"概念地图"书系
GAINIAN DITU SHUXI

紧扣新课标 立足新教材

推广新方法 启迪新思维

中学概念地图丛书

概念地图，可视化的思维工具，强有力的学习、助记策略。

概念地图，分层级梳理概念的知识导源图，学习、记忆知识的时代快车。

高中数学（必修+选修）

⊙ 贺双桂 主编

GAOZHONG SHUXUE

GAINIAN DITU

概念地图

获第七届全国书籍设计艺术展览"最佳书籍设计"奖

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

中学概念地图丛书

高中数学

GAOZHONG SHUXUE

概念地图

GAINIAN DITU

主　编　贺双桂

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

图书在版编目（CIP）数据

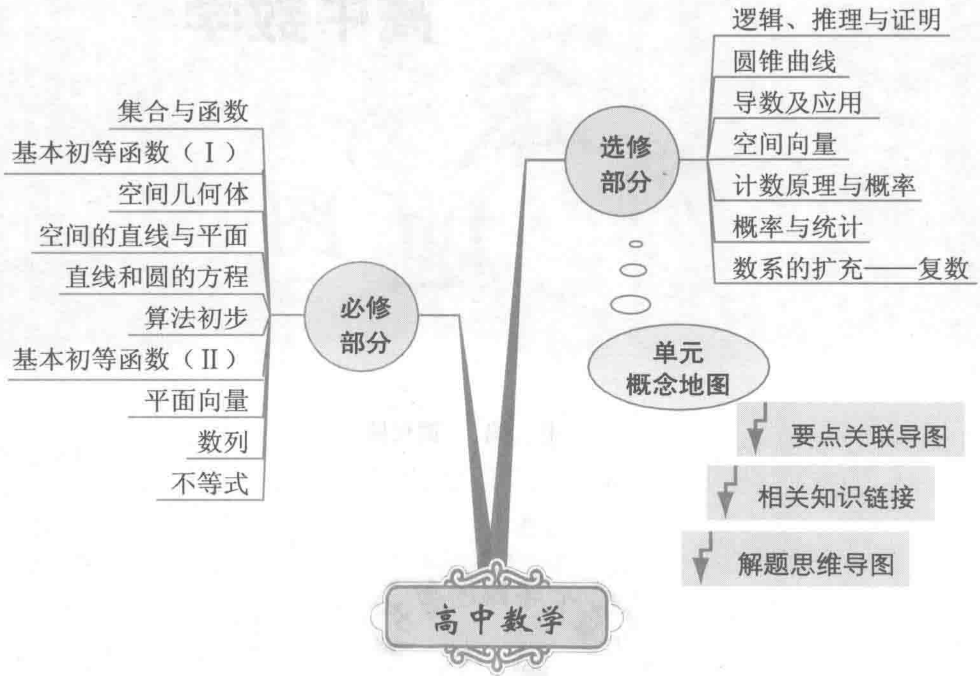
高中数学概念地图 / 贺双桂主编．—2 版．—桂林：广西师范大学出版社，2009.9（2010.1 重印）
（中学概念地图丛书）
ISBN 978-7-5633-6382-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．贺…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 143949 号

广西师范大学出版社出版发行
（广西桂林市中华路 22 号　邮政编码：541001
网址：http://www.bbtpress.com）
出版人：何林夏
全国新华书店经销
湛江南华印务有限公司印刷
（广东省湛江市霞山区绿塘路 61 号　邮政编码：524002）
开本：787 mm × 1 092 mm　1/16
印张：12　　字数：320 千字
2009 年 9 月第 2 版　　2010 年 1 月第 2 次印刷
印数：10 001~25 000 册　定价：22.80 元

