



高分经验分享!



小鑫考研吧吧

# 考研数学 复习全书

(数学一)

潘鑫◎著


零基础复习 快速提高

掰开揉碎讲 轻松易懂

考点全覆盖 高分笔记

现身讲技巧 倾力奉献



 中国工信出版集团

 电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

电子社考研权威辅导丛书

# 小鑫考研吧吧 考研数学复习全书 (数学一)

潘鑫 著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书按照教育部考试中心公布的考研大纲要求编写,内容涵盖研究生考试数学一全部知识点,突出三个非常:语言非常通俗,逻辑非常清晰,例题非常丰富,这三个特色使得本书区别于市场上的同类图书。本书对传统课本中的重点、难点、疑点及最容易被忽视的一些潜在要点进行了全新的诠释,作者总结了自身在考研数学培训生涯中的诸多经验,将其独创的考研数学学习套路毫无保留地奉献给读者。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

小鑫考研吧吧:考研数学复习全书. 数学一 / 潘鑫著. —北京:电子工业出版社, 2015.3

(电子社考研权威辅导丛书)

ISBN 978-7-121-25401-7

I. ①小… II. ①潘… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第009698号

策划编辑:齐岳

责任编辑:徐静 齐岳

文字编辑:万子芬 刘真平 李蕊 韩玉宏

印刷:涿州市京南印刷厂

装订:涿州市京南印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开本:880×1230 1/16 印张:52 字数:2080千字

版次:2015年3月第1版

印次:2015年3月第1次印刷

定价:98.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线:(010) 88258888。

# 前言

考研是一场艰苦的战斗，为了帮助广大备考的同学，尤其是基础相对薄弱的同学在短时间内掌握考研数学的考点，取得理想的分数，夺取考研这场战役的胜利，我精心编写了本书，希望可以在考研的道路上助大家一臂之力。

## ⇨ 本书定位

本书是一本适合读者自学的考研数学辅导书籍。与传统教材不同，本书的语言通俗，逻辑清晰，例题丰富，书中所涉及的知识点，无论多简单，都有举例，这“三板斧”使得您完全不用担心有看不懂的知识点。所以，本书定位为“零基础”考研数学自学用书，也是广大考生在考研数学复习阶段应看的第一本书。

所谓教材，是指老师上课时所使用的书籍，大多数教材不会把每个知识点都讲解得非常细，目的是要在课堂上给学生留有充分的思考空间，锻炼同学们的思维能力；而教辅书，顾名思义，是教材辅助的书籍，教辅书不能脱离教材，如果一个基础很薄弱的学生直接看教辅书会使学习变得很吃力。本书既非教材，也非教辅，是一本十分“纯正”的自学用书。为了能让读者实现真正的自学，我在写作过程中重视每个细节，每个知识点和例题都配有通俗易懂的解释，这样一来就可以保证“零基础”的读者也能够看懂本书。知识被“掰开揉碎”地讲解，内容编排符合考生的思维习惯，语言风格轻松活泼，相信广大考生阅读本书后会有一种爱不释手的感觉。

## ⇨ 本书特色

### 1. 语言通俗

大部分考研数学类书籍都摆脱不了语言晦涩难懂、内容体系“模式化”、文字叙述与读者思维不同步，极易出现断档的弊病，读者需要逐字去琢磨文字的意思，一旦在某个知识点卡住，会耗费大量的时间。我认为考研数学类书籍最高级的表达方式就是用最通俗的文字，去讲解最难理解的知识，不需要读者费时费力地反复琢磨，而这正是本书的最大亮点。本书的所有文字，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到每章习题的解析，都非常轻松活泼、通俗易懂，让考生抛弃掉考研复习的沉重心情。这样一来，读者在轻松看懂本书内容的同时，又能发现学习的乐趣，更可贵的是可以连贯、高效地复习，节省了宝贵的时间。

### 2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑非常清晰。具体来说，本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且每一步解答都详细注明了知识点来源。众所周知，做一道题可能会同时用

到很多不同章节的知识点,很多考研辅导书中都存在这样一种现象:讲完一个知识点,然后下面有配套的例题,但此例题中会用到还未讲解的知识点且没有向读者说明。这样一来,许多读者就不明白了,思考了很长时间,以为是某个复习过的知识点自己忘了,反复看才发现该题用到的是后续的知识,白白浪费了时间。多年的教学经验以及自身的考研经验让我在这一点上极其重视,避免了上述现象的发生。

总的来说,本书“逻辑清晰”的特点体现在以下三个方面:

