

YIYUAN HANSHU WEIJIFEN

一元函数微积分

□ 主编 张秋燕



重庆大学出版社

<http://www.cqup.com.cn>

一元函数微积分

主编 张秋燕

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是专科高等数学系列教材《一元函数微积分》《工程数学》之一——《一元函数微积分》。

本书结构清晰,概念准确,循序渐进,可读性强,便于教学,且能够启发和培养学生的自学能力。全书共6章,内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、一元函数微积分数学实验。例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性,同时适当介绍数学实验等相关知识。书末附有习题答案。

本书可作为独立学院、高职高专和成人教育学院专科各专业的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

一元函数微积分/张秋燕主编. —重庆:重庆大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-5624-6772-4

I. ①—… II. ①张… III. ①微积分—高等职业教育—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 114744 号

一元函数微积分

主编 张秋燕

责任编辑:李定群 高曼琦 版式设计:李定群

责任校对:秦巴达 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:<http://www.cqup.com.cn>

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆现代彩色书报印务有限公司印刷

*

开本:787×960 1/16 印张:15 字数:235 千

2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5624-6772-4 定价:34.80 元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有,请勿擅自翻印和用本书

制作各类出版物及配套用书,违者必究

前 言

微积分(Calculus)是以极限为工具研究微分学、积分学和无穷级数的数学分支.它从生产技术和理论科学的需要中萌芽,创立于17世纪,是由英国伟大科学家牛顿(Newton)和德国数学家莱布尼兹(Leibniz)分别独立地创立的.它的创立,无论是对数学还是对其他科学以至于技术的发展都产生了巨大的影响.恩格斯曾指出:“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利.”

本书是专科高等数学系列教材《一元函数微积分》《工程数学》之一——一元函数微积分.其内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、一元函数微积分数学实验.

本书具有如下特色:

1.内容编排上,重思路、重方法、重应用,删除了某些繁杂的理论证明过程,每一章都有一节专门加入了应用实例.

2.文体风格上,力求通俗易懂、直观简洁.一般从实际例子引入概念和理论,描述问题也简洁明确,便于学生阅读.

3.例题和习题的选取兼顾丰富性和层次性.按节配备了难度适中的习题,每章配有单元检测题,书后附有答案提示.

4.本书最后一章为一元函数微积分实验,搭建了数学成为“数学技术”的平台.以Matlab(7.0版)软件为工具,通过操作,可在计算机上完成函数作图、极限、导数、积分等运算,可解决一些简单的数学建模问题.暂时还不具备条件进行数学实验、数学建模的院校,可以省略这部分内

容,这并不影响本书的系统性和完整性.

本书由张秋燕主编,第一章至第三章以及第六章由张秋燕老师编写;第四章至第五章由彭年斌老师主笔,张秋燕老师修订;全书由张秋燕老师统稿.

由于编者水平有限,书中难免有不足和不妥之处,恳请同行专家和读者不吝赐教,我们表示深深的感谢.

电子科技大学成都学院文理系

2013 年 4 月于成都

目 录

第 1 章 函数、极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 函数	3
1.1.3 反函数	7
1.1.4 基本初等函数	8
1.1.5 复合函数	12
1.1.6 初等函数	12
习题 1.1	13
1.2 极限的概念	14
1.2.1 数列的极限	15
1.2.2 函数的极限	17
习题 1.2	20
1.3 极限的运算法则	21
1.3.1 极限的四则运算法则	21
1.3.2 复合函数的极限运算法则	23
习题 1.3	24
1.4 极限存在准则 两个重要极限	25
1.4.1 夹逼法则	25
1.4.2 单调有界收敛法则	27
习题 1.4	30
1.5 无穷小 无穷大 无穷小的比较	31
1.5.1 无穷小	31
1.5.2 无穷大	32

1.5.3 无穷小的比较	33
习题 1.5	37
1.6 函数的连续性	38
1.6.1 函数连续性的概念	38
1.6.2 间断点及其分类	40
1.6.3 连续函数的运算法则和初等函数的连续性	43
1.6.4 闭区间上连续函数的性质	44
习题 1.6	45
1.7 应用实例	46
单元检测 1	47
第 2 章 导数与微分	49
2.1 导数的概念	49
2.1.1 引例	49
2.1.2 导数的概念	50
2.1.3 函数的可导性与连续性的关系	55
习题 2.1	56
2.2 函数的求导法则	56
2.2.1 四则运算法则	57
2.2.2 反函数的求导法则	57
2.2.3 复合函数求导法则	58
2.2.4 初等函数的导数	60
习题 2.2	61
2.3 隐函数及参数方程所确定的函数的导数	62
2.3.1 隐函数的导数	62
2.3.2 参数方程所确定的函数的导数	64
习题 2.3	65
2.4 高阶导数	66

