

高等数学(基础部分)教学大纲

(試行草案)

高等工业学校本科五年制各类专业适用

(290 学时)

(内部发行)

人民教育出版社

緒 論

数学研究的对象及其特点。

数学与生产实践的关系及其对自然科学、工程技术的作用。

高等数学与初等数学的区别(介绍高等数学的学习方法)。

行列式与线性方程组

二元线性方程组与二阶行列式。三元线性方程组与三阶行列式。三阶行列式的主要性质。四阶行列式。二元及三元齐次线性方程组及其有非零解的充分与必要条件。

平面解析几何学

坐标法、曲线与方程:

有向线段。实数与数轴。平面直角坐标系。两点间的距离。定比分点。曲线的方程。方程的图形。两曲线的交点。

直线与二元一次方程:

直线的方程(点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式)。两直线的交角。两直线平行与垂直的条件。点到直线的距离。

圆锥曲线与二元二次方程:

圆的一般方程。椭圆、双曲线、抛物线及其标准方程。坐标轴的平移与旋转。一般二元二次方程的简化举例。判别式的叙述。

极坐标:

极坐标系。极坐标与直角坐标的关系。曲线(圆、圆锥曲线、心形线、螺线等)的极坐标方程及其图形。

参数方程:

参数方程的概念。曲线(直线、椭圆、摆线、圆的渐伸线等)的

参数方程。

空間解析几何学与矢量代数

空間直角坐标:

投影定理。空間直角坐标系。两点間的距离。定比分点。

矢量代数:

矢量概念。矢徑。方向余弦与方向数。矢量的加减法。矢量与数量的乘法。矢量的分解与矢量坐标。矢量的数量积。矢量的矢量积。两矢量的夹角。两矢量平行与垂直的条件。矢量的混合积。

曲面与空間曲綫:

曲面方程的概念。球面方程。母綫垂直于坐标面的柱面方程。空間曲綫作为两曲面的交綫。空間曲綫的参数方程(螺旋綫)。空間曲綫在坐标面上的投影。

平面:

平面的方程(点法式、一般式、截距式)。两平面的交角。两平面平行与垂直的条件。点到平面的距离。

空間直綫:

空間直綫的方程(参数式、对称式、一般式)。两直綫的交角。两直綫平行与垂直的条件。直綫与平面的交角与交点。

几种主要曲面:

二次曲面(椭球面、双曲面、抛物面)。錐面。旋轉面。

一元函数的微分学

函数:

常量与变量。区間、邻域。絕對值。函数的定义。函数的表示法。显函数与隱函数。函数的有界性、单調性、奇偶性与周期

性。复合函数。反函数及其图形。基本初等函数与初等函数（包括双曲函数）。

极限：

数列极限的 ε - N 定义。收敛数列的有界性。数列发散的情况（无界与振动）。单调数列审敛准则的叙述。函数极限的 ε - N 定义。函数极限的 ε - δ 定义。函数的左右极限及其与函数极限的关系。不等式取极限。无穷小与无穷大的定义。无穷小与函数极限的关系。关于无穷小的定理。极限的四则运算。无穷小的比较和阶数。等价无穷小。

函数的連續性：

連續性的定义。间断点。連續函数的和、差、积、商。連續函数的反函数。連續函数的复合函数。初等函数的連續性的叙述。在閉区間上連續函数的最大值与最小值定理及介值定理的叙述。

导数与微分：

导数的定义。导数作为变化率的概念。导数的几何与物理意义。平面曲线的切线与法线。两曲线的交角。可导与連續的关系。函数的和、差、积、商、复合函数以及反函数等的导数公式。

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ 。 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 。基本初等函数的导数公式。初等函数的

求导问题。隐函数的求导法。对数求导法。微分的定义及其几何意义。微分的运算法。微分形式不变性。微分在近似计算及误差上的应用。高阶导数和一些初等函数的 n 阶导数。由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{ 求 } \frac{dy}{dx} \text{ 及 } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

微分学的基本定理：

罗尔(Rolle)定理。拉格朗日(Lagrange)定理。柯西(Cauchy)定理。罗必塔(l'Hospital)法则。带有拉格朗日余项的泰勒(Tay-

lor)定理及其在近似計算中的应用。

微分学的应用:

函数增减性的判定法。函数的駐点 函数的极值及其求法。最大值与最小值的求法及其应用。函数图形凹向的判定法。拐点及其求法。水平与垂直渐近綫。函数的作图。弧长的微分。曲率的定义及其計算公式。曲率圓。曲率半徑与曲率中心的公式。方程的近似解法(弦位法、切綫法)。