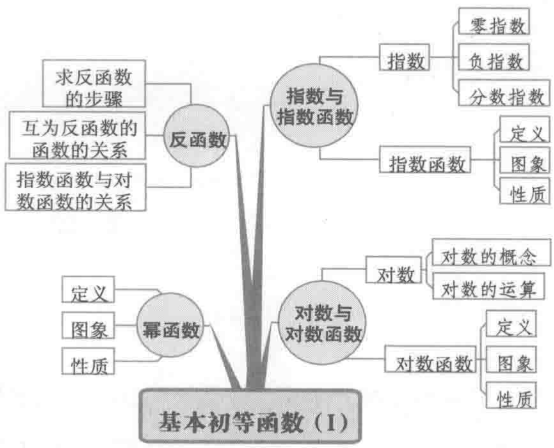
本书导航



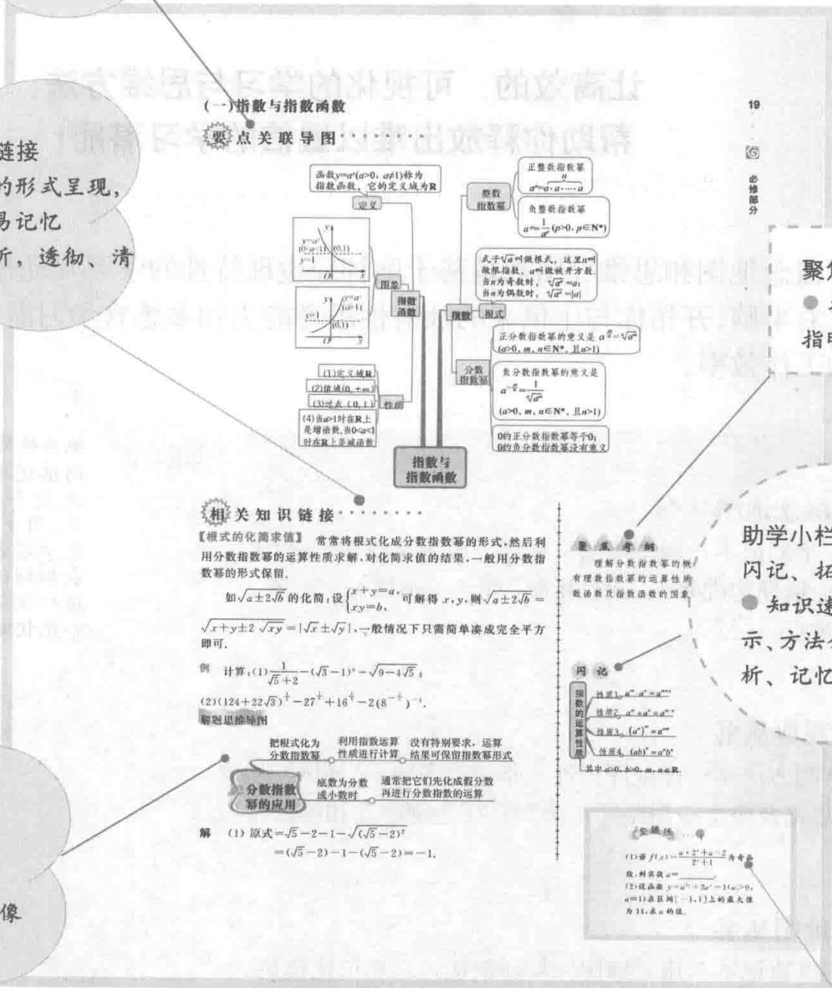
单元概念地图

★ 按知识模块分单元构建概念地图：帮助学生从整体上了解、把握本单元的重要概念或知识体系。

★ 分层级呈现、用线条连接概念：提示知识重点，搭建新知识与现有知识间的关联。



——“概念地图”书系



要点关联导图
● 针对次级概念或重点知识设计
●结构清晰，易学易记

相关知识链接
● 以条目的形式呈现，易查阅、易记忆
● 补充分析，透彻、清楚、全面

解题思维导图
● 用图呈现解题思路及过程
● 思路明了，就像老师在贴身辅导

聚焦考纲
● 提示考点，指明要求

助学小栏目——闪记、拓展……
● 知识速记、要点提示、方法介绍、疑难辨析、记忆口诀等

变题练
●紧随典型例题，随练随记，掌握方法

主 栏　　**副 栏**

“概念回归·应用与检测”

★ 针对各单元梳理的概念和具体的知识，从各地高考、会考等重要考试试卷中精选有代表性的题目，为读者提供各种各样的应用练习。

“概念地图”书系 ——

让高效的、可视化的学习与思维方法，
帮助你释放出难以置信的学习潜能！

概念地图和思维导图都是基于脑神经生理特性的学习互动模式，能同时调动左右半脑，开拓你与生俱来的放射性思考能力和多感官学习潜能，快速提高大脑的工作效率。

中学概念地图丛书

伴学助记本：用“地图”构建三级记忆模块，分词条全面梳理基础知识；双栏排版，同步点击课标、考纲；图析难点、疑点。

图析题典丛书

解题方法本：详细评析近三年精选考题；“导图”展现解题思路及概念应用路径；全面介绍考题类型和解题技巧。

速记地图丛书

便携速记本：用“地图”构建记忆核心和记忆模块，全面呈现知识要点及知识整合路线，促进主动学习；小巧便携，随看随记。

实验图解精练丛书

实验图解本：用“地图”梳理实验操作要领，揭示实验题解题思路；精析实验考查要求与应试策略；真题模拟训练，快速提高实验题解题技巧。

概念地图　以图解方式，网络化地直观描述两个或多个概念之间的关系。用于学习，有利于促进学习者直觉思维的形成和知识迁移，全面掌握知识架构，提高理解和记忆效率。

思维导图　以图解方式，按人脑的自然思考模式展示思维过程。用于解题分析，可开启多途径的解题思路，展现已知条件与知识要点之间的联系，有利于学习者快速理解和掌握解题要点。

