高分经验分享！

小鑫考研嘚吧嘚

电子社考研权威辅导丛书

考研

考研数学复习全书

（数学二）

潘鑫◎著

零基础复习 快速提高

掰开揉碎讲 轻松易懂

考点全覆盖 高分笔记

现身讲技巧 倾力奉献

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
PHEI
http://www.phei.com.cn

电子社考研权威辅导丛书

小鑫考研嘚吧嘚
考研数学复习全书
（数学二）

潘鑫　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书按照教育部考试中心公布的考研大纲要求编写，内容涵盖研究生考试数学二全部知识点，突出三个非常：**语言非常通俗，逻辑非常清晰，例题非常丰富**，这三个特色使得本书区别于市场上的同类图书。本书对传统课本中的重点、难点、疑点及最容易被忽视的一些潜在要点进行了全新的诠释，作者总结了自身在考研数学培训生涯中的诸多经验，将其独创的考研数学学习套路毫无保留地奉献给读者。

图书在版编目（CIP）数据

小鑫考研嘚吧嘚：考研数学复习全书. 数学二 / 潘鑫著. —北京：电子工业出版社，2015.3

（电子社考研权威辅导丛书）

ISBN 978-7-121-25439-0

Ⅰ. ①小… Ⅱ. ①潘… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 012311 号

策划编辑：齐 岳
责任编辑：徐 静 齐 岳
文字编辑：万子芬 刘真平 李 蕊 韩玉宏
印 刷：涿州市京南印刷厂
装 订：涿州市京南印刷厂
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：880×1 230 1/16 印张：37.25 字数：1490 千字
版 次：2015 年 3 月第 1 版
印 次：2015 年 3 月第 1 次印刷
定 价：78.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前言

考研是一场艰苦的战斗，为了帮助广大备考的同学，尤其是基础相对薄弱的同学在短时间内掌握考研数学的考点，取得理想的分数，夺取考研这场战役的胜利，我精心编写了本书，希望可以在考研的道路上助大家一臂之力。

⇨ 本书定位

本书是一本适合读者自学的考研数学辅导书籍。与传统教材不同，本书的**语言通俗，逻辑清晰，例题丰富**，书中所涉及的知识点，无论多简单，都有举例，这“三板斧”使得您完全不用担心有看不懂的知识点。所以，本书定位为“零基础”考研数学自学用书，也是广大考生在考研数学复习阶段应看的第一本书。

所谓教材，是指老师上课时所使用的书籍，大多数教材不会把每个知识点都讲解得非常细，目的是要在课堂上给学生留有充分的思考空间，锻炼同学们的思维能力；而教辅书，顾名思义，是教材辅助的书籍，教辅书不能脱离教材，如果一个基础很薄弱的学生直接看教辅书会使学习变得很吃力。本书既非教材，也非教辅，是一本十分“纯正”的自学用书。为了能让读者实现真正的自学，我在写作过程中重视每个细节，每个知识点和例题都配有通俗易懂的解释，这样一来就可以保证“零基础”的读者也能够看懂本书。知识被“掰开揉碎”地讲解，内容编排符合考生的思维习惯，语言风格轻松活泼，相信广大考生阅读本书后会有一种爱不释手的感觉。

⇨ 本书特色

1. 语言通俗

大部分考研数学类书籍都摆脱不了语言晦涩难懂、内容体系“模式化”、文字叙述与读者思维不同步，极易出现断档的弊病，读者需要逐字去琢磨文字的意思，一旦在某个知识点卡住，会耗费大量的时间。我认为考研数学类书籍最高级的表达方式就是用最通俗的文字，去讲解最难理解的知识，不需要读者费时费力地反复琢磨，而这正是本书的最大亮点。本书的所有文字，从定义、定理的解释，到例题的解析，再到每章习题的解析，都非常轻松活泼、通俗易懂，让考生抛弃掉考研复习的沉重心情。这样一来，读者在轻松看懂本书内容的同时，又能发现学习的乐趣，更可贵的是可以连贯、高效地复习，节省了宝贵的时间。

2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑非常清晰。具体来说，本书的所有题目的解析中绝对不会出现任何一个书中没有讲到的知识点，并且每一步解答都详细注明了知识点来源。众所周知，做一道题可能会同时用

