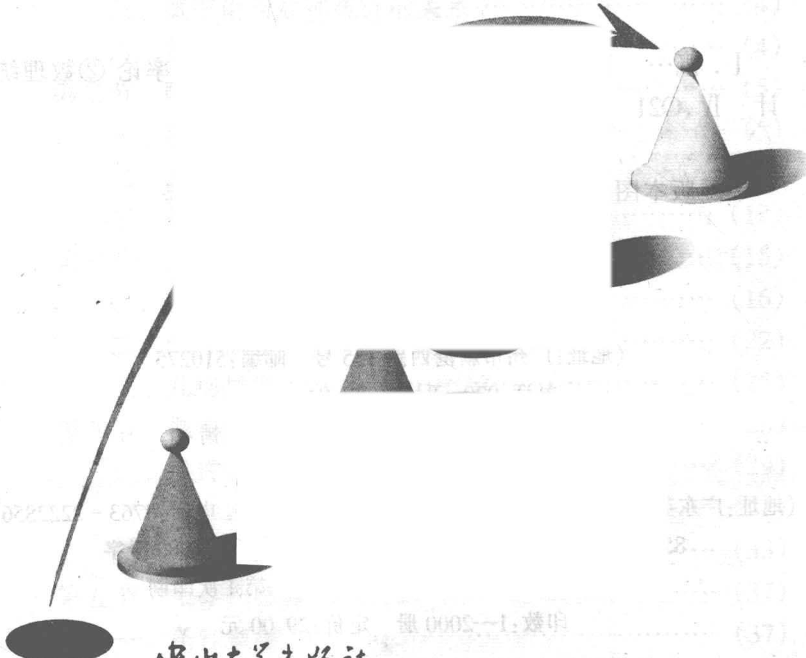
概率论与数理统计

余锦华　石北源　杨维权　编著

中山大学出版社

概率论与数理统计

余锦华　石北源　杨维权　编著



中山大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/余锦华,石北源,杨维权编著.—广州:中山大学出版社,2000.3
ISBN 7-306-01631-8

Ⅰ.概…　Ⅱ.①余…②石…③杨…　Ⅲ.①概率论②数理统计　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(99)第0035130号

中山大学出版社出版发行
(地址:广州市新港西路135号　邮编:510275
电话:020-84111998、84037215)
广东新华发行集团股份有限公司经销
广东省英德市人民印刷厂印刷
(地址:广东英德市英城浈阳一路25号　邮编:513000·电话:0763-2222856)
850毫米×1168毫米　32开本　15.125印张　380千字
2000年3月第1版　　2000年3月第1次印刷
印数:1—2000册　定价:29.00元

前　言

俗话说："天有不测风云，人有旦夕祸福"。的确，在社会、经济、文化、科技各领域中存在大量的随机现象。大至全国乃至全球经济景气波动，小至一个公司业绩好坏，一种股票的升跌。

概率论与数理统计是对随机现象的统计规律进行演绎和归纳的科学，是从数量上研究随机现象的客观规律的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分。当前，概率论与数理统计已广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产和军事技术中，并且正广泛地与其他学科互相渗透或结合，成为近代经济理论、管理科学等学科的应用、研究中的重要工具，也是科学家和工程师、经济师们最常用的工具。因此，概率论与数理统计已经成为数学专业、计算数学专业、统计专业以及越来越多的专业的学生必修的一门基础课。

如同剧本乃一剧之根本一样，教材是一门课程之根本。本教材是应我系"概率统计"重点课程建设的需要，根据综合性大学数学专业《概率论与数理统计》教学大纲，按每周讲授四学时(总学时 72～80 学时)，外加习题课一学时的教学安排编写的。其中一些附加提高部分均标以 * 号，可视教学实际进度而取舍。

本书力求以通俗易懂、生动活泼的语言讲述概率统计的基本概念、基本理论和基本方法。全书由两大部分组成：

第一部分（包括第一章至第五章）为概率论；

第二部分（包括第六章至第九章）为数理统计。

本书力求兼顾基础理论、基础知识的系统完整与应用的灵活

多样，加强应用概率与数理统计的内容，以增强学生、读者对概率统计的兴趣和爱好。

本书各章均配以相当数量的习题。为便于师生教学和读者自测，我们将习题大致划分为三个层次。第一层次为基本题，只要掌握了教材中相应的基本内容，仿照有关例题即可完成。其功能是巩固基础知识，尤其是大纲中要求熟练掌握的各知识点。第二层次为提高题（在题号上加 * 表示）需要将有关内容融会贯通，发挥一定技能方可完成。第三层次为难题（在题号上加 * * 表示），学生应能触类旁通，举一反三，具有札实的基础和创造能力方能完成。