这是全球超过 2.5 亿人在使用的高效的学习方法，你不想试一试吗？

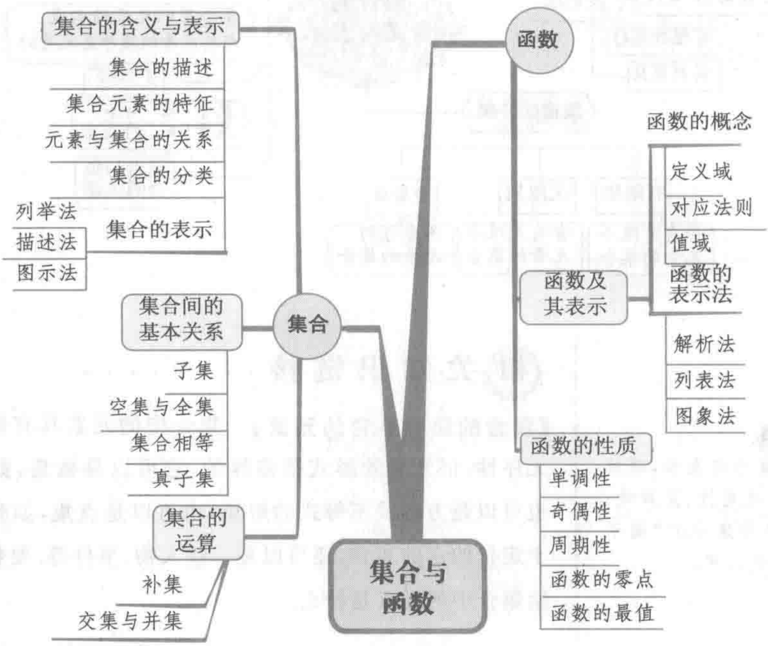
目录

必修部分

必修部分

第一单元　集合与函数

单元概念地图



课标要览

(1)通过实例，了解集合的含义，体会元素与集合的“属于”关系.

(2)理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集；了解全集与空集的含义.

(3)理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集.

(4)理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集.

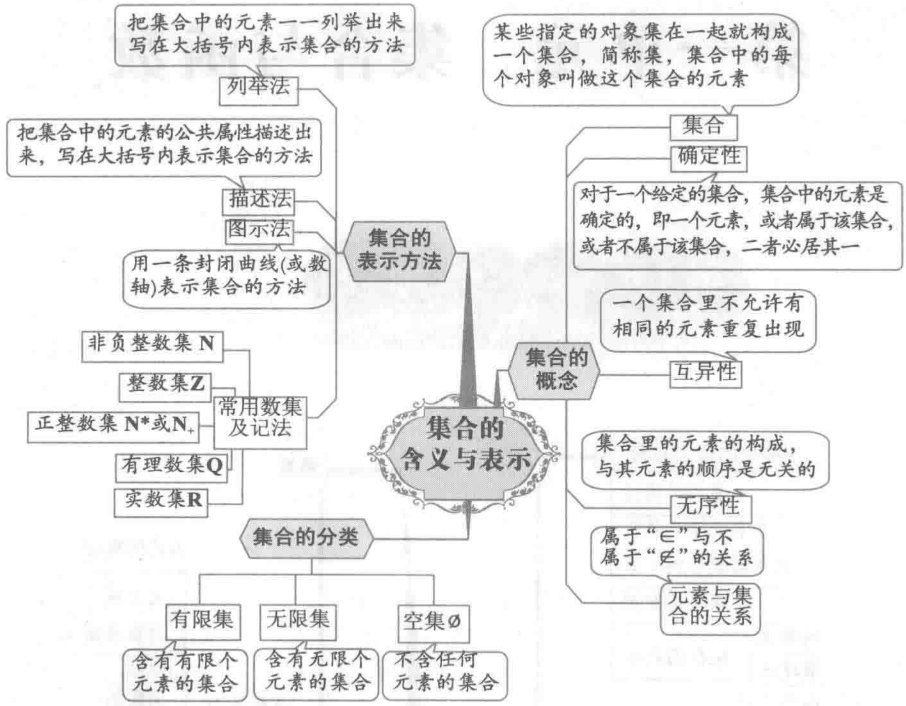
(5)了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

(6)会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数；了解简单的分段函数，并能简单应用.

(7)通过已学过的函数特别是二次函数，理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义；结合具体函数，了解奇偶性的含义；学会运用函数图象理解和研究函数的性质.

(一)集合的含义与表示

要点关联导图



聚焦考纲

理解集合的概念与表示，理解集合元素的性质：确定性、互异性、无序性；掌握元素与集合的“属于关系”及符号“∈”的应用.

点拨

判断一组对象能否构成集合，关键是看对象是否满足集合中元素的三个特征，特别看是否满足“确定性”. 在表示一个集合时，要特别注意它的“互异性”、“无序性”.

相关知识链接

【集合的核心是它的元素】 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性. 但元素的形式是多样的，它可以是数集，如 $A=\{1,2,3\}$，也可以是方程及不等式的解集，也可以是点集，如到定点的距离等于定长的点的集合，还可以是一些人物、事件等. 要特别注意读懂所给集合中的元素是什么.

例 下列各集合是用描述法表示的，请读懂各集合中的元素，并用列举法表示下列集合：

(1) $\{x\mid(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0, x\in\mathbf{Z}\}$；

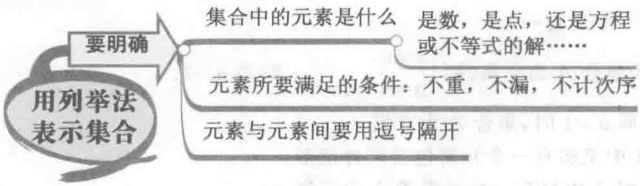
(2) {不大于 10 的非负偶数}；

(3) $A=\left\{x\,\middle|\, x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}, a,b\text{ 为非零实数}\right\}$；

(4) $\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}2x+y=8,\\ x-y=1\end{cases}\right\}$；

(5) $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{3-x}\in\mathbf{Z}, x\in\mathbf{N}^*\right\}$.

解题思维导图



解 (1)由$(2x-1)(x+2)(x^2+1)=0,x\in\mathbf{Z}$，知只有 $x=-2$ 是集合的元素，所以集合表示为$\{-2\}$.