- (1) 书中例题解析涉及的知识点在对应章节都有详细的讲解。
- (2) 书中例题的每一步解答都详细注明了知识点来源。
- (3) 书中例题均与知识点完全对应。

### 3. 例题丰富

本书的例题非常丰富,甚至是一些十分简单的知识点对应的例题,按理说没有必要再举例,但本书还是写了。这是为什么呢?因为我在教学的过程中发现了这样一种现象:就算知识点再简单,讲解得再明白,不举例的话,学生心里多少还是会有一些不踏实,不会将知识点运用到实际做题中。基于此,本书所涉及的知识点都有配套的例题。

我是一个标准的“90后”,痴迷于大学阶段数学类课程,在本科阶段我利用课余时间给同学们办讲座,帮助他们渡过“期末考试”的难关,在研究生入学考试中,我考出了接近满分的成绩。我在平时的学习和备战考研的过程中总结了一套独有的学习方法,研究生阶段边学习边在各大考研机构讲课、录制视频,希望把自己的学习方法教给更多的人,帮助他们顺利考上研究生。

本书的写作过程耗时两年,可以说贯穿了我研究生学习生涯。面对着繁重的学习、授课压力,我挤出时间研究同类书籍、独立编写例题、反复修改书稿、广泛征求意见,终于使得本书顺利出版。谨以此书献给所有需要考研的同学们!

凤凰鸣九天,需烈火涅槃;蛟龙纳明珠,需深潜寒潭。春日那“深巷梨花轻闭门,风袅篆烟系柳丝”需要冬日那一季枯老,秋日那“冲天香阵透长安,满城尽带黄金甲”需要夏日那暴雨骄阳。祝同学们考研成功!

潘鑫

2015年1月于北京

# 目 录

## 第一部分 线性代数

第1章 行列式	2	2.3 矩阵的秩	40
1.1 行列式的标志	2	2.3.1 矩阵子式的定义	40
1.2 行列式的本质	2	2.3.2 矩阵秩的定义	42
1.3 行列式的基本计算方法	3	2.3.3 利用初等行变换来求矩阵的秩	42
1.3.1 特殊行列式的计算	3	2.4 第一个大总结	46
1.3.2 一般行列式的计算	5	2.5 第二个大总结	47
1.4 行列式的五条性质	7	2.6 矩阵乘法的两条定律	49
1.5 克拉默法则	10	2.6.1 矩阵乘法满足结合律	49
1.6 矩阵	12	2.6.2 矩阵乘法对矩阵加减法满足分配律	49
1.7 矩阵的运算	13	2.7 可交换的矩阵相乘特例	49
1.7.1 矩阵与矩阵相加	13	2.8 关于矩阵转置的四个公式	49
1.7.2 数字与矩阵相乘	13	2.9 关于矩阵可逆的六个公式	50
1.7.3 矩阵与矩阵相乘	13	2.10 可逆矩阵、初等变换、初等矩阵、 矩阵秩之间的关系及等价矩阵	53
1.8 矩阵的转置	15	2.10.1 可逆矩阵与初等矩阵的关系	53
1.9 方阵、对角矩阵、单位矩阵、逆矩阵	16	2.10.2 初等矩阵与初等变换的关系	53
1.9.1 方阵	16	2.10.3 初等变换与矩阵的秩的关系	54
1.9.2 对角矩阵	16	2.10.4 初等矩阵的逆矩阵	55
1.9.3 单位矩阵	16	2.10.5 等价矩阵	56
1.9.4 逆矩阵	16	2.11 分块矩阵及一些知识点的深化	57
1.10 矩阵的向量表示法	17	2.11.1 分块矩阵	57
1.11 关于代数余子式的三句话	18	2.11.2 反对称矩阵	57
1.11.1 第一句话	18	2.11.3 求一个矩阵的逆矩阵	58
1.11.2 第二句话	18	2.11.4 特殊分块矩阵的逆矩阵	61
1.11.3 第三句话	19	2.11.5 求一个矩阵的若干次幂	63
1.12 克拉默法则的推论	20	第3章 向量	67
1.12.1 第一个充分必要条件	21	3.1 向量与向量组的基本概念	67
1.12.2 第二个充分必要条件	22	3.2 线性表出的概念	67
1.12.3 第三个充分必要条件	22	3.3 线性相关与线性无关的概念	68
1.12.4 第四个充分必要条件	22	3.4 最大无关组	69
1.13 关于行列式的两种计算题	25	3.5 “向量组的秩”的概念	69
1.13.1 抽象行列式的计算	25	3.6 “向量组的秩”与“矩阵的秩”的关系	69
1.13.2 具体行列式的计算	26	3.7 线性表出的推广	70
1.14 贯穿考研试题的思维定式	37	3.8 等价向量组	71
第2章 矩阵	39	3.9 关于线性相/无关要记的几个结论	71
2.1 矩阵的初等变换	39	3.10 方程组的求解	72
2.2 初等矩阵	39		

