YIYUAN HANSHU WEIJIFEN

一元函数微积分

□ 主编　张秋燕

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

一元函数微积分

主编　张秋燕

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是专科高等数学系列教材《一元函数微积分》《工程数学》之——《一元函数微积分》.

本书结构清晰，概念准确，循序渐进，可读性强，便于教学，且能够启发和培养学生的自学能力.全书共6章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、一元函数微积分数学实验.例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性，同时适当介绍数学实验等相关知识.书末附有习题答案.

本书可作为独立学院、高职高专和成人教育学院专科各专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

一元函数微积分/张秋燕主编.—重庆：重庆大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-5624-6772-4

Ⅰ.①一… Ⅱ.①张… Ⅲ.①微积分—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第114744号

一元函数微积分

主编 张秋燕

责任编辑：李定群 高曼琦 版式设计：李定群

责任校对：秦巴达 责任印制：赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：邓晓益

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编：401331

电话：(023) 88617190 88617185(中小学)

传真：(023) 88617186 88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn（营销中心）

全国新华书店经销

重庆现代彩色书报印务有限公司印刷

*

开本：787×960 1/16 印张：15 字数：235千

2013年8月第1版 2013年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5624-6772-4 定价：34.80元

前　言

微积分(Calculus)是以极限为工具研究微分学、积分学和无穷级数的数学分支.它从生产技术和理论科学的需要中萌芽,创立于17世纪,是由英国伟大科学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼兹(Leibniz)分别独立地创立的.它的创立,无论是对数学还是对其他科学以至于技术的发展都产生了巨大的影响.恩格斯曾指出:“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利.”

本书是专科高等数学系列教材《一元函数微积分》《工程数学》之——一元函数微积分.其内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、一元函数微积分数学实验.

本书具有如下特色:

1.内容编排上,重思路、重方法、重应用,删除了某些繁杂的理论证明过程,每一章都有一节专门加入了应用实例.

2.文体风格上,力求通俗易懂、直观简洁.一般从实际例子引入概念和理论,描述问题也简洁明确,便于学生阅读.

3.例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性.按节配备了难度适中的习题,每章配有单元检测题,书后附有答案提示.

4.本书最后一章为一元函数微积分实验,搭建了数学成为“数学技术”的平台.以Matlab (7.0版)软件为工具,通过操作,可在计算机上完成函数作图、极限、导数、积分等运算,可解决一些简单的数学建模问题.暂时还不具备条件进行数学实验、数学建模的院校,可以省略这部分内

容,这并不影响本书的系统性和完整性.

本书由张秋燕主编,第一章至第三章以及第六章由张秋燕老师编写;第四章至第五章由彭年斌老师主笔,张秋燕老师修订;全书由张秋燕老师统稿.

由于编者水平有限,书中难免有不足和不妥之处,恳请同行专家和读者不吝赐教,我们表示深深的感谢.

电子科技大学成都学院文理系

2013 年 4 月于成都

目　录

第1章　函数、极限与连续

一元函数微积分学是以极限为工具研究一元函数的微分和积分.本章是一元函数微积分学的基础,介绍函数的基本概念、极限理论与函数的连续性.

1.1　函　数

1.1.1　集　合

集合是现代数学的一个最基本的概念,数学的各个分支普遍运用集合的表示方法和符号.在中学阶段已经学习过集合的知识,现在把其中部分内容进行回顾.

(1)集合的概念

定义　具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**,例如,某学校图书馆的藏书,方程 $x^2-4x+3=0$ 的实数解等,都分别构成一个集合.集合通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

组成集合的对象称为集合的**元素**,元素通常用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

若 a 是集合 A 的元素,记作"$a\in A$","读作 a 属于 A";否则记作"$a\notin A$"(或 $a\,\overline{\in}\,A$),读作"a 不属于 A".

(2)集合的表示法

集合的表示方法有列举法和描述法.

1)列举法

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号{　}内,每个元素只写一次,不分次序.例如,小于10的正偶数构成的集合表示为 $A=\{2,4,6,8\}$;满足不等式

$|x+1|\leqslant 2$ 的所有整数构成的集合表示为 $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$.

2)描述法

把集合中元素所具有的共同性质描述出来,写在大括号{ }内.如不等式 $|x+1|\leqslant 2$ 的所有实数解构成的集合表示为 $B=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$.