本书得以出版，应感谢“概率论”与“数理统计”教研室的各位同仁，院、系有关领导和教务处、出版社的有关同志！

编　者

1999 年 3 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

第一节　绪言

概率论与数理统计（简称概率统计）是研究随机现象和统计规律的一门数学学科，是数学学科中最活跃最富有生命力、应用最广的一个分支，也是最广泛与其他学科交叉、渗透的一门学科。

本节将简要介绍概率统计这门学科的研究对象，历史概况以及应用概况。

一、必然现象与随机现象

人们在长期研究自然界与人类社会出现的大量形形色色，各种各样的现象后，发现这些现象可分为两大类。

让我们来看看下面几个日常生活中常见的现象：

1. 自由落体。从高空中放下一件重物，由于重力的作用，必然会垂直落到地面。无论是谁来做这个试验（大名鼎鼎的伽利略也好，某一无名小卒也好），也不论重复做多少次，其结果总是这样，确定不变。

这种在一定的条件下必然会出现的现象，即在一定条件之下，其结果总是确定不变，从而可以确切预知的现象称为确定性现象。

2. 投篮（或射击、抽签等）。每次投篮，其结果（中与不

中）是不能事先确知的（无论是穆铁柱还是郑海霞都不可能百发百中），也就是说，每次投篮都有两种可能结果：中或不中。究竟中还是不中，只有等投篮后才能知道。

3. 旋转一枚硬币，其结果可能是“正面向上”（通常把有币值的一面称为正面），也可能是“反面向上”。对于每一次旋转（试验），其结果究竟是“正面向上”还是“反面向上”，不能事先确定、未卜先知。

4. 投掷一只骰子，其结果可能是“1点”，“2点”，“3点”，“4点”，“5点”，“6点”。即使在相同的条件下（比如同一个人在同一桌面掷同一只骰子）重复试验，其结果也未必相同。对于每次试验（投掷），其结果将如何，不能预知。

我们把这一类“其结果带有偶然性，因而无法事先确知其结果，即使在同样条件下重复试验（或观测），其结果也未必相同，而有各种可能结果”的现象称为随机现象。

二、随机现象的统计规律

确定性现象具有确定的客观规律，这是人类很早就发现并总结出了的。科学家们往往用公式或定律来描述这类现象及其客观规律。比如，关于自由落体运动的规律，最初人们（包括当时的大科学家们）总以为较重的物体会较快地落到地面。直到伽利略在比萨斜塔上做了个著名的实验后才纠正了这种传统的误解。他从斜塔上放下两个重量大不相同的重物，结果它们同时着地，使得当时应邀在场观看的科学家们大感意外，非常惊讶！伽利略进一步总结出了自由落体运动公式

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

据此可推知，从同一高度 H 落下的任一重物，必然以相同的时间：

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}} \qquad \text{（其中 } g \text{ 为重力加速度）}$$

落到地面。

人类最早总结的数学、物理、化学等学科大都是研究这一类确定性客观规律的。

那么，对于随机现象，究竟有没有客观规律可言？

表面看来，随机现象充满偶然性，似乎是变幻莫测，不可捉摸的，谈不上有什么规律。然而，如果进行大量的观察或重复试验，可以发现，这些在每次观察或试验中捉摸不定、不可预知的随机现象，大量重复观察或试验后还是会呈现出一定的规律性的。

仍以旋转一枚硬币为例，每次旋转结果是正面还是反面不可预知，捉摸不定，但是如果反复旋转，大量重复试验，便可以从中发现一种明显的趋势，即规律性：

正、反面出现的次数接近相等，而且试验次数越多，两者越接近。换言之，正面（或反面）出现的次数将愈来愈接近1/2。据载，历史上许多大统计学家都曾不厌其烦地进行过这种试验：

实验者	实验次数	正面次数	正面频率
De Mogan（隶莫根）	2 048 次	1 061 次	0.518
Buffon（蒲丰）	4 040 次	2 048 次	0.506 9
Pearson（皮尔逊）	24 000 次	12 012 次	0.500 5
Wiener（维纳）	30 000 次	14 994 次	0.499 8

类似地，若大量重复投掷一只均衡、匀称的骰子，也可以从中发现一种明显的规律性：

各点数出现次数将接近相等（即各占1/6），且投掷的次数愈多，各点出现的频率愈接近1/6。

反过来，我们也可以通过大量重复试验来估计、确定一只不

均衡、不匀称的骰子的各点出现的可能性大小（比率）；一个篮球运动员的投篮命中率；飞机的失事率等。据说，法国著名数学家 Laplace（拉普拉斯）曾就当时的男婴出生率作过大量统计、分析，发现男婴出生比率约占 22/43。

综上所述，对于随机现象，虽然每次观测结果变幻不定，难以捉摸，确无规律可言，但若进行大量的重复观测或试验，仍可发现其中蕴含着某种客观规律。我们把这种规律称为随机现象的统计规律。（至于如何描述和应用这种规律性，将在以后各章、节中逐步讲述）