3.10.1 求齐次方程组的通解	73	5.5 相似矩阵	120
3.10.2 求非齐次方程组的通解	77	5.6 对角化	120
3.11 五个重要的定理	80	5.7 合同矩阵	120
3.11.1 定理 1	80	5.8 证明两个矩阵有相同的特征值	121
3.11.2 定理 2	81	5.9 几个需要记住的结论	122
3.11.3 定理 3	81	5.9.1 结论 1	122
3.11.4 定理 4	84	5.9.2 结论 2	122
3.11.5 定理 5	85	5.9.3 结论 3	122
3.11.6 真题分析	85	5.9.4 结论 4	123
3.12 线性表出的本质	87	5.10 与特征向量有关的证明题通常会用到反证法	123
3.13 初等行变换前后相应的列向量组的线性相关性	87	5.11 由 $A$ 的特征值、特征向量推 $A$ 的多项式的特征值、特征向量	124
3.14 与秩有关的八个公式	89	5.12 怎样的方阵可以对角化	125
3.15 向量空间	91	5.13 若方阵可以对角化, 及 $P$ 怎么求	128
3.15.1 向量空间, 基, 维数, 坐标	91	5.14 关于相似矩阵的五个小结论	132
3.15.2 基变换公式	92	5.15 实对称阵的两个来自不同特征值的特征向量必正交	132
3.15.3 正交向量, 正交矩阵, 正交化	94	5.16 实对称阵一定可以相似于对角矩阵	133
3.16 线性相/无关的证明题	99	5.17 实对称阵一定可以合同于对角矩阵	138
3.16.1 方法 1	99		
3.16.2 方法 2	99		
<b>第 4 章 解线性方程组</b>	<b>102</b>	<b>第 6 章 二次型</b>	<b>141</b>
4.1 求两个方程组的公共解	102	6.1 二次型的定义	141
4.2 同解方程组的证明	104	6.2 二次型的对应矩阵	141
4.2.1 方法 1	104	6.3 利用矩阵乘法来表示二次型	142
4.2.2 方法 2	105	6.4 标准形	143
4.3 已知齐次方程组的基础解系, 反求齐次方程组	107	6.5 规范形	143
4.4 线性方程组解的性质	107	6.6 化二次型为标准形	143
4.5 由方程组中参数的取值判断解的类型	110	6.7 合同二次型	144
4.6 已知方程组解的类型, 求方程组中的参数	113	6.8 正定二次型、正定矩阵	144
<b>第 5 章 特征值、特征向量、相似矩阵</b>	<b>115</b>	6.9 用正交变换法化二次型为标准形	144
5.1 特征值、特征向量的基本概念	115	6.10 用配方法化二次型为标准形	148
5.2 特征值、特征向量的计算方法	115	6.11 两个对称矩阵合同的充分必要条件	150
5.3 对称矩阵、正交矩阵的复习	118	6.12 正定二次型、正定矩阵的证明方法	151
5.4 矩阵有多少个特征值为零	119	6.12.1 正定矩阵的证明方法	151
		6.12.2 正定二次型的证明方法	154
		<b>第二部分 高等数学</b>	
<b>第 1 章 极限与连续</b>	<b>156</b>	1.4.2 趋于无穷大时函数的极限的定义	233
1.1 极限长什么样	156	1.4.3 趋于定点时函数的极限的定义	234
1.2 极限的计算方法	156	1.5 函数的连续性与间断点	236
1.2.1 函数的极限的计算方法	156	1.5.1 函数的连续性	236
1.2.2 数列的极限的计算方法	206	1.5.2 函数的间断点	243
1.3 三个小技巧	225	1.6 无穷小、同阶无穷小、等阶无穷小、高阶无穷小、低阶无穷小、 $k$ 阶无穷小	247
1.3.1 第一个小技巧	225	1.6.1 无穷小	247
1.3.2 第二个小技巧	226	1.6.2 同阶无穷小	247
1.3.3 第三个小技巧	229	1.6.3 等价无穷小	248
1.4 极限的定义	230	1.6.4 高阶无穷小	248
1.4.1 数列的极限的定义	231		



