普通高等教育“十一五”国家级规划教材

离散数学

（第2版）

屈婉玲　耿素云　张立昂

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教

离散数学

Lisan Shuxue

（第2版）

屈婉玲　耿素云　张立昂

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。本书在原有基础上进行了更新，增加了一些典型的应用实例，并对例题和习题进行了补充。本书分为数理逻辑、集合论、代数结构、组合数学、图论、初等数论6个部分，既有严谨、系统的理论阐述，也有丰富的、面向计算机科学技术发展的应用实例，同时配有大量的典型例题与练习。各章内容按照模块化结构组织，可以适应不同的教学要求。本书配套有电子教案和学习指导与习题解析。

本书可以作为普通高等学校计算机科学与技术、软件工程、信息与计算科学等专业本科生离散数学课程教材，也可以供其他专业学生和科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/屈婉玲，耿素云，张立昂编著.--2版.--北京:高等教育出版社，2015.3

ISBN 978-7-04-041908-5

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①屈…　②耿…　③张…　Ⅲ.①离散数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第026582号

策划编辑　刘　艳　　责任编辑　刘　艳　　封面设计　于文燕　　版式设计　马敬茹
插图绘制　郝　林　　责任校对　殷　然　　责任印制　刘思涵

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　唐山市润丰印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　26
字　　数　580千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2008年3月第1版
　　　　　2015年3月第2版
印　　次　2015年3月第1次印刷
定　　价　41.10元

物 料 号　41908-00

第 2 版前言

本书的第一版于 2008 年出版,起源于高等教育出版社 1998 年出版的普通高等教育“九五”国家级规划教材《离散数学》和 2004 年出版的普通高等教育“十五”国家级规划教材《离散数学(修订版)》。目前距第一版出版已有 6 年的时间了。在这 6 年中,随着计算机科学与技术飞速发展和广泛应用,一些新的教育理念不断提出,其中最重要的是“计算思维”(computational thinking)。计算思维是数学思维与工程思维的互补与融合,不但是从事计算机科学与技术工作的人员所需要的专业素质,而且对其他学科的发展产生了深远的影响,计算思维的培养已经成为大学计算机专业的重要目标之一。

离散数学是研究离散结构及其性质的学科,大量用于计算机科学与技术领域的建模及分析。离散数学对培养计算思维起着重要的作用,是计算机专业的核心课程之一。实际上,离散数学在自然科学(如物理、化学、生物),工程技术(如电子工程),社会科学,经济管理等领域都有广泛的应用,一些相关的专业(如经济学等)也都在教学中引入了离散数学的内容。如何在离散系统建模中体现计算思维是本次修订的指导思想。

本次修订保持了原书的基本结构和主要内容,增加了消解证明法和中国邮递员问题,并对文字做了进一步的加工。此外,还补充了有关加法器设计、进程代数建模、全同态加密等重要的应用实例,更新和补充了部分例题和习题。

与本书同步更新的有配套的教学辅导用书《离散数学学习指导与习题解析》(第 2 版)。

本书第 1 章 ~ 第 5 章、第 14 章 ~ 第 18 章由耿素云完成,第 6 章 ~ 第 13 章由屈婉玲完成,第 19 章由张立昂完成。对广大读者所提出的建议和意见,我们表示衷心的感谢!