到很多不同章节的知识点，很多考研辅导书中都存在这样一种现象：讲完一个知识点，然后下面有配套的例题，但此例题中会用到还未讲解的知识点且没有向读者说明。这样一来，许多读者就不明白了，思考了很长时间，以为是某个复习过的知识点自己忘了，反复看才发现该题用到的是后续的知识点，白白浪费了时间。多年的教学经验以及自身的考研经验让我在这一点上极其重视，避免了上述现象的发生。

总的来说，本书“逻辑清晰”的特点体现在以下三个方面：

（1）书中例题解析涉及的知识点在对应章节都有详细的讲解。

（2）书中例题的每一步解答都详细注明了知识点来源。

（3）书中例题均与知识点完全对应。

3. 例题丰富

本书的例题非常丰富，甚至是一些十分简单的知识点对应的例题，按理说没有必要再举例，但本书还是写了。这是为什么呢？因为我在教学的过程中发现了这样一种现象：就算知识点再简单，讲解得再明白，不举例的话，学生心里多少还是会有一些不踏实，不会将知识点运用到实际做题中。基于此，本书所涉及的知识点都有配套的例题。

我是一个标准的“90 后”，痴迷于大学阶段数学类课程，在本科阶段我便利用课余时间给同学们办讲座，帮助他们渡过“期末考试”的难关，在研究生入学考试中，我考出了接近满分的成绩。我在平时的学习和备战考研的过程中总结了一套独有的学习方法，研究生阶段边学习边在各大考研机构讲课、录制视频，希望把自己的学习方法教给更多的人，帮助他们顺利考上研究生。

本书的写作过程耗时两年，可以说贯穿了我研究生学习生涯。面对着繁重的学习、授课压力，我挤出时间研究同类书籍、独立编写例题、反复修改书稿、广泛征求意见，终于使得本书顺利出版。谨以此书献给所有需要考研的同学们！

凤凰鸣九天，需烈火涅槃；蛟龙纳明珠，需深潜寒潭。春日那“深巷梨花轻闭门，风袅篆烟系柳丝”需要冬日那一季枯老，秋日那“冲天香阵透长安，满城尽带黄金甲”需要夏日那暴雨骄阳。祝同学们考研成功！

潘　鑫

2015 年 1 月于北京

目录

第一部分 线性代数

第二部分 高等数学

第一部分

线性代数

- 行列式
- 矩阵
- 向量
- 解线性方程组
- 特征值、特征向量、相似矩阵
- 二次型

第1章

行 列 式

1.1 行列式的标志

行列式共有两个标志，接下来要给大家讲这两个标志。在讲之前先跟大家说明一点，即只有**同时满足**这两个标志才是行列式。

行列式的第一个标志：双竖线。大家注意，千万不能写成圆括号“()”或者方括号“[ ]”。

我们来看一个例子。

例. $\begin{bmatrix}5&2\\9&4\end{bmatrix}$和$\begin{pmatrix}5&3\\1&6\end{pmatrix}$这两个式子都不是行列式，因为外面没有用双竖线，而是用方扩号、圆括号。

行列式的第二个标志：行数=列数。换句话说，就是有几行就有几列，行数和列数绝对不可以不相等。

我们还是来看例子。

例. $\begin{vmatrix}1&6\\7&13\\2&4\end{vmatrix}$就不是行列式，因为行数≠列数（大家看，$\begin{vmatrix}1&6\\7&13\\2&4\end{vmatrix}$有三行两列，小学生都知道$3\neq 2$）。

以上给大家介绍了行列式的两个标志，即“双竖线”和“行数=列数”，简单吧！但是再次强调：这两个标志必须同时满足才是行列式，只满足其中一条是不行的。

再来看以下几个例子。

例. $\begin{pmatrix}3&8&19\\2&4&7\\8&5&6\end{pmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

例. $\begin{pmatrix}1&7\\2&5\\3&78\end{pmatrix}$不是行列式，因为它既不满足行列式的第一个标志，也不满足行列式的第二个标志。

例. $\begin{vmatrix}2&6\\9&76\\1&23\end{vmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第二个标志。

例. $\begin{vmatrix}4&50\\1&32\end{vmatrix}$是行列式，因为它同时满足行列式的第一个标志和第二个标志。

例. $\begin{bmatrix}4&5\\3&4\end{bmatrix}$不是行列式，因为它不满足行列式的第一个标志。

好，通过本节的讲解，相信大家对行列式已经有了很直观的认识，下面看第二节。

1.2 行列式的本质

本节给大家讲的是行列式的本质，其实本节的内容就一句话：**行列式的本质是<u>一个</u>数**。

大家注意：在这句话中，强调的是“一个”。

我们来看例子。

例. $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 32 & 12 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 43 & 45 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 都是行列式。第一个行列式在双竖线内有 4 个数，第二个行列式在双竖线内写有 9 个数，但是它们的本质都只是“一个”数。