1.6.5 低阶无穷小	250	3.8 求函数在给定区间的最值	341
1.6.6 $k$ 阶无穷小	250	3.9 求两个函数的交点个数或求一个方程的 实根个数	345
1.7 两个常用的结论	250	3.10 证明恒等式	348
1.8 函数的极限存在性	252	3.11 证明不等式	353
1.8.1 函数和差的极限存在性	252	3.12 证明零点问题	360
1.8.2 函数乘积的极限存在性	253	<b>第4章 一元函数积分学</b>	371
1.9 已知一极限求另外一极限	254	4.1 原函数与不定积分	371
1.10 求以数列极限的形式给出来的 函数 $f(x)$ 的表达式	260	4.1.1 原函数	371
1.11 函数极限的保号性	267	4.1.2 不定积分	371
1.11.1 趋于无穷型的函数极限的保号性	267	4.2 不定积分长什么样	372
1.11.2 趋于无穷型的函数极限的保号性 的推论	268	4.3 定积分和反常积分长什么样	372
1.11.3 趋于定点型的函数极限的保号性	269	4.4 不定积分和定积分的计算方法	374
1.11.4 趋于定点型的函数极限的保号性 的推论	269	4.4.1 不定积分的计算方法	374
1.12 函数极限与数列极限的相互转化	271	4.4.2 定积分的计算方法	409
1.12.1 函数极限转化为数列极限	271	4.5 反常积分的计算方法	414
1.12.2 数列极限转化为函数极限	274	4.6 定积分的应用	422
<b>第2章 导数与微分</b>	277	4.6.1 利用定积分求面积	422
2.1 可导的定义	277	4.6.2 利用定积分求旋转体的体积	426
2.1.1 函数在某一点处可导的定义	277	4.7 求被积函数中含绝对值的定积分与 反常积分	434
2.1.2 函数在某一点处左/右可导的定义	282	4.8 两个重要知识点	435
2.1.3 函数在某区间可导的定义	294	4.8.1 原函数的存在性	435
2.2 常用的导数公式	295	4.8.2 对称区间上奇偶函数的定积分与 反常积分	440
2.2.1 基本初等函数的导数公式	296	<b>第5章 微分方程</b>	445
2.2.2 导数的四则运算法则	297	5.1 微分方程什么样	445
2.2.3 复合函数的导数公式	297	5.2 微分方程的阶	446
2.2.4 幂指数函数求导	298	5.3 微分方程的解	447
2.3 可微的定义	299	5.4 微分方程的通解	448
2.4 可微、可导、连续三者的关系	300	5.5 微分方程的初始条件与微分方程的特解	448
2.5 很重要的四个知识点	303	5.6 求一阶微分方程的通解的方法	448
2.5.1 第一个知识点	303	5.6.1 可分离变量法	448
2.5.2 第二个知识点	303	5.6.2 换元法	451
2.5.3 第三个知识点	311	5.6.3 公式法	454
2.5.4 第四个知识点	314	5.6.4 伯努利法	457
2.6 高阶导推低阶导	315	5.6.5 变量代换法	459
2.7 求某函数的高阶导数的方法	315	5.7 求二阶常系数线性微分方程的通解的方法	459
2.8 求曲线的渐近线	318	5.7.1 求二阶常系数齐次线性微分 方程的通解的方法	460
2.9 分段函数求导	323	5.7.2 求二阶常系数非齐次线性微分 方程的通解的方法	461
<b>第3章 微分中值定理及其应用</b>	329	5.8 求二阶变系数微分方程的通解的方法	464
3.1 求函数在给定区间的单调性	329	5.8.1 求不含 $y$ 的二阶变系数微分 方程的通解的方法	464
3.2 求函数的单调区间	329	5.8.2 求不含 $x$ 的二阶变系数微分 方程的通解的方法	464
3.3 求函数的极值点与极值	331	5.9 线性微分方程解的性质与结构	465
3.4 求函数在给定区间的凹凸性	333		
3.5 求函数的凹凸区间	334		
3.6 求函数的拐点	336		
3.7 与极值点和拐点有关的一个重要结论	340		