作　者
2014 年 12 月于燕园

第 1 版前言

本书是面向 21 世纪课程教材，是在《离散数学(修订版)》(耿素云、屈婉玲编著，高等教育出版社，2004 年)的基础上修改而成的。《离散数学》于 1998 年作为普通高等教育“九五”国家级规划教材出版，2004 年以普通高等教育“十五”国家级规划教材立项进行了修订，至今也已经 3 年了。在近 10 年里，计算机科学技术有了飞速的发展，在生产和生活的各个领域都发挥着越来越大的作用，一个崭新的信息时代正在来临。面对这样一个巨大的变化，国内外对计算机专业教育的改革也进行了大量的研讨和有益的实践。当前，计算机专业教育面临着更多的挑战，一方面是新技术、新知识的爆炸性增长，另一方面是社会对多种不同类型和层次人才的需求。因此，有必要把培养目标和专业方向进一步细分，相关的教学计划和课程体系也需要更新和调整。美国计算机学会的《ACM IEEE Computing Curricula 2004》就是针对这个问题提出的系统的研究报告，我国教育部计算机科学与技术专业教学指导委员会也提出了相应的《计算机科学与技术专业规范》(CCC2005)。根据 CCC2005 的意见，计算机科学与技术专业将划分为计算机科学、计算机工程、软件工程和信息技术 4 个专业方向，本书主要是根据前 3 个专业方向的教学要求而编写的。

与修订版相比，本书在以下内容上进行了比较大的更新。

1. 根据 CCC2005 中关于离散数学核心内容的要求，对有些章节进行了调整。增加了组合数学中关于递推方程、生成函数等组合计数方法的内容，并重点说明了这些方法在计算机算法分析中的应用。增加了有关初等数论基础知识的介绍，并讲述了它们在计算机加密技术中的应用。同时，删减了关于集合基数以及代数结构中群、环、域、格的部分内容。重新组织了图论中的部分知识点，以使得整个教材的中心更突出，知识体系更清晰，知识点的分布更合理。

2. 重写了数理逻辑中的一阶逻辑推理理论。

3. 补充了和计算机科学技术应用背景紧密结合的实例。在语言文字方面做了进一步的加工，同时订正了部分疏漏之处。

本书采用模块化的结构，适用于计算机科学、计算机工程、软件工程等不同的专业方向和不同的学校。教师可以根据自己的教学计划对相关内容进行取舍。根据一般经验，完成全部内容的教学需要两个学期，即108～144学时。如果只有一个学期，可以选择数理逻辑、集合论、图论的部分章节，如第1章～第4章，第6章～第8章，第14章～第16章等。

与本书配套的《离散数学学习指导与习题解析》和电子教案将陆续推出，为使用本书的教师和学生提供参考。

本书的出版得到高等教育出版社的大力支持，也得到许多教师的帮助，特别是朱洪教授认真审阅了书稿，提出了宝贵的修改意见，对此我们表示衷心的感谢。本书的第1章～第5章、第14章～第18章由耿素云完成，第6章～第13章由屈婉玲完成，第19章由张立昂完成。由于水平所限，书中难免存在疏漏和不足之处，恳请读者指正。

作　者

2007年10月

目录

第1部分　数理逻辑

第2部分　集合论

第 3 部分 代数结构

第 4 部分 组合数学

第 5 部分 图 论

第1部分 数 理 逻 辑

第 1 章 命题逻辑的基本概念

1.1 命题与联结词

数理逻辑是研究推理的数学分支,推理由一系列的陈述句组成. 例如,因为 $3>2$,所以 $3\neq 2$. 在这里“$3>2$”和“$3\neq 2$”是两个陈述句,整个“因为 $3>2$,所以 $3\neq 2$”也是一个陈述句. 这 3 个陈述句都成立,即为真. 这种非真即假的陈述句称作*命题*.

作为命题的陈述句所表达的判断结果称作命题的*真值*,真值只取两个值:*真*或*假*. 真值为真的命题称作*真命题*,真值为假的命题称作*假命题*. 真命题表达的判断正确,假命题表达的判断错误. 任何命题的真值都是唯一的.

命题“因为 $3>2$,所以 $3\neq 2$”由两个更简单的命题“$3>2$”和“$3\neq 2$”组成. “$3>2$”和“$3\neq 2$”不能再分解成更简单的命题了. 这种不能被分解成更简单的命题称作*简单命题*或*原子命题*. 在命题逻辑中,简单命题是最小的基本单位,对它不再细分. 但在各种论述和推理中,所出现的命题多数不是简单命题,如上面的“因为 $3>2$,所以 $3\neq 2$”. 由简单命题通过联结词联结而成的命题,称作*复合命题*.