大家现在明白了吧，这就是本节想要告诉大家的，此时肯定有不少同学想问：行列式所表示的那个数到底是什么？这个问题会在 1.3 节中讲解。

1.3 行列式的基本计算方法

在第二节中我们已经知道了行列式的本质是一个数，那么这个数究竟是多少？这就涉及行列式的基本计算方法，归纳如下：

- 行列式的基本计算方法
  - 特殊行列式的计算
    - 上三角行列式的计算
    - 下三角行列式的计算
    - 对角行列式的计算
    - 反对角行列式的计算
  - 一般行列式的计算
    - 两行两列行列式的计算
    - 三行三列行列式的计算
    - 大于三行三列行列式的计算

1.3.1 特殊行列式的计算

1. 上三角行列式的计算

先给大家介绍一下什么叫“对角线”。不说专业术语，用最通俗易懂的话来说，对角线是指行列式中从左上到右下的那条斜线。

例. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 28 \\ 4 & 8 & 92 \\ 12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 12 & 43 & 54 \\ 11 & 43 & 6 & 67 \\ 54 & 32 & 4 & 8 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

在这三个行列式中，对角线分别为“$\begin{matrix} 3 & & \\ & 8 & \\ & & 4 \end{matrix}$”、“$\begin{matrix} 2 & & & \\ & 12 & & \\ & & 6 & \\ & & & 8 \end{matrix}$”、“$\begin{matrix} 3 & \\ & 2 \end{matrix}$”。

注意：对角线是指行列式中从左上到右下的斜线，千万别记成从右上到左下的斜线。

再来看什么叫“上三角行列式”。**上三角行列式是指对角线下侧的所有数都为 0 的行列式。**

例. $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 0 & 32 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 34 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ 都是上三角行列式。

需要注意：在判断一个行列式是否为上三角行列式时，只需要关注对角线下侧，对角线下侧的所有数都为 0 的行列式就是上三角行列式，至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 都无所谓。

例. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ 都是上三角行列式。

那么，上三角行列式的计算方法是什么？很简单：**直接将对角线上的数相乘即可。**

例. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 4\times1\times8 = 32$，$\begin{vmatrix} 4 & 43 & 9 & 55 \\ 0 & 1 & 15 & 22 \\ 0 & 0 & 2 & 54 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4\times1\times2\times3 = 24$，$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 5\times4 = 20$

2．下三角行列式的计算

下三角行列式是指对角线上侧的所有数都为 **0** 的行列式。

下三角行列式的计算方法：直接将对角线上的数相乘（和上三角行列式的计算方法完全一样）。

例. $\begin{vmatrix}4&0&0\\0&1&0\\8&5&3\end{vmatrix}=4\times1\times3=12$，$\begin{vmatrix}1&0\\3&5\end{vmatrix}=1\times5=5$，$\begin{vmatrix}8&0&0&0\\0&2&0&0\\5&0&10&0\\1&32&4&1\end{vmatrix}=8\times2\times10\times1=160$

3．对角行列式的计算

对角行列式是指除对角线上的数以外所有数都为 **0** 的行列式。换言之，对角行列式是上三角行列式和下三角行列式的结合。注意：对角线本身的数中有没有 **0** 无所谓，只要除对角线以外的所有数都为 **0** 的行列式就是对角行列式。

对角行列式的计算方法：直接将对角线上的数相乘（和上三角、下三角行列式的计算方法完全一样）。

例. $\begin{vmatrix}4&0\\0&0\end{vmatrix}=4\times0=0$，$\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=3\times3\times2=18$，$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&10\end{vmatrix}=1\times2\times9\times10=180$

再次提醒注意：

- 在判断某行列式是否为上三角行列式时，只需判断对角线下侧的数是否全为 0 即可，至于对角线本身的数及对角线上侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为下三角行列式时，只需判断对角线上侧的数是否全为 0 即可，至于对角线本身的数及对角线下侧的数中有没有 0 则根本不需要关注。
- 在判断某行列式是否为对角行列式时，只需判断对角线上侧及下侧是否全为 0 即可，至于对角线本身的数中有没有 0 则根本不需要关注。