集合中的元素都是数时称为数集.常见的数集有自然数集 $\mathbf{N}$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,实数集 $\mathbf{R}$,正整数集 $\mathbf{N}^*$.

(3)区间

区间是高等数学中常用的实数集,分为有限区间和无限区间,具体定义如下:(设 a,b 为任意实数,且 $a<b$)

1)有限区间

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$

半开半闭区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$ $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$

a,b 称为区间的端点,$b-a$ 称为区间的长度.

2)无限区间

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a,x\in\mathbf{R}\}$ $[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a,x\in\mathbf{R}\}$

$(-\infty,b)=\{x\mid x>b,x\in\mathbf{R}\}$ $(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$

$(-\infty,-\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$

(4)邻域

设 $x_0\in\mathbf{R},\delta>0$,开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

其中,x_0 称为**邻域中心**;δ 称为邻域半径.

从数轴上看,$U(x_0,\delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合,如图 1.1 所示.故有

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的去心 δ 邻域,如图 1.2 所示,记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,因而有

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$$

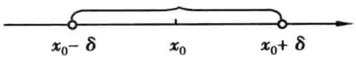

图 1.1

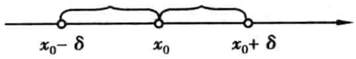

图 1.2

另外，把开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为 x_0 的左 δ 邻域，把开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为 x_0 的右 δ 邻域.

1.1.2　函数

在自然现象或实际问题中，通常会发生一个量随另一个量的变化而变化的情况，例如，物体运动时运行的路程 S 随时间 t 而改变；圆的面积 A 随半径 r 的改变而改变.将两个量之间的这种关系定义为函数关系.

(1)函数的概念

定义　设 x,y 是两个变量，数集 $D\subseteq\mathbf{R}$ 且 $D\neq\varnothing$，若 $\forall x\in D$（“$\forall$”表示“任意的”），按照某种对应法则 f，y 都有确定的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x),x\in D$.

自变量 x 的取值范围（数集 D）称为函数的**定义域**，记作 D_{f}.

若自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有一个，则称函数为单值函数，否则称为多值函数.例如，$y=x+1$ 为单值函数；$y^2=x+1$ 为多值函数.在本书中若没有特殊说明，均指单值函数.

由函数定义知，对 D_{f} 中任意给定的数值 x_0，y 都有确定的值 y_0 与之对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$.

函数值的全体构成的集合称为函数 $y=f(x)$的**值域**，记作 R_f，即

$$R_{\mathrm{f}}=\left\{y\mid y=f(x),x\in D_{\mathrm{f}}\right\}$$

若两个函数的定义域和对应法则分别相同，则这两个函数为相同的函数（此时值域必定相同）.例如，函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是相同的函数；而 $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是不同的函数，因为 $y=x+1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，而函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定

义域为$\{x \mid x\neq 1\}$,因为定义域不同,所以是不同的函数.

例 1.1 设函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$.求 $f(1)$,$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解

$$f(1)=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}=x+\frac{1}{x}.$$

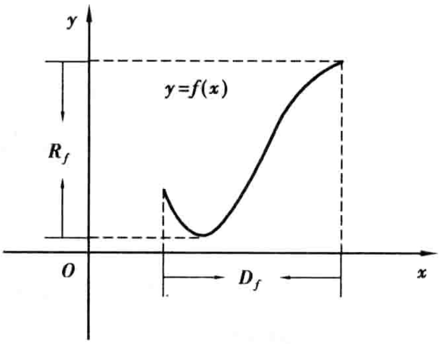

图 1.3

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,取定一个 $x_0\in D_f$,就有一个对应的 y_0,由 x_0,y_0 构成的一组实数对(x_0,y_0)对应 xOy 平面上的一个点.当 x 取遍 D_f 上所有值时,得到 xOy 平面上的点集 M 为

$$M=\{(x,y) \mid y=f(x),x\in D_f\}$$

点集 M 称为函数 $y=f(x)$的**图像**(或图形).图像 M 在 x 轴上的垂直投影点集就是 D_f,在 y 轴上的垂直投影点集就是 R_f,如图 1.3 所示.

若一个函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则,则称该函数为**分段函数**.