一元函数的积分学

不定积分:

原函数与不定积分的定义。不定积分的性质。基本积分公式。換元积分法。分部积分法。有理函数的积分。三角函数的有理式的积分。简单无理函数的积分。积分表的用法。

定积分及其应用:

定积分的定义。定积分存在定理的叙述。定积分的性质。定积分的中值定理。定积分作为变上限的函数及其求导定理。牛頓(Newton)-萊布尼茲(Leibniz)公式。定积分的換元法与分部积分法。定积分的近似积分法(矩形法、梯形法、抛物綫法)。两种广义积分的定义。两种广义积分的审斂法。 Γ 函数及其递推公式。定积分在几何学中的应用(面积、弧长、已知平行截面面积求体积等)。定积分在物理学中的应用(平均值、压力、功等)。

多元函数的微分学

多元函数:

多元函数的定义。点函数的概念。二元函数的几何表示法。二元函数的极限与連續性。在閉域上連續函数的性质的叙述。

偏导数与全微分:

偏导数的定义。二元函数偏导数的几何意义。高阶偏导数。高阶偏导数与求导次序无关的条件的叙述。全增量与全微分的定义。全微分的几何意义。全微分在近似计算及误差上的应用。全微分形式不变性。多元函数的复合函数及其求导法。全导数。隐函数的求导公式。

偏导数的应用:

多元函数的极值及其有极值的必要条件。最大值与最小值的求法及其应用。条件极值。拉格朗日乘数法。曲面的切平面与法线。空间曲线的切线与法平面。

多元函数的积分学

二重积分:

二重积分的定义。二重积分存在定理的叙述。二重积分的性质。二重积分的计算法(包括极坐标)。二重积分的应用(平面面积、立体体积、曲面面积、重心、转动惯量等)。

三重积分:

三重积分的定义及其性质。三重积分的计算法(包括柱面坐标、球面坐标)。三重积分的应用。

线积分:

线积分的定义。线积分的性质及其计算法。格林(Green)公式。平面线积分与路径无关的条件。全微分求积。线积分的应用。

面积分:

面积分的定义。面积分的性质及其计算法。面积分的应用。

常微分方程

微分方程的一般概念:

微分方程的定义。解。通解。初值条件。特解。

一阶常微分方程:

变量可分离的方程。齐次方程。綫性方程。全微分方程。

三种特殊类型的高阶微分方程:

$$y^{(n)}=f(x), y''=f(x, y'), y''=f(y, y').$$

綫性微分方程:

齐次綫性微分方程的解的结构。非齐次綫性微分方程的解的结构。二阶常系数齐次綫性微分方程。二阶常系数非齐次綫性微分方程。尤拉方程。

常微分方程的幂級数解法举例。

微分方程的应用。

无穷級数

常数項級数:

无穷級数及其收敛与发散的定義。收敛的必要条件。几何級数。調和級数与 p 級数。收敛級数的主要性质。正項級数的比較准則。正項級数的比值审敛法。交錯級数。萊布尼茲定理。绝对收敛与条件收敛。

幂級数:

函数項級数及其收敛域。幂級数概念。阿貝尔 (Abel) 定理。幂級数的收敛区間与收敛半徑。幂級数的四則运算、和的連續性、逐项积分法与逐项微分法。泰勒級数。函数展开为幂級数的唯一性。函数(e^x 、 $\sin x$ 、 $\cos x$ 、 $\ln(1+x)$ 、 $(1+x)^m$ 等)的幂級数展开式。尤拉公式。幂級数在近似計算中的应用。

富里哀(Fourier)級数:

三角函数系及其正交性。富里哀系数公式。函数的富里哀級数。函数展开为富里哀級数的充分条件的叙述。偶函数与奇函数的富里哀級数。函数的富里哀正弦級数与富里哀余弦級数。

附:

高等数学(基础部分)教学大纲说明书

一、高等数学(基础部分)的目的与任务

高等数学(基础部分)的目的与任务是:使学生获得解析几何、微积分和常微分方程的最基本的知識,必要的基础理論和比較熟練的运算技能,并受到数学分析方法和运用这些方法解决几何、力学和物理等实际問題的初步訓練,为学习后继課程和进一步扩大数学知識打好数学基础。

二、高等数学(基础部分)的基本要求

1. 正确理解下列的基本概念和它們之間的內在联系:

形数关系,函数,极限,无穷小,連續,导数,微分,不定积分,定积分,微分方程,級数的收斂性。

2. 正确理解下列基本定理和公式的形成和它們的用法:

极限的主要定理,拉格朗日定理,泰勒定理和泰勒級数,牛顿-萊布尼茲公式。

3. 通过不断地練習牢固記住下列公式和方程:

直線的各种方程,圓錐曲線的标准方程,基本微分公式,基本积分公式, e^x 、 $\sin x$ 、 $\cos x$ 和 $\frac{1}{1-x}$ 的幂級数展开式。

4. 熟練运用下列法則:

微分法則,积分法則,罗必塔法則,一阶常微分方程的分离变量解法,一阶綫性微分方程和二阶常系数綫性微分方程的解法。

5. 会运用微积分和常微分方程的方法解决一些简单的几何、力学和物理的问题。

三、课程内容的重点、深度和广度

行列式与线性方程组

本单元的重点是：三元线性方程组与三阶行列式；二元与三元齐次线性方程组及其有非零解的充分与必要条件。

在讲四阶行列式时，要指出行列式的对角线展开法不适用于四阶以上的行列式，但是四阶行列式的展开法适用于任何阶的行列式。

在本课程中，初次遇到充分与必要条件这个术语时，必须把它讲清讲透，最好举例加以说明。

平面解析几何学

本单元的重点是：曲线的方程；方程的图形；直线的方程；圆的一般方程；椭圆、双曲线、抛物线及其标准方程；极坐标与直角坐标的关系；参数方程的概念。

要求学生在见到直线的方程，圆的方程和二次曲线的标准方程时，能够画出它们的图形。在建立曲线的方程时教师应注意培养学生根据已知条件选择合适的坐标的能力。在讲授实数与数轴时，可以只指出实数与数轴上点的一一对应关系而不必作更进一步的解释。在讲授直角坐标时，要指出有次序的数偶与坐标面上点的一一对应关系。在讲极坐标时，要指出有次序的数偶与极坐标面上的点不存在一一对应关系。在讲授一般二元二次方程的简化举例一节时，应该说明移轴和转轴对于简化二元二次方程所能起的作用。可以用反比关系的图形和二次三项式的图形为例，最

好再举一个既須轉軸又須移軸才能簡化的二元二次方程的例子。在講直線的方程时，應該指出坐标軸的方程，平行于坐标軸的直線方程和通过原点的直線方程的特点。在講授曲線的极坐标方程时，應該指出圓心在极点的圓的方程的特点。在建立曲線的极坐标方程时，應該注意培养学生学会从曲線的已知直角坐标方程变换成它的极坐标方程。在建立曲線的参数方程时，應該注意培养学生学会从曲線的已知直角坐标方程变换成参数方程。

在本大綱中沒有列入直線的法綫式方程。因此，在求点到直線的距离时，最好不引用直線的法綫式方程。例如，可以先求出已知点在已知直線上的正投影，然后再应用两点間的距离公式来求所求的距离公式。

空間解析几何学与矢量代数

本单元的重点是：矢量代数；空間直線的方程；平面的方程；球面的方程；母綫平行于坐标面的柱面方程；二次曲面；錐面；旋轉面。

要求学生在見到空間直線的方程、平面的方程、球面的方程和二次曲面的标准方程时，能够說出它的图形的名称，还要教会学生使用平行截面法以討論曲面，并且能够作一些极簡單的平面和曲面在第一卦限中的草图。在講空間直線和平面的方程时，應該指出通过坐标軸的平面方程，垂直于坐标軸的平面方程，通过原点的平面方程，坐标面的方程和坐标軸的方程的特点。关于錐面，可以只講頂点在原点的二次錐面；关于旋轉面，可以只講以橫軸為旋轉軸的旋轉面。

在本大綱中沒有列入平面的法綫式方程。因此，在求点到平面的距离时，最好不引用平面的法綫式方程，例如，可以先以已知平面上的一个任意点为始点，以已知点为終点作一矢量，然后求

此矢量在已知平面的法綫上的投影的絕對值即得到所求的距离公式。

函数, 极限及連續性

本单元的重点是: 函数的定义; 函数的表示法; 数列极限的 ε - N 定义; 函数极限的 ε - δ 定义; 无穷小; 无穷小的比較; 連續性的定义。

函数符号 $f(x)$ 是一个新的符号, 对它的用法应有足够的說明并布置足够的习题。要求学生記住基本初等函数的图形, 并且教会学生从两个函数的图形画出它們的和或差的图形, 一些简单的复合函数的图形。