只要某行列式是上三角行列式、下三角行列式或对角行列式，那么计算该行列式的方法就是直接把对角线上的数相乘。

4．反对角行列式的计算

先来介绍“反对角线”的概念，**反对角线是指行列式中从右上到左下的斜线。**

例. $\begin{vmatrix}5&7\\2&4\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}4&3&13\\1&43&43\\45&13&14\end{vmatrix}$ 两个行列式中“$\begin{matrix}&7\\2&\end{matrix}$”和“$\begin{matrix}&&13\\&43&\\45&&\end{matrix}$”分别为各自的反对角线。

那么，反对角行列式是怎样的行列式?**反对角行列式是指除了反对角线上的数以外的所有数都为 0 的行列式（反对角线上的数中有没有 0 不需要关注）。**

例. $\begin{vmatrix}0&5\\6&0\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}0&0&7\\0&5&0\\1&0&0\end{vmatrix}$ 都是反对角行列式。

反对角行列式的计算方法：设反对角行列式为 $\begin{vmatrix}0&&a_1\\&a_2&\\{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}&&\\a_n&&0\end{vmatrix}$，则该反对角行列式的值为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$，其中 n 为该反对角行列式的行数（或列数）。

例. 计算 $\begin{vmatrix}0&0&0&2\\0&0&1&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}$

解： 此行列式为反对角行列式，如果想计算此行列式的值，需要套用刚才讲过的公式 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$。由于这是四阶（四行四列）行列式，所以 $n=4$。又因为在此题中，$a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=4$，所以此行列式的值为 $(-1)^{\frac{4(4-1)}{2}}\times2\times1\times3\times4=24$。

1.3.2 一般行列式的计算

1. 两行两列行列式的计算

两行两列的行列式又被称为二阶行列式，可以直接利用公式来计算，公式为：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

例. 计算$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6\times3-1\times2=16$

例. 计算$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 7\times8-3\times2=50$

2. 三行三列行列式的计算

三行三列的行列式又称为三阶行列式，与二阶行列式类似，可以直接利用公式来计算，公式为：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi$$

这公式并不难记，记忆方法如下：等式右侧共有六项，前三项为正，后三项为负，大体上要这么记：

□+□+□−Δ−Δ−Δ

那么，三个□中的每一个□该如何记？很简单：第一个□为对角线上的三个数相乘。对角线是“$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$”，所以第一个□为$aei$；那么第二个□和第三个□该如何记？也很简单：首先，从行列式中去掉对角线，也就是说，从行列式中去掉“$\begin{matrix} a & & \\ & e & \\ & & i \end{matrix}$”，则行列式变为$\begin{vmatrix} & b & c \\ d & & f \\ g & h & \end{vmatrix}$，只剩六个数了，然后从这六个数中找出三个不同行、也不同列的数相乘就是第二个□；剩下的三个数相乘就是第三个□。

那么，三个Δ中的每一个Δ又该如何记？第一个Δ为反对角线上的数字相乘。反对角线是“$\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$”，所以第一个Δ为$ceg$；至于第二个Δ和第三个Δ的记忆方法，也很简单：首先，从行列式中去掉反对角线，即从行列式中去掉“$\begin{matrix} & & c \\ & e & \\ g & & \end{matrix}$”，则行列式变为$\begin{vmatrix} a & b & \\ d & & f \\ & h & i \end{vmatrix}$，只剩下六个数。然后从这六个数中找出三个不同行、也不同列的数相乘就是第二个Δ；剩下的三个数相乘就是第三个Δ。

自己试试默写此公式：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

默写完公式后，再看看下面的例题：

例.
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-1\times6\times8-2\times4\times9 \\ &= 45+84+96-105-48-72 \\ &= 0\end{aligned}$$

3．大于三行三列的行列式计算

通过前面的介绍，我们已经知道了二阶行列式和三阶行列式可以通过公式来计算。那么，如果是四阶（四行四列）的行列式该怎么计算？如果是五阶（五行五列）的行列式又该怎么计算？如果还想知道相应的公式，只能很遗憾地告知：**大于三阶的行列式就没有计算公式了。但是不要失望！虽然没有公式，但是有办法计算！**我们一起开动脑筋想想，大于三阶的行列式虽然没有计算公式，但是二阶行列式和三阶行列式是有计算公式的，如果可以将四阶行列式、五阶行列式化为二阶的行列式或三阶的行列式，就可以套公式了，事实就是如此。