(2)$\{0,2,4,6,8,10\}$.

(3)由 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}=\begin{cases}2(a>0,b>0),\\0(a,b\text{ 异号}),\\-2(a<0,b<0).\end{cases}$

所以 $A=\{-2,0,2\}$(注意分类讨论思想的运用).

(4)由题意，解方程组$\begin{cases}2x+y=8,\\x-y=1\end{cases}$得 $x=3,y=2$.

所以集合可表示为$\{(3,2)\}$.

(5)由题意，x 为正整数，同时还应满足 $3-x$ 能整除 6，

所以 $3-x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

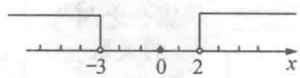
解得 $x=2,4,1,5,6,0,-3,9$，舍去 $x=-3,x=0$，

所以 $A=\{1,2,4,5,6,9\}$.

【从三个角度认识空集】 空集在解决集合问题中占有重要地位，虽然$\varnothing$中不含任何元素，但它也是从需要中产生的，其表现形式更是多种多样的，如表示方程的根、方程组的解、不等式的解集等. 我们可从三个角度认识空集.

文字语言：不含任何元素的集合. 如“大于零的负数”、“$1+x^2=0$ 的实根”构成的集合都是空集.

符号语言：$\varnothing$. 如$\{x|x>2,且\ x<-3\}=\varnothing$.



图形语言：如图.

例 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$，

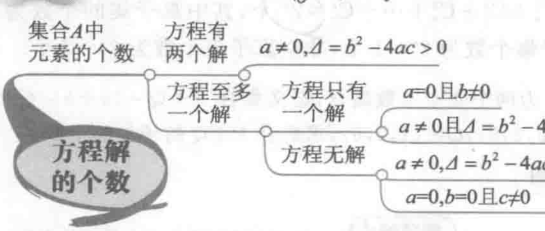
(1)若 A 中只有一个元素，试求 a 的值，并求出这个元素；当 a=0 当a≠0 b²-4ac

(2)若 A 是空集，求 a 的取值范围；b²-4ac<0

(3)若 A 中至多有一个元素，求 a 的取值范围.

b²-4ac≥0

解题思维导图



解 (1)集合 A 只有一个元素有两种情形：

①当 $a=0$ 时，方程化为 $2x+1=0$，只有一个根为 $x=-\frac{1}{2}$；

②当 $a\neq0$ 时，$\Delta=4-4a=0$，即 $a=1$ 时，方程有两个相等实根 $x_1=x_2=-1$.

提示

列举法与描述法各有优点，应根据具体问题确定使用集合的哪种表示法. 列举法具有直观、明了的特点，但有些集合是不能用列举法表示出来的，一般集合中元素较多或有无限个元素时，不宜采用列举法.

精析

用图示法表示集合之间的关系有两层意思：一方面给定一个集合或集合之间的运算关系，会用图示法(即维恩图)表示；另一方面给出一个维恩图，会用集合表示图中指定的部分(如阴影部分).

闪记

变题练 1

(1)设 P,Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则 $P+Q$ 中的元素有__8__个.

(2)求集合$\{x^2-x,2,x\}$中的元素 x 的取值范围. ≠2 ≠0

(3)定义集合运算：$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$，设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为__18__.

(4)设 $M=\{x|x^2+x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$a=\lg(\lg10)$，则$\{a\}$与 M 的关系是(C).

A. $\{a\}=M$

B. $\{a\}\subsetneqq M$

C. $M \subsetneqq \{a\}$

D. $M \supseteq \{a\}$

答案

变题练 1　(1)8

(2)$\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq -1,2,0\}$

(3)18

(4)C

综上，当 $a=0$ 时，集合 A 只有一个元素 $-\frac{1}{2}$；当 $a=1$ 时，集合 A 只有一个元素 -1.

(2)若集合 A 为空集，则 $\begin{cases} a \neq 0, \\ \Delta=4-4a<0, \end{cases}$ 解得 $a>1$.

即 $a>1$ 时，集合 A 为空集.

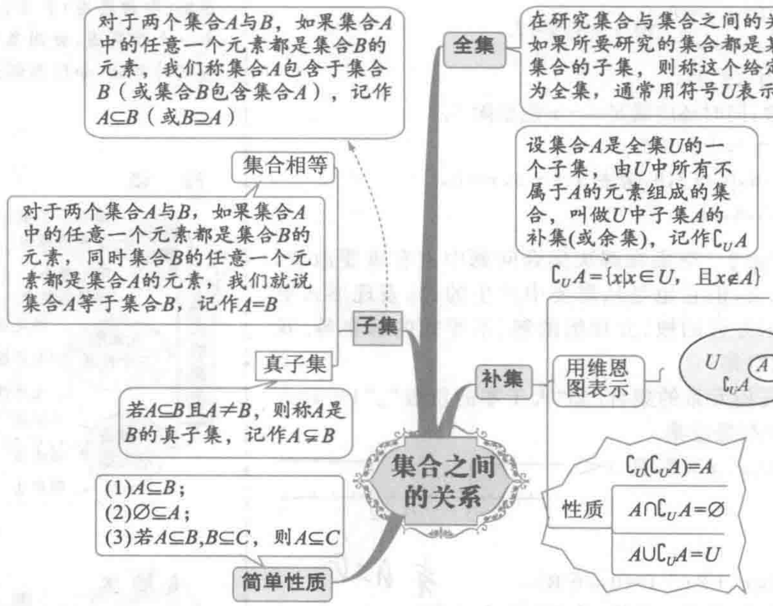
(3)A 中至多有一个元素包含两种情形，

即 A 中只有一个元素或 A 为空集.