习题 2.4	68
2.5 微分及其应用	69
2.5.1 微分定义及几何意义	69
2.5.2 微分公式及运算法则	72
2.5.3 微分在近似计算中的应用	74
习题 2.5	75
2.6 应用实例	76
习题 2.6	78
单元检测 2	78
 第 3 章 导数的应用	 81
3.1 中值定理	81
3.1.1 罗尔(Rolle)定理	81
3.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理	82
3.1.3 柯西(Cauchy)中值定理	84
习题 3.1	84
3.2 洛必达法则	85
3.2.1 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	85
3.2.2 其他类型的未定式	87
习题 3.2	90
3.3 函数的单调性与极值	91
3.3.1 函数单调性的判别法	91
3.3.2 函数的极值及其求法	93
3.3.3 函数的最值	97
习题 3.3	99
3.4 函数的凹凸性拐点 函数作图	100
3.4.1 函数的凹凸性与拐点	100

3.4.2 函数作图	102
习题 3.4	103
3.5 应用实例	104
单元检测 3	106
第 4 章 不定积分	108
4.1 不定积分的概念与性质	108
4.1.1 原函数与不定积分	108
4.1.2 不定积分的几何意义	109
4.1.3 不定积分的性质	110
4.1.4 基本积分公式	111
习题 4.1	114
4.2 换元积分法	115
4.2.1 第一类换元法(凑微分法)	115
4.2.2 第二类换元法	120
习题 4.2	126
4.3 分部积分法	127
习题 4.3	132
4.4 应用实例	132
单元检测 4	135
第 5 章 定积分	137
5.1 定积分的概念与性质	137
5.1.1 引例	137
5.1.2 定积分的概念	139
5.1.3 定积分的性质	142
习题 5.1	144
5.2 微积分基本定理	145

5.2.1 积分上限函数及其导数	146
5.2.2 原函数存在定理	147
5.2.3 牛顿-莱布尼茨(Newton-leibniz)公式	148
习题 5.2	150
5.3 定积分的计算	150
5.3.1 定积分的换元积分法	151
5.3.2 定积分的分部积分法	154
习题 5.3	154
5.4 定积分的几何应用	155
5.4.1 定积分的元素法	155
5.4.2 平面图形的面积	156
5.4.3 旋转体的体积	158
习题 5.4	160
5.5 定积分的其他应用实例	160
单元检测 5	162
 第 6 章 数学实验:一元函数微积分	165
6.1 MATLAB 入门知识	165
6.1.1 MATLAB 软件工作界面和窗口	165
6.1.2 MATLAB 语言基础	169
6.2 MATLAB 程序设计	184
6.2.1 M 文件的基本格式	185
6.2.2 M 文件的建立与打开	185
6.2.3 M 函数文件	185
6.2.4 程序流程结构	187
6.3 符号运算基础	192
6.3.1 符号对象的创建	192
6.3.2 符号表达式的运算	195

6.4 微积分符号运算	197
6.4.1 极限运算	197
6.4.2 微分运算	200
6.4.3 积分运算	202
6.5 应用实例	204
6.5.1 实例 1:经济学中的连续计息问题	204
6.5.2 实例 2:海报设计	205
6.5.3 实例 3:钓鱼问题	207
 附录 I MATLAB 主要函数指令表	 208
 附录 II 部分习题参考答案	 216
 参考文献	 228

第 1 章 函数、极限与连续

一元函数微积分学是以极限为工具研究一元函数的微分和积分.本章是一元函数微积分学的基础,介绍函数的基本概念、极限理论与函数的连续性.

1.1 函 数

1.1.1 集 合

集合是现代数学的一个最基本的概念,数学的各个分支普遍运用集合的表示方法和符号.在中学阶段已经学习过集合的知识,现在把其中部分内容进行回顾.

(1)集合的概念

定义 具有某种特定性质的对象的总体称为**集合**,例如,某学校图书馆的藏书,方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的实数解等,都分别构成一个集合.集合通常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示.

组成集合的对象称为集合的**元素**,元素通常用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示.

若 a 是集合 A 的元素,记作“ $a \in A$ ”,“读作 a 属于 A ”;否则记作“ $a \notin A$ ”(或 $a \in A$),读作“ a 不属于 A ”.

(2)集合的表示法

集合的表示方法有列举法和描述法.