2.5.3 混合型随机变量	698	3.8.1 $\chi^2$ (读作“kǎi方”)分布	775
2.6 三条重要结论	698	3.8.2 $t$ 分布	777
2.7 分布律	703	3.8.3 $F$ 分布	778
2.8 $F(x)$ 为某一随机变量的分布函数的 充要条件	706	<b>第4章 随机变量的数字特征</b>	779
2.9 通过分布函数求概率	711	4.1 数学期望的基本计算方法	779
2.10 $F(x)$ 为某一随机变量的概率密度函数的 充要条件	714	4.2 数学期望的性质	783
2.11 通过概率密度函数求概率	717	4.3 方差的基本计算方法	788
2.12 常用分布	722	4.4 方差的性质	791
2.12.1 二项分布	722	4.5 常见分布的数学期望与方差	794
2.12.2 泊松分布	724	4.6 协方差与相关系数	797
2.12.3 几何分布	726	4.6.1 协方差	797
2.12.4 均匀分布	727	4.6.2 相关系数	799
2.12.5 指数分布	730	<b>第5章 大数定律和中心极限定理</b>	802
2.12.6 正态分布	731	5.1 切比雪夫不等式	802
2.13 随机变量函数的分布	735	5.2 辛钦大数定律	803
<b>第3章 二维随机变量及其分布</b>	740	5.3 列维林德伯格定理(中心极限定理)	804
3.1 二维随机变量的联合分布律、 边缘分布律、条件分布律	740	<b>第6章 数理统计的基本概念</b>	805
3.2 二维随机变量的联合分布函数、 边缘分布函数	744	6.1 五个名词	805
3.3 二维随机变量的联合概率密度函数、 边缘概率密度函数、条件概率密度函数	746	6.2 与 $\bar{X}$ 和 $S^2$ 有关的三条性质	805
3.4 通过联合概率密度函数 $f(x,y)$ 求概率	759	6.3 与正态总体有关的四条结论	806
3.5 二维均匀分布	762	<b>第7章 参数估计</b>	808
3.6 随机变量的独立性	765	7.1 无偏估计	808
3.7 两个随机变量函数的分布	768	7.2 矩估计	809
3.8 $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布、 $F$ 分布	775	7.3 最大似然估计	812
		7.4 置信区间	816

## 第一部分

# 线性代数

➤ 行列式

➤ 矩阵

➤ 向量

➤ 解线性方程组

➤ 特征值、特征向量、相似矩阵

➤ 二次型

# 第1章

## 行列式

### 1.1 行列式的标志

行列式共有两个标志，接下来要给大家讲这两个标志。在讲之前先跟大家说明一点，即只有同时满足这两个标志才是行列式。

行列式的第一个标志：双竖线。大家注意，千万不能写成圆括号“( )”或者方括号“[ ]”。

我们来看一个例子。

例.  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$  和  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$  这两个式子都不是行列式，因为外面没有用双竖线，而是用方扩号、圆括号。

行列式的第二个标志：行数=列数。换句话说，就是有几行就有几列，行数和列数绝对不可以不相等。

我们还是来看例子。

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$  就不是行列式，因为行数  $\neq$  列数（大家看， $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 13 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$  有三行两列，小学生都知道  $3 \neq 2$ ）。

以上给大家介绍了行列式的两个标志，即“双竖线”和“行数=列数”，简单吧！但是再次强调：这两个标志必须同时满足才是行列式，只满足其中一条是不行的。

再来看以下几个例子。

例.  $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 19 \\ 2 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

例.  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 78 \end{pmatrix}$  不是行列式，因为它既不满足行列式的第一个标志，也不满足行列式的第二个标志。

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 9 & 76 \\ 1 & 23 \end{vmatrix}$  不是行列式，因为它不满足行列式的第二个标志。

例.  $\begin{vmatrix} 4 & 50 \\ 1 & 32 \end{vmatrix}$  是行列式，因为它同时满足行列式的第一个标志和第二个标志。

例.  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

好，通过本节的讲解，相信大家对行列式已经有了很直观的认识，下面看第二节。

### 1.2 行列式的本质

本节给大家讲的是行列式的本质，其实本节的内容就一句话：行列式的本质是一个数。

大家注意：在这句话中，强调的是“一个”。

我们来看例子。

例.  $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 32 & 12 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 43 & 45 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$  都是行列式。第一个行列式在双竖线内有 4 个数, 第二个行列式在双竖线内写有 9

个数, 但是它们的本质都只是“一个”数。

大家现在明白了吧, 这就是本节想要告诉大家的, 此时肯定有不少同学想问: 行列式所表示的那个数到底是什么? 这个问题会在 1.3 节中讲解。

## 1.3 行列式的基本计算方法

在第二节中我们已经知道了行列式的本质是一个数, 那么这个数究竟是多少? 这就涉及行列式的基本计算方法, 归纳如下:

行列式的基本计算方法	}	特殊行列式的计算	上三角行列式的计算 下三角行列式的计算 对角行列式的计算 反对角行列式的计算
		一般行列式的计算	两行两列行列式的计算 三行三列行列式的计算 大于三行三列行列式的计算