判断给定句子是否为命题,应该分两步:首先判定它是否为陈述句,其次判断它是否有唯一的真值.

例 1.1 判断下列句子是否为命题.

(1) 4 是素数.

(2) $\sqrt{5}$是无理数.

(3) x 大于 y,其中 x 和 y 是任意的两个数.

(4) 火星上有水.

(5) 2050 年元旦是晴天.

(6) π 大于$\sqrt{2}$吗?

(7) 请不要吸烟!

(8) 这朵花真美丽啊!

(9) 我正在说假话.

解 本题的 9 个句子中,(6)是疑问句,(7)是祈使句,(8)是感叹句,因而这 3 个句子都不是命题.剩下的 6 个句子都是陈述句,但(3)与(9)不是命题.(3)的真值不确定,根据 x 和 y 的不同取值情况它可真可假,即无唯一的真值,因而不是命题.(9)特别有意思,若(9)为真,即"我正在说假话"是真的,则我正在说真话,因而(9)的真值应为假,矛盾;反之,若(9)为假,即"我正在说假话"是假的,则我正在说假话,因而(9)的真值应为真,同样也矛盾.因而(9)既不能为真,也不能为假,故它也不是命题.像(9)这样由真能推出假、又由假能推出真,从而既不能为真,也不能为假的陈述句称作悖论.悖论不是命题.

本例中,(1),(2),(4),(5)是命题.(1)为假命题,(2)为真命题.虽然至今还不知道火星上是否有水,但火星上是否有水是客观存在的,并且要么是有、要么是没有,只是现在人类还不知道而已.也就是说,(4)的真值是客观存在的,而且是唯一的,因此它是命题.根据同样的道理,(5)也是命题.作为命题,是否知道它的真值是不重要的,重要的是它有唯一的真值.

在本书中,用小写英文字母表示命题,用"1"表示真,用"0"表示假,于是命题的真值为 0 或 1.下面用 p,q,r,s 分别表示例 1.1 中(1),(2),(4),(5)的命题.

p: 4 是素数.

q: $\sqrt{5}$是无理数.

r: 火星上有水.

s: 2050 年元旦是晴天.

它们称为这些命题的符号化.其中,p 的真值为 0,q 的真值为 1,r 和 s 的真值现在还不知道.这 4 个命题都是简单命题.

例 1.2 先将下面各陈述句中出现的原子命题符号化,并指出它们的真值,然后再写出这些陈述.

(1) $\sqrt{2}$是有理数是不对的.

(2) 2 是偶素数.

(3) 2 或 4 是素数.

(4) 如果 2 是素数,则 3 也是素数.

(5) 2 是素数当且仅当 3 也是素数.

解　在(1)中"$\sqrt{2}$是有理数"是原子命题;(2)~(5)中各有两个原子命题,它们分别是"2 是素数"和"2 是偶数","2 是素数"和"4 是素数","2 是素数"和"3 是素数"以及"2 是素数"和"3 是素数". 共有 5 个原子命题,将它们分别符号化为

p: $\sqrt{2}$是有理数.

q: 2 是素数.

r: 2 是偶数.

s: 3 是素数.

t: 4 是素数.

p,t 的真值为 0,其余的真值为 1. 将原子命题的符号代入,上述各陈述句可以表示成:

(1) 非 p(p 不成立);(2) q 并且(与)r;(3) q 或 t;(4) 如果 q,则 s;(5) q 当且仅当 s.