由(1)和(2)知，$\{a \mid a=0$，或 $a \geqslant 1\}$ 时，集合 A 至多有一个元素.

(二)集合间的基本关系

要点关联导图



聚焦考纲

了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，掌握元素与集合、集合与集合之间的关系符号“∈”、“⊆”、“=”的应用，高考常以选择和填空的形式命题.

提示

(1)$\{\varnothing\}$ 不表示空集，它表示以空集为元素的集合. 空集 $\varnothing$ 是任何非空集合的真子集，如 $\{0,1\}$ 的所有子集是 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{0,1\}$，$\varnothing$.

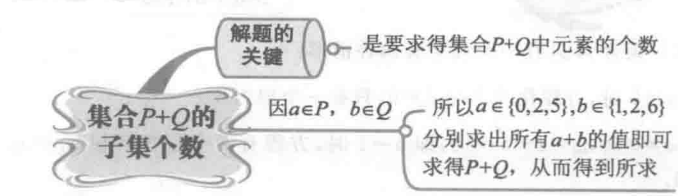
(2)注意元素与集合的相对性，如 $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$，$\varnothing \in \{\varnothing\}$，$\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\}$.

相关知识链接

【有限集合的子集个数】设有限集合 A 中有 n 个元素，则 A 的子集个数有：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个，其中真子集的个数为 2^n-1 个，非空子集个数为 2^n-1 个，非空真子集个数为 2^n-2 个.

例　设 P,Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a \in P, b \in Q\}$. 若 $P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，求集合 $P+Q$ 的子集的个数.

解题思维导图



解 因为 $a\in P,b\in Q$，所以 $a\in\{0,2,5\},b\in\{1,2,6\}$.

当 $a=0$ 时，b 分别取 1,2,6 可得 $a+b$ 分别为 1,2,6；

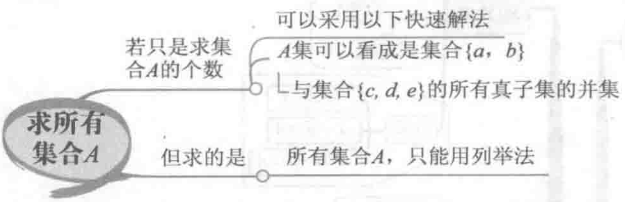
当 $a=2$ 时，b 分别取 1,2,6 可得 $a+b$ 分别为 3,4,8；

当 $a=5$ 时，b 分别取 1,2,6 可得 $a+b$ 分别为 6,7,11.

综上：$a+b\in\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$，故 $P+Q$ 中有 8 个元素，$P+Q$ 的子集的个数为 $2^8=256$ 个.

例 2 写出满足 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$ 的所有集合 A.

解题思维导图



解 由题意，所求的集合 A 为 $\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\}$，共 7 个.

【不等式解集中的集合问题】 用集合表示不等式(组)的解集时，要注意分辨是交集还是并集，结合数轴或维恩图的直观性帮助思维判断. 空集是任何集合的子集，但因为不好用维恩图表示，容易被忽视，如在关系式 $B\subseteq A$ 中，$B=\varnothing$ 的情况易漏掉.

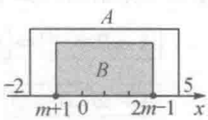
例 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

解题思维导图

解 由已知 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，

对 $B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，$B\subseteq A$ 分类讨论如下：

(1)若 $B\neq\varnothing$，如图所示，则



由 $m+1\leqslant 2m-1$，

得 $m\geqslant 2$.

又由 $B\subseteq A$，得

$$\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$$

解得 $2\leqslant m\leqslant 3$. ①

(2)若 $B=\varnothing$，则 $m+1>2m-1$，即

$m<2$. ②

此时，$B\subseteq A$ 也成立. 由①和②，得 $m\leqslant 3$.

所以，实数 m 的取值范围是 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

点拨

应用集合的观点分析、理解数学现象可以更深刻地揭示数学问题的本质. ①集合中的语言可分为文字语言、符号语言、图形语言，对于这三种语言，要能正确地理解，灵活地转化. ②在数学解题中，常常通过分类讨论将复杂问题转化为几个简单问题. 这实质就是将在集合 U 中的复杂问题转化为几个在 U 中的子集的简单问题. ③在数学解题中，常常是"正难则反"，这实质就是集合问题中的补集问题. 其中 $\complement_U(\complement_U A)=A$ 就体现了反证法的证题思想.

变题练 2

(1)已知集合 $A=\{1,2\}$，集合 B 满足 $A\cup B=\{1,2\}$，则集合 B 有______个.

(2)满足条件 $\{1,2\}\cup A=\{1,2,3\}$ 的所有集合 A 的个数是______个.

(3)非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且满足若 $a\in S$，则 $6-a\in S$，这样的 S 共有__7__个.

(4)已知集合 $A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且 $A=B$，则实数 a,b 的值是______.