### 1.3.1 特殊行列式的计算

#### 1. 上三角行列式的计算

先给大家介绍一下什么叫“对角线”。不说专业术语, 用最通俗易懂的话来说, 对角线是指行列式中从左上到右下的那条斜线。

例.  $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 28 \\ 4 & 8 & 92 \\ 12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 12 & 43 & 54 \\ 11 & 43 & 6 & 67 \\ 54 & 32 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

在这三个行列式中, 对角线分别为 “ $\overset{3}{8}$ ”、“ $\overset{2}{12}$ ”、“ $\overset{3}{2}$ ”。

**注意:** 对角线是指行列式中从左上到右下的斜线, 千万别记成从右上到左下的斜线。

再来看什么叫“上三角行列式”。上三角行列式是指对角线下侧的所有数都为 0 的行列式。

例.  $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 0 & 32 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 34 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$  都是上三角行列式。

**需要注意:** 在判断一个行列式是否为上三角行列式时, 只需要关注对角线下侧, 对角线下侧的所有数都为 0 的行列式就是上三角行列式, 至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 都无所谓。

例.  $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$  和  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$  都是上三角行列式。

那么, 上三角行列式的计算方法是什么? 很简单: 直接将对角线上的数相乘即可。

例.  $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4 \times 1 \times 8 = 32$ ,  $\begin{vmatrix} 4 & 43 & 9 & 55 \\ 0 & 1 & 15 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 1 \times 2 \times 3 = 24$ ,  $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 = 20$

## 2. 下三角行列式的计算

下三角行列式是指对角线上侧的所有数都为 0 的行列式。

下三角行列式的计算方法: 直接将对角线上的数相乘(和上三角行列式的计算方法完全一样)。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 1 \times 3 = 12, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 = 5, \quad \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 32 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 8 \times 2 \times 10 \times 1 = 160$$

## 3. 对角行列式的计算

对角行列式是指除对角线上的数以外所有数都为 0 的行列式。换言之, 对角行列式是上三角行列式和下三角行列式的结合。注意: 对角线本身的数中有没有 0 无所谓, 只要除对角线以外的所有数都为 0 的行列式就是对角行列式。

对角行列式的计算方法: 直接将对角线上的数相乘(和上三角、下三角行列式的计算方法完全一样)。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \times 0 = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 3 \times 2 = 18, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 9 \times 10 = 180$$

再次提醒注意:

- 在判断某行列式是否为上三角行列式时, 只需判断对角线下侧的数是否全为 0 即可, 至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为下三角行列式时, 只需判断对角线上侧的数是否全为 0 即可, 至于对角线本身的数及对角线下侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为对角行列式时, 只需判断对角线上侧及下侧是否全为 0 即可, 至于对角线本身的数中有没有 0 则根本不需要关注。

只要某行列式是上三角行列式、下三角行列式或对角行列式, 那么计算该行列式的方法就是直接把对角线上的数相乘。

## 4. 反对角行列式的计算

先来介绍“反对角线”的概念, 反对角线是指行列式中从右上到左下的斜线。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & 13 \\ 1 & 43 & 43 \\ 45 & 13 & 14 \end{vmatrix} \text{ 两个行列式中“} \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \text{”和“} \begin{matrix} 13 \\ 43 \\ 45 \end{matrix} \text{”分别为各自的反对角线。}$$

那么, 反对角行列式是怎样的行列式? 反对角行列式是指除了反对角线上的数以外的所有数都为 0 的行列式(反对角线上的数中有没有 0 不需要关注)。

$$\text{例. } \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ 都是反对角行列式。}$$

$$\text{反对角行列式的计算方法: 设反对角行列式为 } \begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & & a_2 \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \\ a_n & & & 0 \end{vmatrix}, \text{ 则该反对角行列式的值为 } (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n,$$

其中  $n$  为该反对角行列式的行数(或列数)。

$$\text{例. 计算 } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解: 此行列式为反对角行列式, 如果想计算此行列式的值, 需要套用刚才讲过的公式  $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$ 。由于这是四阶(四行四列)行列式, 所以  $n=4$ 。又因为在此题中,  $a_1=2, a_2=1, a_3=3, a_4=4$ , 所以此行列式的值为  $(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} \times 2 \times 1 \times 3 \times 4 = 24$ 。

## 1.3.2 一般行列式的计算

## 1. 两行两列行列式的计算

两行两列的行列式又被称为二阶行列式，可以直接利用公式来计算，公式为：
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

例. 计算  $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

解:  $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 1 \times 2 = 16$

例. 计算  $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

解:  $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 7 \times 8 - 3 \times 2 = 50$

## 2. 三行三列行列式的计算

三行三列的行列式又称为三阶行列式，与二阶行列式类似，可以直接利用公式来计算，公式为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