三、概率论与数理统计的关系

概率论与数理统计都是从数量方面研究随机现象和统计规律，这是它们的共同之处。不过，概率论主要从假定、模型出发，而数理统计则从观测结果、实际数据出发；概率论着重随机现象和统计规律的阐述而数理统计则着重其应用；概率论中主要运用演绎法而数理统计中主要运用归纳法；这些是它们的不同之处。

可以说，概率论是数理统计的理论基础，而数理统计则是概率论的应用和延伸。

四、概率论与数理统计的应用

概率统计这一数学分支是从 17 世纪中叶开始形成的，它的产生和发展紧密地与社会经济、科技的发展相联系。当时，西方资本主义正处于上升初期，闭关自守的封建社会经济逐渐被航海商业经济所取代。在当时，航海的风险是相当大的，大量投资是否合算、是否有利可图？由此引发的社会保险行业中，如何估计各种意外事故和自然灾害出现的可能性？此外，随着航海商业的发展，开始了掠夺殖民地的战争和大规模的征兵、征税工作，从

而提出和发展了人口统计学；而天文观测和力学分析则引致对测量误差的统计规律的分析研究。当然，毋庸讳言，赌博、彩票、奖券、扑克等随机游戏中也不乏概率统计研究的课题，正是这些社会生产和科技发展的需要促进了概率统计的诞生和发展。

概率统计应用性很强，应用范围极广而且越来越广。时至今日，小小的电子计算器上都设计、安置了专门的统计键。

当前，概率统计正向各学科渗透，产生了许多边缘学科，如生物统计、保险统计（精算学）、数学生态、计量经济、数量地理、市场研究、未来预测学等。可以说，概率统计是理论联系实际，直接为经济建设服务方面最为活跃的一个数学分支。正因如此，国内外绝大多数的理科专业（如生物、地理、水文、气象、电子、计算机等），以至文科专业（如经济、管理等）都开设了概率统计课程。

第二节　随机事件及其运算

一、随机试验与随机事件

随机事件是本课程中最基本的核心概念。为了给出随机事件的定义，我们先引进随机试验的概念：

试验——我们把一定条件下对客观现象进行的观测或实验称为试验。

随机试验——如果一个试验在相同的条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事先不可准确预知，则称之为随机试验。

今后，我们所说的试验都是指随机试验。

进行一个试验，总有其一定的观测目的或实验指标，根据这个目的或指标，试验可能有多种不同结果。

随机事件——试验的每一个可能结果称之为随机事件，简称

事件。通常用大写字母，如 A，B，C，A_1，A_2 等表示事件。

例 1.2.1 抛掷一枚硬币，观察哪一面朝上。显然，这是一个可重复的试验，每次试验（即抛掷）有两种可能结果："正面向上"或"反面向上"。但究竟将出现哪个结果不可预知。因此，这是一个随机试验，而"正面向上"（用 A 表示）与"反面向上"（用 B 表示）都是随机事件。

例 1.2.2 投掷一只骰子，观察朝上一面的点数，这也是一个随机试验，"掷出 1 点"，"掷出 2 点"，……，"掷出 6 点"（分别用 A_1，A_2，…，A_6 表示），都是这个试验可能出现的结果，因而都是事件。而"掷出奇数点"（B_1）、"掷了偶数点"（B_2）及"掷出小点"（C_1）、"掷出大点"（C_2），也是试验可能出现的结果，按定义也是事件。但仔细分析、比较这两类事件后不难发现它们在结构上有很本质的区别，前者（A_1，A_2，…，A_6）是不可再细分的，而后者则可以分解，比如，B_1 可分解为 A_1，A_3，A_5；C_1 可分解为 A_1，A_2，A_3；C_2 可分解为 A_4，A_5，A_6。如同物理学中把不可再分的粒子称为基本粒子一样，我们把不可再分的事件称为基本事件，而可分解的事件称为复合事件。复合事件可由若干基本事件复合而成。这样，上例中的 A_1，A_2，…，A_6 均为基本事件，而 B_1，B_2，C_1，C_2 均为复合事件。

〔**注 1**〕所谓不可再分只是相对的而不是绝对的，原子曾被认为不可再分，Atom 一词之意就是不可变、不可分。而现在众所周知，原子还可进一步细分为质子、中子等基本粒子。同样，一个事件是否不可再分并非绝对的、固定不变的，而是相对一定的试验目的而言的。比如，测量人的身高，若目的是为了确定应购全票、半票还是免票，则基本事件只有三个：A_1（全票，即身高 1.5 m 以上）、A_2（半票，身高 1.2～1.5 m）、A_3（免票，身高 1.2 m 以下）；但若测量目的是身高的高度值（单位：m），