这 5 个命题都是复合命题. 不妨称上述表述方式为半形式化的,这种半形式化的表述形式不能令人满意. 数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化,即构造各种符号语言来代替自然语言,完全由符号构成的语言称为形式语言. 为了达到这个目的,就要求进一步抽象化,即将联结词也符号化. 在例 1.2 中出现的联结词有 5 个:"非""并且""或""如果……,则……""当且仅当",这些联结词是自然语言中常用的联结词. 但自然语言中出现的联结词有的具有二义性,因而在数理逻辑中必须给出联结词的严格定义,并且将它们符号化.

定义 1.1　设 p 为命题,复合命题"非 p"(或"p 的否定")称作 p 的否定式,记作$\neg p$. 符号$\neg$称作否定联结词. 规定$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

由定义可知,$\neg p$ 的逻辑关系为 p 不成立,因而当 p 为真时,$\neg p$ 为假;反之当 p 为假时,$\neg p$ 为真.

在例 1.2 中,"非 p"可符号化为$\neg p$. 由于 p 的真值为 0,所以$\neg p$ 的真值为 1.

定义 1.2　设 p,q 为两个命题,复合命题"p 并且 q"(或"p 与 q")称为 p 与 q 的合取式,记作 $p \wedge q$. $\wedge$ 称作合取联结词. 规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真.

由定义可知,$p \wedge q$ 的逻辑关系为 p 与 q 同时成立,因而只有当 p 与 q 同时为真时,$p \wedge q$ 才为真,其他情况 $p \wedge q$ 均为假.

在例 1.2 中,"q 并且 r"符号化为 $q \wedge r$. 由于 q 与 r 的真值全为 1,所以 $q \wedge r$ 的真值为 1.

使用联结词 $\wedge$ 需要注意两点:其一是 $\wedge$ 的灵活性. 自然语言中的"既……,又……""不但……,而且……""虽然……,但是……""一面……,一面……"等都表示两件事情同时成立,因而可以符号化为 $\wedge$. 其二,不要见到"与""和"就使用联结词 $\wedge$,见下面的例子.

例 1.3　将下列命题符号化.

(1) 吴颖既用功又聪明.

(2) 吴颖不仅用功而且聪明.

(3) 吴颖虽然聪明,但不用功.

(4) 张辉与王丽都是三好生.

(5) 张辉与王丽是同学.

解　先给出(1)~(4)中的原子命题,并将其符号化.

p：吴颖用功.

q：吴颖聪明.

r：张辉是三好生.

s：王丽是三好生.

(1)～(4)都是复合命题，它们使用的联结词表面看来各不相同，但都是合取的意思，分别符号化为 $p \wedge q, p \wedge q, q \wedge \neg p, r \wedge s$.

在(5)中，虽然也使用了"与"，但这个"与"是联结该句主语中的两个人的，而整个句子仍是简单陈述句，所以(5)是原子命题，符号化为 t：张辉与王丽是同学.

定义 1.3 设 p, q 为两个命题，复合命题"p 或 q"称作 p 与 q 的析取式，记作 $p \vee q$. $\vee$ 称作析取联结词. 规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

由定义可知，当 p 与 q 中有一个为真时，$p \vee q$ 为真. 只有当 p 与 q 同时为假时，$p \vee q$ 才为假.

在例 1.2 中，"q 或 t"符号化为 $q \vee t$. 由于 q 为真，所以 $q \vee t$ 为真。

以上定义的析取联结词 $\vee$ 与自然语言中的"或"不完全一样. 自然语言中的"或"具有二义性，用它有时具有相容性(即它联结的两个命题可以同时为真)，有时具有排斥性(即只有当一个为真、另一个为假时，才为真)，对应的分别称作相容或和排斥或.

例 1.4 将下列命题符号化.

(1) 张晓静爱唱歌或爱听音乐.

(2) 张晓静只能挑选 202 或 203 房间.

(3) 张晓静是江西人或安徽人.

解 先给出原子命题，并将其符号化，然后再将整个(复合)命题符号化.

(1) p：张晓静爱唱歌.

q：张晓静爱听音乐.