这公式并不难记，记忆方法如下：等式右侧共有六项，前三项为正，后三项为负，大体上要这么记：

$$\square + \square + \square - \Delta - \Delta - \Delta$$

那么，三个  $\square$  中的每一个  $\square$  该如何记？很简单：第一个  $\square$  为对角线上的三个数相乘。对角线是 “ $\begin{matrix} a \\ e \\ i \end{matrix}$ ”，

所以第一个  $\square$  为  $aei$ ；那么第二个  $\square$  和第三个  $\square$  该如何记？也很简单：首先，从行列式中去掉对角线，也就是说，

从行列式中去掉 “ $\begin{matrix} a \\ e \\ i \end{matrix}$ ”，则行列式变为  $\begin{vmatrix} b & c \\ f \\ g & h \end{vmatrix}$ ，只剩六个数了，然后从这六个数中找出三个不同行、也不同列的数相乘就是第二个  $\square$ ；剩下的三个数相乘就是第三个  $\square$ 。

那么，三个  $\Delta$  中的每一个  $\Delta$  又该如何记？第一个  $\Delta$  为反对角线上的数字相乘。反对角线是 “ $\begin{matrix} c \\ e \\ g \end{matrix}$ ”，所以第

一个  $\Delta$  为  $ceg$ ；至于第二个  $\Delta$  和第三个  $\Delta$  的记忆方法，也很简单：首先，从行列式中去掉反对角线，即从行列式中

去掉 “ $\begin{matrix} c \\ e \\ g \end{matrix}$ ”，则行列式变为  $\begin{vmatrix} a & b \\ d & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ ，只剩下六个数。然后从这六个数中找出三个不同行、也不同列的数相

乘就是第二个  $\Delta$ ；剩下的三个数相乘就是第三个  $\Delta$ 。

自己试试默写此公式：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

默写完公式后，再看看下面的例题：

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 3 \times 5 \times 7 - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9$   
 $= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72$   
 $= 0$



## 3. 大于三行三列的行列式计算

通过前面的介绍,我们已经知道了二阶行列式和三阶行列式可以通过公式来计算。那么,如果是四阶(四行四列)的行列式该怎么计算?如果是五阶(五行五列)的行列式又该怎么计算?如果还想知道相应的公式,只能很遗憾地告知:大于三阶的行列式就没有计算公式了。但是不要失望!虽然没有公式,但是有办法计算!我们一起开动脑筋想想,大于三阶的行列式虽然没有计算公式,但是二阶行列式和三阶行列式是有计算公式的,如果可以将四阶行列式、五阶行列式化为二阶的行列式或三阶的行列式,就可以套公式了,事实就是如此。

下面介绍大于三行三列的行列式的计算方法:降阶法(也叫按行展开法)。

降阶法有两个步骤:

(1) 从行列式中任意选择一行或一列。

(2) 设我们选择的那一行数从左往右依次为  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (如果选择的是列,就设选择的那一列数从上往下依次为  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ), 然后设  $x_i$  为  $a_i$  的行标(比如  $a_1$  处于行列式中的第三行,那么  $x_i$  就是 3), 设  $y_i$  为  $a_i$  的列标(比如  $a_1$  处于行列式中的第二列,那么  $y_i$  就是 2)。最后,再设  $|A_i|$  为原行列式中去掉  $a_i$  所在行和所在列后剩下的数组成的行列式,则行列式的值  $= a_1 \times (-1)^{x_1 y_1} \times |A_1| + a_2 \times (-1)^{x_2 y_2} \times |A_2| + \dots + a_n \times (-1)^{x_n y_n} \times |A_n|$ 。

以上就是降阶法(也叫按行展开法)的两个步骤。由于步骤(2)设的东西很多,所以可能会觉得这个方法很难,降阶法其实非常简单。只不过如此简单的方法如果要用规范化的语言描述起来还真是比较麻烦,所以在步骤(2)才设这么多。现在看下面的这道例题,看完就会恍然大悟:哦!原来此方法如此简单啊。

例. 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

解:前面已经提过了,降阶法是用于计算大于三阶的行列式的方法,而本题是三阶行列式,应该用公式法来计算啊,肯定有很多同学会这么想。现在告诉大家:三阶行列式既能用公式法计算,也能用降阶法计算,但是大于三阶的行列式只能用降阶法计算(除非是特殊的行列式)。由于要举例说明降阶法的使用,所以这道例题就用降阶法来计算。