为了正确地理解极限概念, 任意近及充分近的思想是不可缺少的, 因此教师必需講清楚函数极限(包括数列极限)的正确定义(ε - δ 或 ε - N 定义)并說明其必要性。不要強調給定 ε 后求 N 或 δ , 更不要求出最小的 N 或最大的 δ 。

关于間断性, 只要求举例說明左、右极限等于常数或无穷大的两种間断点。对于連續函数在閉区間上的性質, 只要求几何說明。

导数与微分

本单元的重点是: 导数的定义; 导数作为变化率的概念; 导数的几何与物理意义; 初等函数的求导問題; 微分的定义。

要求学生通过不断練習而牢固地記住函数的和、差、积、商, 复合函数以及一二十个基本初等函数的导数公式, 特别是复合函数的导数公式。并且要求学生在作題时能够选用最簡便的計算方法。 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, 只要証 x 为正整数的情况。

微分学的基本定理

本单元的重点是: 拉格朗日定理及泰勒定理。

对于罗必塔法则只証 $\frac{0}{0}$ 型。要求用罗必塔法则求出
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-\lambda x} = 0$, 其中 $\lambda > 0, n > 0$ 。

微分学的应用

本单元的重点是函数图形的研究（函数的增减性，函数的极值，函数图形的凹向，拐点）。

不定积分

本单元的重点是：原函数与不定积分的定义；基本积分公式；不定积分的性质；换元积分法；分部积分法。

要求学生通过练习而牢固地记住一二十个基本的积分公式，并且要求学生学会计算必须经过两次变形才化成基本积分公式的积分。在讲有理函数的积分时，对于化有理真分式为部分分式的问题，可以只提出结论而不加证明，但须通过例题，把算法讲透彻。简单无理函数的积分，可只讲 $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})dx$ 与 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 两种，对后者是否讲尤拉代换，可灵活掌握。在讲了有理函数的积分、三角函数有理式的积分、无理函数 $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ 与 $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ 的积分后，最好指出：它们的积分都是初等函数。积分的递推公式是常常有用的，可以选一个简单的递推公式，安插在恰当的处所，作为例题讲，要使学生领会到“递推”方法的精神，以利于他们使用积分表中其他的递推公式。积分表的用法，要在学生做题已有一定的经验之后再讲，还要注意布置一些经过变形才能在积分表中查出公式的习题。积分表用法的教学时间，可以后延，可以在习题课中教学生查表。

定积分

本单元的重点是：定积分的定义；牛顿-莱布尼兹公式。

要求学生学会正确使用定积分的换元积分法。关于几何与物理的应用题,不要讲得过多,最好参考大纲列举的项目,把几个问题讲透,还要让学生在理解了例题的基础上,独立地解几个没有讲过的应用题。弧长的问题,要讲平面曲线与空间曲线两种。

多元函数的微分学

本单元的重点是:多元函数的定义;偏导数的定义;全增量与全微分的定义;多元函数的复合函数及其求导法。

二重积分

本单元的重点是二重积分的计算法(包括极坐标)。

化二重积分为累次积分的算法,它的难点在于定限,直角坐标与极坐标都如此,要注意把定限问题讲透。在讲了应用题后,要让学生独立地解几个没有讲过的应用题。直角坐标系与极坐标系的二重积分的变换公式,可利用图形建立起来,不作分析证明。

三重积分

本单元的重点是三重积分的计算法(包括柱面坐标、球面坐标)。

这部分的深广度可参考上文对二重积分的那些建议。

线积分

本单元的重点是线积分的计算法。

线积分要讲平面曲线与空间曲线两种。应用题,因限于学生的知识范围,可供选择的不多,重要的是使学生正确理解线积分的概念,让学生见到一个或两个应用题就可以了。

面积分

本单元的重点是面积分的计算方法。

面积分可只讲积分域为 $z=f(x, y)$ 的简单情况。要注意讲清楚面积元素的法线方向，但曲面的单侧与双侧问题可以不提。关于应用题的选择，可参考上文对线积分的建议。

常微分方程

本单元的重点是：微分方程的解、通解、初始条件、特解；变量可分离的微分方程；一阶线性微分方程；二阶常系数齐次线性微分方程；二阶常系数非齐次线性微分方程。

在讲非齐次线性微分方程解的结构时，要讲明当自由项为两个函数相加时的特解等于自由项为每个函数时的特解的和。

在讲二阶常系数非齐次线性微分方程的特解的求法时，可以用待定系数法或 D 运算子法。这里只要求学生掌握自由项为指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的乘积时的特解的求法。