(5)有限集合 S 中元素个数记作 card(S)，设 A,B 都为有限集合，给出下列命题：

①$A\cap B=\varnothing$ 的充要条件是 card$(A\cup B)=$ card$(A)+$ card(B)；

②$A\subseteq B$ 的必要条件是 card$(A)\leqslant$ card(B)；

③$A\not\subseteq B$ 的充分条件是 card$(A)\leqslant$ card(B)；

④$A=B$ 的充要条件是 card$(A)=$ card(B).

其中真命题的序号是(B).

A. ③④ B. ①②

C. ①④ D. ②③

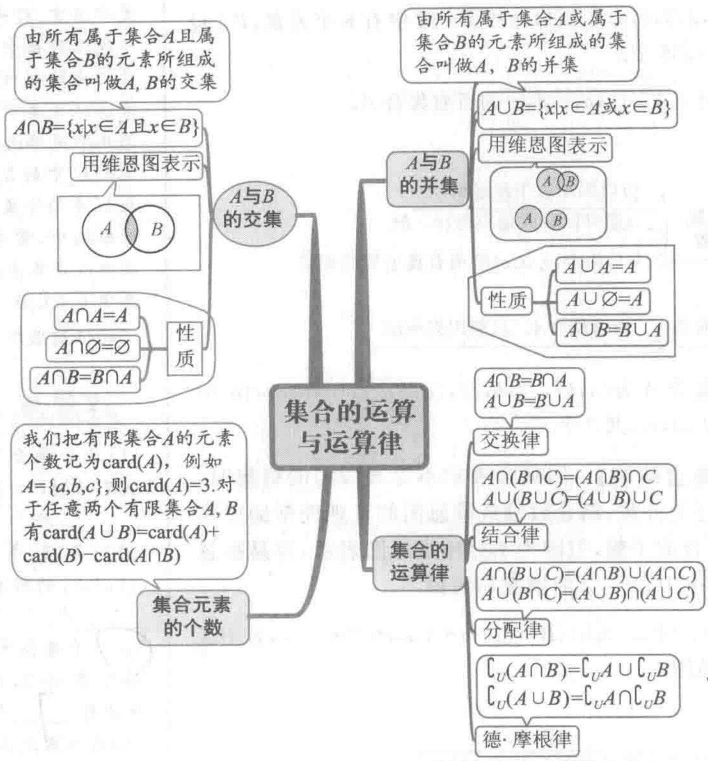
答案

变题练 2 (1)4 (2)4 (3)7

(4)$a=-1,b=0$ (5)B

(三)集合的运算与运算律

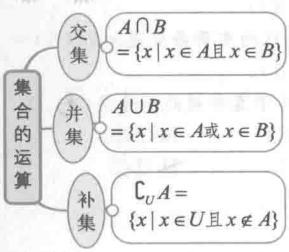
要点关联导图



聚焦考纲

理解并集、交集含义，会根据它们的定义进行两个集合之间并、交、补的运算；高考考查重点是集合与集合之间的关系.

闪记



相关知识链接

【空集与两个集合的交与并】 若 A,B 至少有一个为 $\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing$；若 A,B 都不为 $\varnothing$，则 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$：应注意 A,B 为非空集合. 对 A,B 中有空集的情形如下：

$\boxed{A=B=\varnothing}\Rightarrow\boxed{A\cup B=\varnothing}$

$\boxed{A\neq\varnothing,B=\varnothing}\Rightarrow\boxed{A\cup B=A}$

$\boxed{A=\varnothing,B\neq\varnothing}\Rightarrow\boxed{A\cup B=B}$

例　已知集合 $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=($　　$)$.

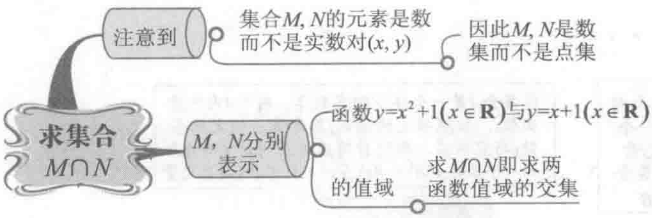
A. $(0,1),(1,2)$

B. $\{(0,1),(1,2)\}$

C. $\{y|y=1$ 或 $y=2\}$

D. $\{y|y\geqslant1\}$

解题思维导图



解　$M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$，

$N=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\in\mathbf{R}\}$.

∴　$M\cap N=\{y\mid y\geqslant 1\}\cap\{y\mid y\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$.

∴　应选 D.

【有关子集的几个等价关系】

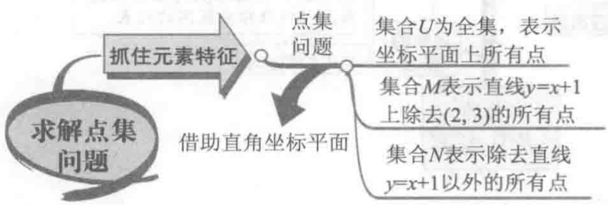
(1)$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；(2)$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(3)$A\subseteq B\Leftrightarrow \complement_U A\supseteq\complement_U B$；(4)$A\cap\complement_U B=\varnothing\Leftrightarrow A\subseteq B$；

(5)$(\complement_U A)\cup B=U\Leftrightarrow A\subseteq B$.

例　设$U=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，$M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，求$\complement_U(M\cup N)$.