1)列举法

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号 $\{ \}$ 内,每个元素只写一次,不分次序.例如,小于 10 的正偶数构成的集合表示为 $A = \{2, 4, 6, 8\}$;满足不等式

$|x+1| \leq 2$ 的所有整数构成的集合表示为 $B = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$.

2) 描述法

把集合中元素所具有的共同性质描述出来, 写在大括号 $\{ \}$ 内. 如不等式 $|x+1| \leq 2$ 的所有实数解构成的集合表示为 $B = \{x | -3 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$.

集合中的元素都是数时称为数集. 常见的数集有自然数集 $\mathbf{N}$, 整数集 $\mathbf{Z}$, 有理数集 $\mathbf{Q}$, 实数集 $\mathbf{R}$, 正整数集 $\mathbf{N}^*$.

(3) 区间

区间是高等数学中常用的实数集, 分为有限区间和无限区间, 具体定义如下:
(设 a, b 为任意实数, 且 $a < b$)

1) 有限区间

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$

半开半闭区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$ $(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$

a, b 称为区间的端点, $b-a$ 称为区间的长度.

2) 无限区间

$(a, +\infty) = \{x | x > a, x \in \mathbf{R}\}$ $[a, +\infty) = \{x | x \geq a, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, b) = \{x | x < b, x \in \mathbf{R}\}$ $(-\infty, b] = \{x | x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$

$(-\infty, -\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\}$

(4) 邻域

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记作 $U(x_0, \delta)$, 即

$$U(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

其中, x_0 称为邻域中心; δ 称为邻域半径.

从数轴上看, $U(x_0, \delta)$ 表示到点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合, 如图 1.1 所示. 故有

$$U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta\} = \{x | x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后, 称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 如图 1.2 所示, 记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 因而有

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

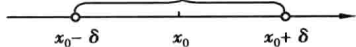


图 1.1

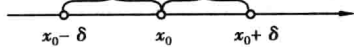


图 1.2

另外,把开区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域,把开区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域.

1.1.2 函数

在自然现象或实际问题中,通常会发生一个量随另一个量的变化而变化的情况,例如,物体运动时运行的路程 S 随时间 t 而改变;圆的面积 A 随半径 r 的改变而改变.将两个量之间的这种关系定义为函数关系.

(1) 函数的概念

定义 设 x, y 是两个变量,数集 $D \subseteq \mathbf{R}$ 且 $D \neq \emptyset$,若 $\forall x \in D$ (“ $\forall$ ”表示“任意的”),按照某种对应法则 f, y 都有确定的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y = f(x), x \in D$.

自变量 x 的取值范围(数集 D)称为函数的**定义域**,记作 D_f .

若自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值只有一个,则称函数为单值函数,否则称为多值函数.例如, $y = x + 1$ 为单值函数; $y^2 = x + 1$ 为多值函数.在本书中若没有特殊说明,均指单值函数.

由函数定义知,对 D_f 中任意给定的数值 x_0, y 都有确定的值 y_0 与之对应,称 y_0 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作 $f(x_0)$.

函数值的全体构成的集合称为函数 $y = f(x)$ 的**值域**,记作 R_f ,即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

若两个函数的定义域和对应法则分别相同,则这两个函数为相同的函数(此时值域必定相同).例如,函数 $y = |x|$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 是相同的函数;而 $y = x + 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 是不同的函数,因为 $y = x + 1$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,而函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定

义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 因为定义域不同, 所以是不同的函数.

例 1.1 设函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$. 求 $f(1), f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x}.$$

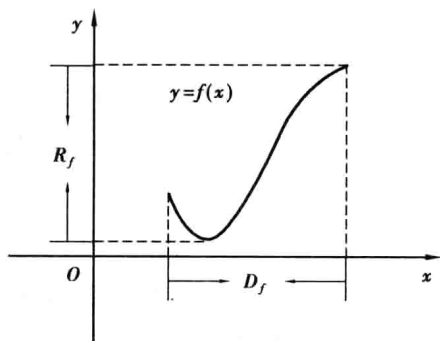


图 1.3

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f , 取定一个 $x_0 \in D_f$, 就有一个对应的 y_0 , 由 x_0, y_0 构成的一组实数对 (x_0, y_0) 对应 xOy 平面上的一个点. 当 x 取遍 D_f 上所有值时, 得到 xOy 平面上的点集 M 为

$$M = \{(x, y) | y = f(x), x \in D_f\}$$

点集 M 称为函数 $y=f(x)$ 的图像 (或图形). 图像 M 在 x 轴上的垂直投影点集就是 D_f , 在 y 轴上的垂直投影点集就是

R_f , 如图 1.3 所示.