下面介绍**大于三行三列的行列式的计算方法：降阶法（也叫按行列展开法）。**

降阶法有两个步骤：

（1）从行列式中任意选择一行或一列。

（2）设我们选择的那一行数从左往右依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$（如果选择的是列，就设选择的那一列数从上往下依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$），然后设 x_i 为 a_i 的行标（比如 a_1 处于行列式中的第三行，那么 x_1 就是 3），设 y_i 为 a_i 的列标（比如 a_1 处于行列式中的第二列，那么 y_1 就是 2）。最后，再设 $|A_i|$ 为原行列式中去掉 a_i 所在行和所在列后剩下的数所组成的行列式，则行列式的值 $=a_1\times(-1)^{x_1+y_1}\times|A_1|+a_2\times(-1)^{x_2+y_2}\times|A_2|+\cdots+a_n\times(-1)^{x_n+y_n}\times|A_n|$。

以上就是降阶法（也叫按行列展开法）的两个步骤。由于步骤（2）设的东西很多，所以可能会觉得这个方法很难，降阶法其实非常简单。只不过如此简单的方法如果要用规范化的语言描述起来还真是比较麻烦，所以在步骤（2）才设这么多。现在看下面的这道例题，看完就会恍然大悟：哦！原来此方法如此简单啊。

例. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$

解：前面已经提过了，降阶法是用于计算大于三阶的行列式的方法，而本题是三阶行列式，应该用公式法来计算啊，肯定有很多同学会这么想。**现在告诉大家：三阶行列式既能用公式法计算，也能用降阶法计算，但是大于三阶的行列式只能用降阶法计算（除非是特殊的行列式）。**由于要举例说明降阶法的使用，所以这道例题就用降阶法来计算。

我们严格按照上述两个步骤来做。

（1）从行列式中任意选择一行或一列，此时有六种选法：可以选择第一行1　2　3，可以选择第二行4　5　6，可以选择第三行7　8　9，可以选择第一列1　4　7，可以选择第二列2　5　8，可以选择第三列3　6　9。从这六种选法中任意选择一种都可以，因为无论选的是哪一种，最后的答案都是一样的。如我们就选择第一行，即1　2　3。

（2）$D=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}=0$

为什么会这样呢？因为“-1”是公式中有的，记住就行了。由于 1 在第一行第一列，所以是 1+1；2 在第一行第二列，所以是 1+2；3 在第一行第三列，所以是 1+3。然后 $\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}$ 分别为行列式去掉 1，2，3 所在行和所在列后剩下的行列式。请看下面的详细解释。

$\begin{vmatrix}\boxed{1}&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 去掉 $\boxed{1}$ 所在的行和列，即去掉第一行和第一列，剩下的数所组成的行列式为 $\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$；$\begin{vmatrix}1&\boxed{2}&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 去掉 $\boxed{2}$ 所在的行和列，即去掉第一行和第二列，剩下的数所组成的行列式为 $\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}$；$\begin{vmatrix}1&2&\boxed{3}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 去掉 $\boxed{3}$ 所在的行和列，即去掉第一行和第三列，剩下的数所组成的行列式为 $\begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}$。

这道题就做完了，最后的答案是 0。

倘若在步骤（1）选择的不是第一行而是第二行、第三行、第一列、第二列、第三列，那么最后的答案也是一样的，我们不妨试试。如果选择的是第二行4　5　6，则

$$D=4\times(-1)^{2+1}\times\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix}+5\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}+6\times(-1)^{2+3}\times\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=0$$

可见用两种不同的选法来做，结果是一样的。同样还可以选择第三行、第一列、第二列、第三列来做，结果也一样。

注意：这道题是采用降阶法来做的，把三阶的行列式降成三个二阶行列式，然后用二阶行列式的公式去做。此题可以直接用公式法，因为三阶行列式本来就有公式。但是如果要计算四阶或四阶以上的行列式，就必须用降阶法了。计算四阶的行列式要将其化为四个三阶行列式相加的形式，然后用三阶行列式的公式去计算。当然，如果认为三阶行列式的公式麻烦，完全可以再将每个三阶行列式降为三个二阶行列式，然后用二阶行列式的公式去计算。