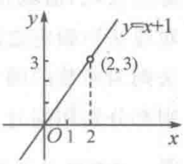
解题思维导图



解法一　$M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}=\{(x,y)\mid y=x+1,但\ x\neq 2\}$，

又因$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，

如图所示，集合U为坐标平面上所有点，M表示直线$y=x+1$上除去$(2,3)$的所有点，而N表示坐标平面内除去$y=x+1$以外的所有点，从而$M\cup N$表示坐标平面上除$(2,3)$外的所有点.



所以$\complement_U(M\cup N)=\{(2,3)\}$.

解法二　利用德·摩根律，即$\complement_U(M\cup N)=(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$.

因为$M=\{(x,y)\mid y=x+1,但\ x\neq 2\}$，

所以$\complement_U M=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}\cup\{(2,3)\}$.

又$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，所以$\complement_U N=\{(x,y)\mid y=x+1\}$.

所以$\complement_U(M\cup N)=(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{(2,3)\}$.

提示

集合是由元素构成的，认识集合要从认识元素开始，要注意区分$\{x\mid y=x^2+1\}$，$\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，这三个集合是不同的.

本题若这样求解是错的：

求$M\cap N$即解方程组$\begin{cases}y=x^2+1,\\y=x+1\end{cases}$得$\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$

∴　选 B.

变题练 3

(1)$A=\{-1,3,2m-1\}$，$B=\{3,m^2\}$，若$B\subseteq A$，则实数$m=$ 1 .

(2)$A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，且$A\cup B=A$，则m的取值范围是 $\{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\}$

(3)设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，若$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$，则$A=$ $\{2,3\}$ ，$B=$ $\{2,4\}$.

(4)设集合$A=\{x\mid x\in\mathbf{Z},且-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z},且|x|\leqslant 5\}$，则$A\cup B$中的元素个数是______.

(5)已知$A=\left\{m\left|\dfrac{m-4}{2}\in\mathbf{Z}\right.\right\}$，$B=\left\{x\left|\dfrac{x+3}{2}\in\mathbf{N}\right.\right\}$，则$A\cap B=$______.

答案

变题练 3　(1)$m=1$

(2)$m\in\left\{0,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right\}$

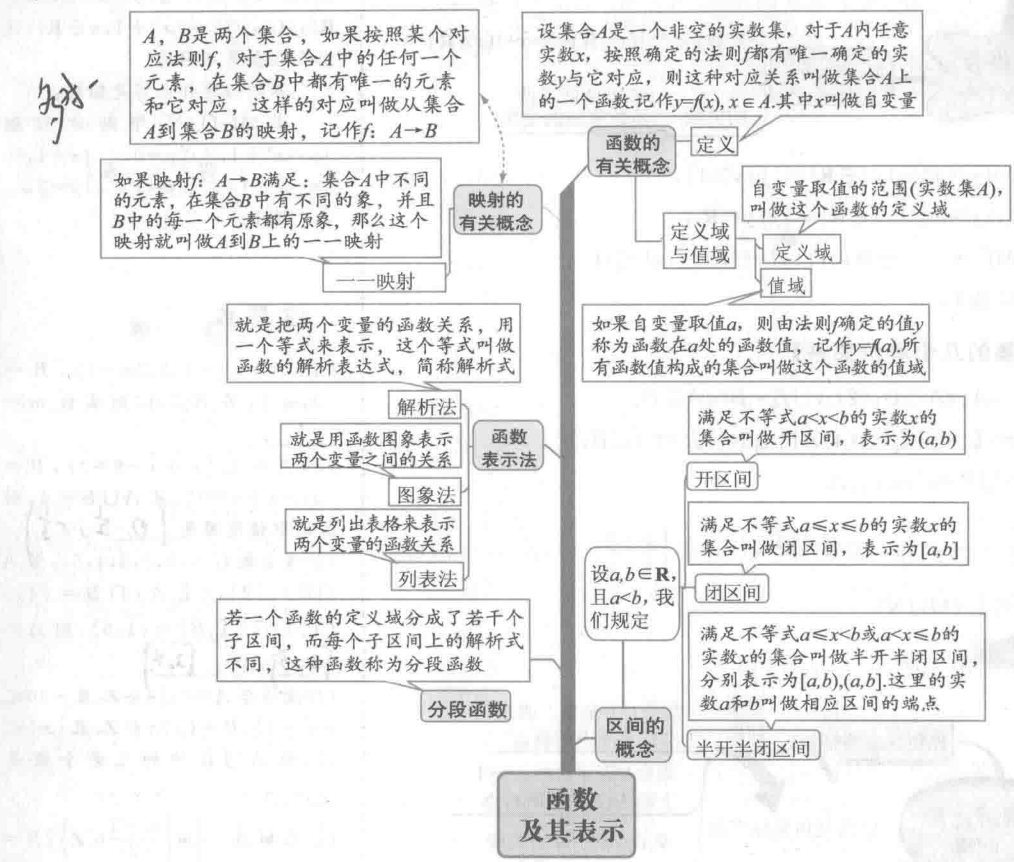
(3)$A=\{2,3\}$，$B=\{2,4\}$

(4)16

(5)$\varnothing$

(四)函数及其表示

要点关联导图



聚焦考纲

了解映射的概念，在此基础上加深对函数概念的理解；能根据函数的三要素判断两个函数是否为同一函数；理解分段函数的意义.