若一个函数在自变量的不同取值范围内有不同的对应法则, 则称该函数为分段函数.

下面举几个分段函数的例子.

例 1.2 符号函数

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

其定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 如图 1.4 所示.

对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$$

例 1.3 取整函数

$$y = [x] = n, n \leq x < n+1, n \in \mathbf{Z}$$

对任意实数 x , $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 其定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \mathbf{Z}$, 如图 1.5 所示, $[0.2] = 0$, $[-3.1] = -4$, $[5] = 5$.

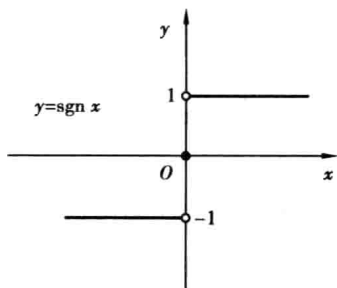


图 1.4

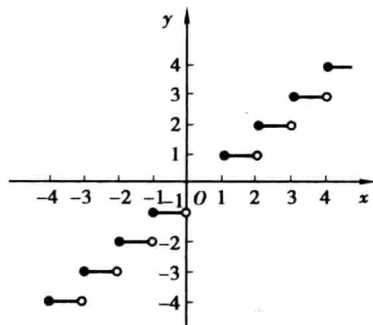


图 1.5

例 1.4 函数

$$y = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 如图 1.6 所示.

(2) 函数的几种特性

1) 奇偶性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D_f 关于原点对称. 若对 $\forall x \in D_f$, 有 $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$), 则称 $y = f(x)$ 为奇函数(偶函数).

例如, $f(x) = x^2$ 为偶函数; $f(x) = x$ 为奇函数; $f(x) = x + x^2$ 既不是奇函数也不是偶函数.

由奇函数定义知, 奇函数图像关于原点对称(见图 1.7), 偶函数图像关于 y 轴对称(见图 1.8).

2) 单调性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 如果 $\forall x_1 < x_2 \in I \subseteq D_f$, 都有

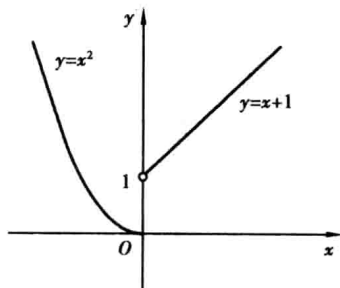


图 1.6

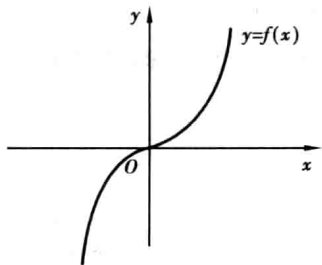


图 1.7

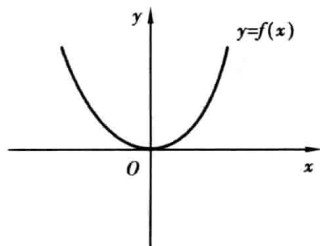


图 1.8

$$f(x_1) < f(x_2) (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少). 单调增加函数的图像沿 x 轴正向上升, 单调减少函数的图像沿 x 轴正向下降, 如图 1.9、图 1.10 所示.

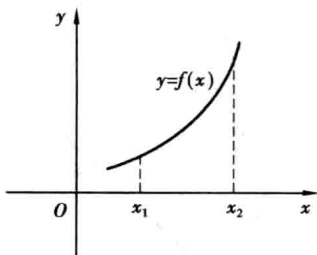


图 1.9

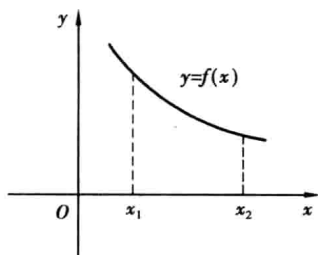


图 1.10

3) 有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f , $I \subseteq D_f$, 如果存在正数 M , 使 $\forall x \in I$, 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界. 相反地, 如果对于任何正数 M , 总存在 $x_0 \in I$, 使 $|f(x_0)| > M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界.

由绝对值不等式知, $|f(x)| \leq M$ 等价于 $-M \leq f(x) \leq M$, 因此当函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界时, 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的图像必介于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间, 如图 1.11 所示.

注: 考虑函数的有界性时, 不但要注意函数本身的特点, 还要注意自变量的取值范围. 如函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界, 但在 $(1, 2)$ 上有界.

如果存在常数 M (不一定是正数), 使对 $\forall x \in I$, 总有 $f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在