在讲微分方程的幂级数解法时，可举一阶方程或勒让特方程为例。

常数项级数与幂级数

本单元的重点是：无穷级数的收敛与发散；绝对收敛；正项级数的比值审敛法；幂级数的收敛区间与收敛半径；泰勒级数；函数的幂级数展开式。

对于幂级数的四则运算、和的连续性、逐项积分法与逐项微分法均不证。

富里哀级数

本单元的重点是：函数的富里哀级数；函数的富里哀正弦级数

与富里哀余弦級数。

四、关于习题

习题包括: 理論題, 运算題, 应用題, 数值計算題和綜合題。

各类型的习题在习题总数中所占的比重大致如下:

理論題 5%, 运算題 70%, 应用題 20%, 数值計算題 3%, 綜合題 2%。

各单元的习题数量, 大約按下表分配:

单 元 名 称	习 题 数 量
行列式与綫性方程組	20—25
平面解析几何学	120—140
空間解析几何学与矢量代数	100—110
函数、极限、連續	80—85
导数与微分	160—200
微分学的基本定理, 微分学的应用	60—80
不定积分	100—120
定积分及其应用	60—70
多元函数的微分学	80—90
二重积分	30—40
三重积分	15—20
綫积分	20—25
面积分	15—20
常微分方程	80—100
常数項級数与幂級数	50—60
富里哀級数	10—15
共 計	1000—1200

为了貫徹因材施教的原則, 对于少数成績优秀的学生, 教师可以参考教学計划所規定的培养目标的要求, 适当地布置一些綜合性习题和較难的应用題, 或者指定一些参考书, 指导他們习作和閱

讀。教師一方面要照顧學生個人的興趣，同時也要教導學生防止學習上的偏廢、鑽牛角尖，以及好高騖遠等偏向。

五、學時分配的建議

課程內容 \ 教學環節	講 課	習 題 課	小 計
緒 論	1—2	0	1—2
行列式與綫性方程組	5	2	7
平面解析幾何學	16	10	26
空間解析幾何學與向量代數	16	8	24
函數、極限、連續	16—18	6	22—24
導數與微分	16	12—14	28—30
微分學的基本定理，微分學的应用	14—16	10	24—26
不定積分	10	10	20
定積分及其應用	13	10	23
多元函數微分學	14	8	22
二重積分	8	6	14
三重積分	3	2	5
綫 積 分	5	2	7
面 積 分	3	2	5
常微分方程	17—18	13	30—31
常數項級數與冪級數	12—13	4—5	16—18
富里哀級數	4	2	6
共 計	173—180	107—110	280—290

注(1) 本大綱適用於高等工業學校本科五年制的各類專業，教學時數為 290 學時，其中講課 180 學時，習題課 110 學時，課外學習時間 435 學時。為了適應少數專業的特殊情況，劃出下列共約 40 學時的教學內容以供靈活使用：

三重積分，綫積分，面積分，富里哀級數。

二元及三元齊次綫性方程組及其有非零解的充分必要條件，矢量的矢量積，矢量的混合積，簡單無理函數的積分，兩種廣義積分的審斂

法, Γ 函数及其递推公式, 全微分的几何意义, 全微分形式不变性, 隐函数求导公式, 条件极值, 拉格朗日乘数法, 空间曲线的切线法平面, 全微分方程, 尤拉方程, p 级数, 阿贝尔定理。

这些专业在拟订教学计划时, 经过一定的审批手续, 可以把上列内容的一部分或全部项目舍去, 换为其他的数学内容, 或者把学时移作别用。但讲课与习题课的时数仍应接近于 3 与 2 之比。

注(2) 学时分配的建議表中, 有几个单元的讲课或习题课的时数, 估计了一、二学时的幅度。教师在拟订教学日历时, 如果遇到放假而又不能补课的情况, 可以在此幅度内调剂安排, 如果这些幅度还不够调剂之用, 可以在注(1)所划出的那些项目中考虑删减。

六、推荐教材

1. 樊映川等編: “高等数学讲义”上、下册, 人民教育出版社。
2. 重庆大学数学教研組編: “高等数学”上、下册, 人民教育出版社。
3. R. 罗德著, 常彦譯: “高等数学”第一卷
R. 罗德著, 邓立生, 秦裕瑗譯: “高等数学”第二卷
R. 罗德著, 秦裕瑗譯: “高等数学”第三卷, 人民教育出版社。
4. H. H. 魯金著, 張理京、譚家岱譯: “微分学”、“积分学”, 人民教育出版社。
5. 其他。