由解析几何知道，如果把 z 当作参数，则 $z = 7x_1 + 12x_2$ 表示一组具有相同斜率 $-7/12$ 的平行的直线族，图 2-1 中虚线所示. 当令 z 等于某个常数，如 $z = 0$ 时，$7x_1 + 12x_2 = 0$ 是一条直线，该直线上任意一点的坐标都使目标函数值为 0，它称为目标函数的一条等值线.

从图 2-1 中可知，随着等值线的平行移动，当离原点 O 越远时，z 值越大. 即在满足约束条件的范围内，z 值随着 x_1、x_2 数值的增大而增大. 因此，将 $z = 0$ 的直线向右上方向，(即 x_1，x_2 增大的方向) 平行移动，直到最后与凸多边形 $OABCDO$ 相交于顶点 B 时，z 达到最大值. 此顶点系直线 $4x_1 + 5x_2 = 2000$ 与直线 $3x_1 + 10x_2 = 3000$ 的交点，即线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 2000 \\ 3x_1 + 10x_2 = 3000 \end{cases}$$

的解，即 B 点坐标为 $x_1=200$，$x_2=240$. 这时目标函数所取的值应为 $Z=7\times200+12\times240=4280$（角）. 这就是说该咖啡馆每天应配制甲种饮料 200 杯，乙种饮料 240 杯，才能获得最大利润 428 元.

当用图解法求线性规划问题的极大值时，遇到可行域是无界时，目标函数等值线向右上方向平移与可行域没有最后的交点，该问题无最优解；遇到可行域为空集时，此时无可行解，当然无最优解；遇到目标函数等值线平移到最后与某一约束条件直线段重合时，该线段上每一点都是最优解，此时问题有无穷多解.

再举一个求极小值的例子.

【例 2】　第一章 § 2 的例 4.

〔解〕　由前面得知本例的数学模型为

求 $\mathrm{Min}Z = 0.5x_1 + x_2$，且满足

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 500 \\ x_1 \qquad \leqslant 350 \\ \qquad x_2 \geqslant 200 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 x_1、x_2 分别为每瓶涂料中所用 A、B 种原料的克数.

经类似于例 1 的分析，得出可行域，如图 2-2 阴影所示. 由图 2-2 可见，可行域是无界凸区域. 目标函数等值线为 $0.5x_1+x_2=Z$. 令 $Z=0, 1, 2, \cdots$ 得一平行直线族（图 2-2 中用虚线表示）. 将等值线经右上方平行移动，越远离原点时，Z 值越大. 由于要满足约束条件，所以当等值线平移到 A 点时，就再也不能往右上方移

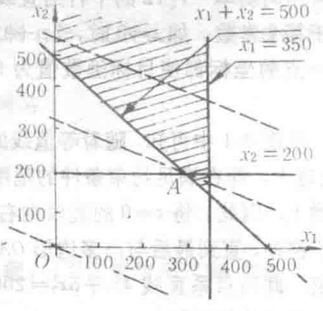

图 2—2

了，A 点的坐标就是使目标函数获得最小值的最优解. 而 A 点是直线 $x_1+x_2=500$ 与直线 $x_2=200$ 的交点. 解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=500 \\ x_2=200 \end{cases}$$

得 A 点坐标为 $x_1=300$，$x_2=200$，此时目标函数值为

$$Z=0.5\times 300+200=350$$

也就是说每瓶涂料用 300 克 A 种原料，200 克 B 种原料，能使成本最低，为 3 元 5 角.

从上述求解过程中，我们可以看到，如果有可行解，则可行域是凸区域，它可能有界，也可能无界. 线性规划问题可以有唯一解，也可以有无穷多解或无解. 求解方法是通过平行移动等值线来找最优解. 这种方法叫做等值线平移法. 当等值线越往右上方向移，取值越大，移到可行域右上方最后一个顶点时，就获得最大值；反之，越往左下方移，取值越小，移到左下方最前一个顶点时，就获得最小值. 这个现象告诉我们：如果线性规划问题有最优解，则它在可行域的顶点上达到，也可能在可行域的边界线的任意一点上达到，但决不会在可行域的内点达到. 理论上已证明了这一点. 可行域的顶点又称为极点，它所对应的可行解称为基本可行解.

于是，我们也可不作目标函数的图象，而直接把可行域上各个顶点的函数值一一列举出来，从中找出最大（小）值的顶点，该点所对应的 x_1 和 x_2 的值就是所求的最优解.

总之，利用图解法求解两个变量的线性规划问题一般可按下列步骤进行：

1. 建立数学模型；

2. 在平面直角坐标系中，作出可行域. 所谓可行域是各个约束条件所表示的半平面的公共部分；

3. 用等值线平移法求目标函数的最优值；

具体的讲，令目标函数为零，作出一条过原点的直线. 当问题是求最大值时，把上述目标函数线向右上方平移，与可行域的最后