点拨

(1)两个函数表示同一函数，则它们的图象完全相同，反之亦然.

(2)函数是一种特殊的映射，而映射是一种特殊的对应；函数的三要素中对应法则是核心，定义域是灵魂.

相关知识链接

【两个函数是否同一个函数的判断】 函数的定义含有三个要素，即定义域、值域和对应法则.当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则确定之后，函数的值域也就随之确定.因此，定义域和对应法则为函数的两个基本条件，当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数.

例 试判断以下各组函数是否表示同一函数.

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；

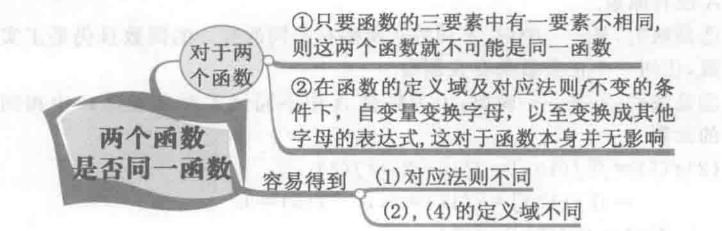
(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, $g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0,\\ -1 & x<0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}$, $g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$；

(4) $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$, $g(x)=\sqrt{x^2+x}$；

(5) $f(x)=x^2-2x-1$, $g(t)=t^2-2t-1$.

解题思维导图



解 (1)由于 $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，故它们的值域及对应法则都不相同，所以它们不是同一函数；

(2)由于函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0,\\ -1 & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以它们不是同一函数；

(3)由于当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$2n\pm1$ 为奇数，

所以 $f(x)=\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}=x$，$g(x)=(\sqrt[2n-1]{x})^{2n-1}=x$，它们的定义域、值域及对应法则都相同，所以它们是同一函数；

(4)由于函数 $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x+1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 0\}$，而 $g(x)=\sqrt{x^2+x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 0\}$，它们的定义域不同，所以它们不是同一函数；

(5)函数的定义域、值域和对应法则都相同，所以它们是同一函数.

【映射还有以下五个特征】 集合 A，B 以及对应法则 f，缺一不可.映射还具有：①任意性：映射中的两个集合 A，B 可以是数集、点集或由图形组成的集合等；②有序性：映射是有方向的，A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射往往不是同一个映射；③存在性：映射中集合 A 的每一个元素在集合 B 中都有它的象；④唯一性：映射中集合 A 的任一元素在集合 B 中的象是唯一的；⑤封闭性：映射中集合 A 的任一元素的象都必须是 B 中的元素.不要求 B 中的每一个元素都有原象，即 A 中元素的象集是 B 的子集.

例 (1)下列集合 A 到集合 B 的对应中，判断哪些是 A 到 B 的映射，判断哪些是 A 到 B 的一一映射.

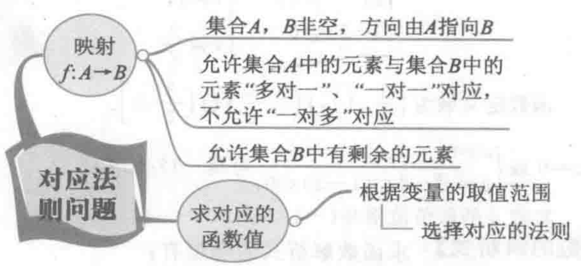
①$A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{Z}$，对应法则 $f:x\to y=-x$，$x\in A$，$y\in B$.

②$A=\mathbf{R}^+$，$B=\mathbf{R}^+$，$f:x\to y=\dfrac{1}{x}$，$x\in A$，$y\in B$.

③$A=\mathbf{N}_+$，$B=\{0,1\}$，对应法则 f：除以2得的余数.

(2)已知 $n\in\mathbf{N}$，$f(n)=\begin{cases}n-2 & (n\geqslant 10),\\ f[f(n+5)] & (n<10),\end{cases}$ 求 $f(5)$ 和 $f(0)$ 的值.

解题思维导图



牢记

1. 分段函数 函数 $y=f(x)$，对于自变量 x 的不同取值区间，有着不同的对应法则，这样的函数通常称为分段函数，如函数 $y=f(x)=\begin{cases}2x, x\in[0,+\infty)\\ 1, x\in(-\infty,0)\end{cases}$ 就是分段函数.

2. 函数解析式 函数的解析式就是用数学运算符号和括号把数和表示数的字母连接而成的式子，解析式亦称“解析表达式”或“表达式”，简称“式”.

精析

对 $y=f(x)$ 的理解

(1)$y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数；

(2)x 是自变量，是法则所施加的对象；

(3)f 是法则，它可以是一个或多个解析式，也可以是图表或文字描述；

(4)$f(x)$ 与 $f(a)$ 不同，$f(a)$ 是指自变量取 a 时的函数值，是一个常量，而 $f(x)$ 是关于 x 的表达式，是对法则的一种描述，如：$f(x)=2x$ 是指法则 f 对自变量 x 作用后得到的值是自变量 x 的2倍.因此 $f(a)=2\times a=2a$ 是指法则 f 对 a 作用后得到 $2a$.

闪记

点拨

映射的定义是有方向性的，即从集合 A 到 B 的映射与从集合 B 到 A 的映射是两个不同的映射.映射是一种特殊对应关系，只有一对一、多对一的对应才是映射.