显然这个"或"为相容或，即当 p 与 q 同时为真时，这个命题为真. 符号化为 $p \vee q$.

(2) r：张晓静挑选 202 房间.

s：张晓静挑选 203 房间.

由题意可知，这个"或"应为排斥或. r, s 的取值有 4 种可能：同真，同假，一真一假(两种). 如果符号化为 $r \vee s$，则当 r 和 s 都为真时为真，这意味着张晓静可能同时得到 202 和 203 两个房间，这不符合原意. 原意是张晓静只能挑选 202 和 203 中的一间. 如何达到只能挑选一个房间的要求呢？可以使用多个联结词，符号化为 $(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$. 不难验证，此复合命题为真当且仅当 r, s 中一个为真，一个为假，它准确地表达了原意. 当 r 为真 s 为假时，张晓静得到 202 房间；当 r 为假 s 为真时，张晓静得到 203 房间，其他情况下，都是不允许的.

(3) t：张晓静是江西人.

u：张晓静是安徽人.

这个"或"也应为排斥或. 和上面一样，可以形式化为 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$. 但是，在这里张晓静不可能既是江西人又是安徽人，即 t 与 u 实际上不能同时为真，因而也可以符号化为 $t \vee u$.

定义 1.4　设 p,q 为两个命题,复合命题"如果 p,则 q"称为 p 与 q 的蕴涵式,记作 $p \to q$,并称 p 是蕴涵式的前件,q 为蕴涵式的后件. $\to$称作蕴涵联结词. 并规定 $p \to q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

$p \to q$ 的逻辑关系为 q 是 p 的必要条件.

在例 1.2 中,"如果 q,则 s"应符号化为 $q \to s$. 由于 q 与 s 的真值均为 1,所以 $q \to s$ 的真值也为 1.

在使用联结词$\to$时,要特别注意以下几点.

1. 在自然语言里,特别是在数学中,q 是 p 的必要条件有许多不同的叙述方式,例如,"只要 p,就 q""因为 p,所以 q""p 仅当 q""只有 q 才 p""除非 q 才 p""除非 q,否则非 p",等等. 以上各种叙述方式表面看来有所不同,但都表示 q 是 p 的必要条件,因而都应使用$\to$,符号化为$p \to q$.

2. 作为推理"如果 p,则 q"的形式化,当 p 为真、q 为真时,$p \to q$ 显然为真;当 p 为真、q 为假时,$p \to q$ 显然为假. 问题是当 p 为假时,为什么规定无论 q 是真是假,$p \to q$ 均为真? 其实平常人们也会采用这种思维方式. 譬如,说"如果太阳从西边出来,我就不姓张. "其实,不管"我"是否姓张,这句话都是对的,因为太阳不可能从西边出来. 也就是说,前件"太阳从西边出来"为假,不论后件"我不姓张"是真是假,这句话都是对的.

3. 在自然语言中,"如果 p,则 q"中的前件 p 与后件 q 往往具有某种内在联系. 而数理逻辑是研究抽象的推理,p 与 q 可以无任何内在联系. 譬如,"因为 $2<3$,所以 $1+1=2$. "在通常的意义下是不对的,或者认为它是毫无意义的. 但在数理逻辑中,设 p:$2<3$,q:$1+1=2$,这句话可形式化为 $p \to q$. 而且因为 p 和 q 都为真,故 $p \to q$ 为真. 由此可见,$p \to q$ 为真仅表示 p 与 q 的取值关系(当 p 为真时,q 必为真;当 q 为假时,p 必为假.)而与 p 与 q 是否有什么内在联系无关.

例 1.5　将下列命题符号化,并指出它们的真值.

(1) 如果 $3+3=6$,则雪是白色的.

(2) 如果 $3+3\neq 6$,则雪是白色的.

(3) 如果 $3+3=6$,则雪不是白色的.

(4) 如果 $3+3\neq 6$,则雪不是白色的.