下面举几个分段函数的例子.

例 1.2 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

其定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,如图 1.4 所示.

对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$$

例 1.3 取整函数

$$y=[x]=n, n\leqslant x<n+1, n\in \mathbf{Z}$$

对任意实数 x，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，其定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，如图 1.5 所示，$[0.2]=0$，$[-3.1]=-4$，$[5]=5$.

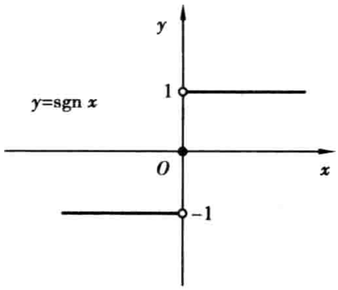

图 1.4

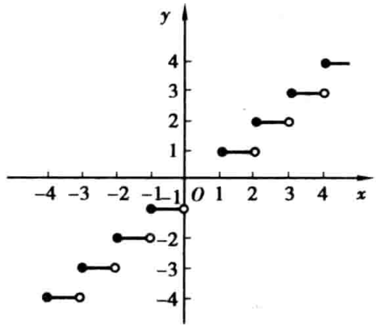

图 1.5

例 1.4　函数

$$y=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$$

定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，如图 1.6 所示.

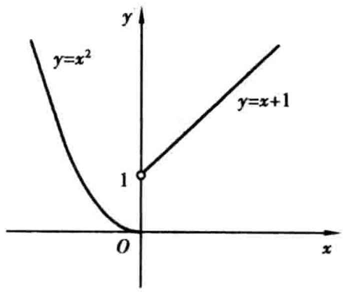

图 1.6

(2)函数的几种特性

1)奇偶性

定义　设函数 $y=f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称.若对 $\forall x\in D_f$，有 $f(-x)=-f(x)$　$(f(-x)=f(x))$，则称 $y=f(x)$为**奇函数(偶函数)**.

例如，$f(x)=x^2$ 为偶函数；$f(x)=x$ 为奇函数；$f(x)=x+x^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

由奇函数定义知，奇函数图像关于原点对称(见图 1.7)，偶函数图像关于 y 轴对称(见图 1.8).

2)单调性

定义　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f，如果 $\forall x_1<x_2\in I\subseteq D_f$，都有

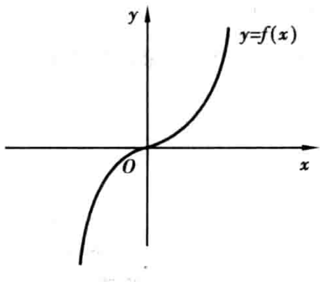

图 1.7

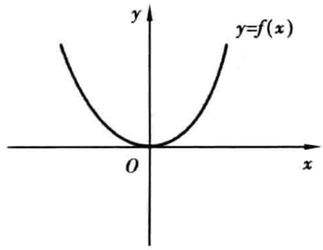

图 1.8

$$f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少).单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升,单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降,如图 1.9、图 1.10 所示.

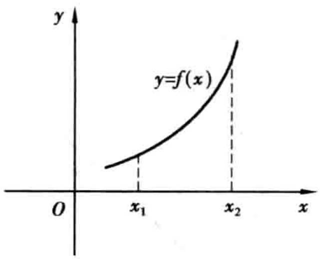

图 1.9

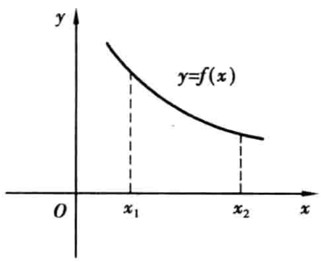

图 1.10

3)有界性

定义　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,$I\subseteq D_f$,如果存在正数 M,使 $\forall x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**.相反地,如果对于任何正数 M,总存在 $x_0\in I$,使 $|f(x_0)|>M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

由绝对值不等式知,$|f(x)|\leqslant M$ 等价于 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,因此当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时,函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图像必介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间,如图 1.11 所示.

注:考虑函数的有界性时,不但要注意函数本身的特点,还要注意自变量的取值范围.如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界,但在 $(1,2)$ 上有界.

如果存在常数 M(不一定是正数),使对 $\forall x\in I$,总有 $f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在