我们严格按照上述两个步骤来做。

(1) 从行列式中任意选择一行或一列,此时有六种选法:可以选择第一行 1 2 3, 可以选择第二行 4 5 6, 可以选择第三行 7 8 9, 可以选择第一列 1 4 7, 可以选择第二列 2 5 8, 可以选择第三列 3 6 9。从这六种选法中任意选择一种都可以,因为无论选的是哪一种,最后的答案都是一样的。如我们就选择第一行,即 1 2 3。

$$(2) D = 1 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

为什么会这样呢?因为“-1”是公式中有的,记住就行了。由于 1 在第一行第一列,所以是 1+1; 2 在第一行第二列,所以是 1+2; 3 在第一行第三列,所以是 1+3。然后  $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$  分别为行列式去掉 1, 2, 3 所在行和所在列后剩下的行列式。请看下面的详细解释。

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ 去掉 } \boxed{1} \text{ 所在的行和列, 即去掉第一行和第一列, 剩下的数所组成的行列式为 } \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{ 去掉 } \boxed{2}$$

所在的行和列, 即去掉第一行和第二列, 剩下的数所组成的行列式为  $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$  去掉  $\boxed{3}$  所在的行和列, 即

去掉第一行和第三列, 剩下的数所组成的行列式为  $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$ 。

这道题就做完了,最后的答案是 0。

倘若在步骤(1)选择的不是第一行而是第二行、第三行、第一列、第二列、第三列,那么最后的答案也是一样的,我们不妨试试。如果选择的是第二行 4 5 6, 则

$$D = 4 \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 6 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

可见用两种不同的选法来做,结果是一样的。同样还可以选择第三行、第一列、第二列、第三列来做,结果也一样。

注意:这道题是采用降阶法来做的,把三阶的行列式降成三个二阶行列式,然后用二阶行列式的公式去做。此题可以直接用公式法,因为三阶行列式本来就有公式。但是如果计算四阶或四阶以上的行列式,就必须用降阶法了。计算四阶的行列式要将其化为四个三阶行列式相加的形式,然后用三阶行列式的公式去计算。当然,如果认为三阶行列式的公式麻烦,完全可以再将每个三阶行列式降为三个二阶行列式,然后用二阶行列式的公式去计算。

至此，本节已经讲完，最后给两点温馨提示。

温馨提示 1：在进行降阶法的步骤（1）（从行列式中任意选择一行或一列）时，要尽量选取有 0 的行或列，因为 0 的那一项肯定是 0，不用乘了，简化了步骤（2）。

温馨提示 2：特殊行列式完全可以用一般行列式的计算方法来计算。如  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$  是特殊行列式中的下三角行列式，直接把对角线上的数字相乘即可， $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 = 8$ 。而如果把它看成是一般行列式中的两行两列行列式，则  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 0 \times 5 = 8$ ，答案是一样的。

## 1.4 行列式的五条性质

1.3 节给大家讲的知识已经足够计算一个行列式了，然而，为了计算的方便与快捷，以下五条行列式的性质也务必掌握（再次说明：这不属于行列式的基本计算方法，只是性质，通过这些性质可以更快地计算一个行列式，务必掌握）。

### 性质 1

一个行列式的转置等于它本身。

先来说一下什么叫转置。把一个  $n$  行  $n$  列的行列式，第一行变成第一列，第二行变成第二列……第  $n$  行变为第  $n$  列后所得到的新行列式称为原行列式的转置。假设原行列式记为  $D$ ，则它的转置记作  $D^T$ 。

例.  $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ，求  $D$  的转置  $D^T$ 。

解：把它的第一行 2 3 5 变为第一列 2 3 5，把它的第二行 1 6 8 变为第二列 6 2 8，把它的第三行 3 2 1 变为第三列 1 8 2，得到转置矩阵  $D^T = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ 。

以上只是告诉大家什么是转置，现在来说一下性质 1。性质 1（一个行列式的转置等于它本身）的意思就是  $D^T = D$ 。

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix}$ ，如果分别计算这两个行列式，会发现它们的值是一样的。

### 性质 2

互换两行，行列式变号。

例.  $\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 23 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 23 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$ ， $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 54 \\ 8 & 7 & 12 \\ 43 & 1 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & 54 \\ 43 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

性质 2 有一个推论：如果某行列式有两行相同，就不用费精力去计算了，这个行列式的值一定为 0，这个推论是怎么得出来的？下面说明这个推论的推导过程。

如  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ，根据性质 2，将第一行与第三行进行互换，行列式变号，即  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ a & b & c \end{vmatrix}$ 。那么，什么

数的相反数等于它本身，只有 0。

性质 2 讲完了，练一道题。

例. 计算  $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}$