(5) 只要 a 能被 4 整除,则 a 一定能被 2 整除.

(6) a 能被 4 整除,仅当 a 能被 2 整除.

(7) 除非 a 能被 2 整除,a 才能被 4 整除.

(8) 除非 a 能被 2 整除,否则 a 不能被 4 整除.

(9) 只有 a 能被 2 整除,a 才能被 4 整除.

(10) 只有 a 能被 4 整除,a 才能被 2 整除.

其中 a 是一个给定的正整数.

解　令p: $3+3=6$,p 的真值为 1.

　　q: 雪是白色的,q 的真值也为 1.

(1)~(4)的符号化形式分别为 $p \to q$,$\neg p \to q$,$p \to \neg q$,$\neg p \to \neg q$. 这 4 个复合命题的真值分别

为 1,1,0,1. 这 4 个蕴涵式的前件与后件没有内在联系.

令 r: a 能被 4 整除.

s: a 能被 2 整除.

仔细分析可知,(5)～(9)叙述的都是 a 能被 2 整除是 a 能被 4 整除的必要条件,因而都符号化为 $r \to s$. 由于 a 是给定的正整数,因而 r 与 s 的真值是客观存在的,但是真是假与 a 的值有关,现在并不知道. 可是 r 与 s 是有内在联系的,当 r 为真(a 能被 4 整除)时,s 必为真(a 能被 2 整除),于是 $r \to s$ 不会出现前件真后件假的情况,因而 $r \to s$ 的真值为 1.

而(10)叙述的是 a 能被 4 整除是 a 能被 2 整除的必要条件,因而应符号化为 $s \to r$,它的真值与 a 的值有关. 例如,当 $a=8$ 时为真,当 $a=6$ 时为假. 而通常认为(10)是错的,这再一次提醒人们要正确地理解命题逻辑中的联结词,不能简单地与自然语言中的联结词等同起来. 如何正确地表示我们通常理解的(10),这要到第 4 章一阶逻辑中介绍.

定义 1.5 设 p,q 为两个命题,复合命题"p 当且仅当 q"称作 p 与 q 的等价式,记作 $p \leftrightarrow q$,$\leftrightarrow$ 称作等价联结词. 规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

$p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系为 p 与 q 互为充分必要条件.

在例 1.2 中,"q 当且仅当 s"应符号化为 $q \leftrightarrow s$. 由于 q 与 s 同为真,所以 $q \leftrightarrow s$ 为真.

不难看出 $(p \to q) \land (q \to p)$ 与 $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系完全一样,即都表示 p 与 q 互为充分必要条件.

例 1.6 将下列命题符号化,并讨论它们的真值.

(1) $\sqrt{3}$是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.

(2) $2+3=5$ 的充要条件是$\sqrt{3}$是无理数.

(3) 若两圆 O_1,O_2 的面积相等,则它们的半径相等;反之亦然.

(4) 当王小红心情愉快时,她就唱歌;反之,当她唱歌时,一定心情愉快.

解 令 p: $\sqrt{3}$是无理数,真值为 1.

q: 加拿大位于亚洲,真值为 0.

(1) 可符号化为 $p \leftrightarrow q$,其真值为 0.

令 r: $2+3=5$,其真值为 1,

(2) 可符号化为 $r \leftrightarrow p$,真值为 1.

令 s: 两圆 O_1,O_2 面积相等.

t: 两圆 O_1,O_2 的半径相等.

(3) 可符号化为 $s \leftrightarrow t$. 虽然不知道 s,t 的真值,但知道当 O_1,O_2 的面积相等时,O_1,O_2 的半径也相等;当 O_1,O_2 的面积不相等时,O_1,O_2 的半径也不相等. 即当 s 为真时,t 也为真;当 s 为假时,t 也为假. 故 $s \leftrightarrow t$ 的真值为 1.

令 u: 王小红心情愉快.

v: 王小红唱歌.