至此，本节已经讲完，最后给两点温馨提示。

温馨提示 1：在进行降阶法的步骤（1）（从行列式中任意选择一行或一列）时，**要尽量选取有 0 的行或列**，因为 0 的那一项肯定是 0，不用乘了，简化了步骤（2）。

温馨提示 2：特殊行列式完全可以用一般行列式的计算方法来计算。如$\begin{vmatrix}2 & 0\\5 & 4\end{vmatrix}$是特殊行列式中的下三角行列式，直接把对角线上的数字相乘即可，$\begin{vmatrix}2 & 0\\5 & 4\end{vmatrix}=2\times4=8$。而如果把它看成是一般行列式中的两行两列行列式，则$\begin{vmatrix}2 & 0\\5 & 4\end{vmatrix}=2\times4-0\times5=8$，答案是一样的。

1.4　行列式的五条性质

1.3 节给大家讲的知识已经足够计算一个行列式了，然而，为了计算的方便与快捷，以下五条行列式的性质也务必掌握（再次说明：这不属于行列式的基本计算方法，只是性质，通过这些性质可以更快捷地计算一个行列式，务必掌握）。

性质 1

一个行列式的转置等于它本身。

先来说一下什么叫转置。把一个 n 行 n 列的行列式，第一行变成第一列，第二行变成第二列……第 n 行变为第 n 列后所得到的新行列式称为原行列式的转置。假设原行列式记为 D，则它的转置记作 D^{T}。

例. $D=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\1 & 6 & 8\\3 & 2 & 1\end{vmatrix}$，求 D 的转置 D^{T}。

解： 把它的第一行$2\quad3\quad5$变为第一列$\begin{matrix}2\\3\\5\end{matrix}$，把它的第二行$1\quad6\quad8$变为第二列$\begin{matrix}1\\6\\8\end{matrix}$，把它的第三行$3\quad2\quad1$变为第三列$\begin{matrix}3\\2\\1\end{matrix}$，得到转置矩阵 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 6 & 2\\5 & 8 & 1\end{vmatrix}$。

以上只是告诉大家什么是转置，现在来说一下性质 1。性质 1（一个行列式的转置等于它本身）的意思就是 $D^{\mathrm{T}}=D$。

例. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\1 & 6 & 8\\3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\3 & 6 & 2\\5 & 8 & 1\end{vmatrix}$，如果分别计算这两个行列式，会发现它们的值是一样的。

性质 2

互换两行，行列式变号。

例. $\begin{vmatrix}7 & 6\\23 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}23 & 1\\7 & 6\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}1 & 3 & 54\\8 & 7 & 12\\43 & 1 & 6\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}8 & 7 & 12\\1 & 3 & 54\\43 & 1 & 6\end{vmatrix}$

性质 2 有一个推论：如果某行列式有两行相同，就不用费精力去计算了，这个行列式的值一定为 0，这个推论是怎么得出来的？下面说明这个推论的推导过程。

如$\begin{vmatrix}a & b & c\\c & d & e\\a & b & c\end{vmatrix}$，根据性质 2，将第一行与第三行进行互换，行列式变号，即$\begin{vmatrix}a & b & c\\c & d & e\\a & b & c\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a & b & c\\c & d & e\\a & b & c\end{vmatrix}$。那么，什么数的相反数等于它本身，只有 0。

性质 2 讲完了，练一道题。

例. 计算$\begin{vmatrix}1 & 7 & 5\\2 & 3 & 8\\1 & 7 & 5\end{vmatrix}$

解：由于其中有两行相同，所以$\begin{vmatrix}1&7&5\\2&3&8\\1&7&5\end{vmatrix}=0$。

性质 3

如果行列式的某一行的数含有公因子，则可将此公因子提到行列式之外。

例. 计算$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&6&10\\9&17&42\end{vmatrix}$

解：其中第二行 2　6　10 含有公因子 2，可以将这个 2 提到行列式之外，因此

$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&6&10\\9&17&42\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&3&5\\1&3&5\\9&17&42\end{vmatrix}$。根据性质 2 的推论可知$\begin{vmatrix}1&3&5\\1&3&5\\9&17&42\end{vmatrix}=0$，$2\begin{vmatrix}1&3&5\\1&3&5\\9&17&42\end{vmatrix}=0$，所以$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&6&10\\9&17&42\end{vmatrix}=0$。

再来看一个例子。

例. 计算$\begin{vmatrix}4&8&12\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\\1&6&5\end{vmatrix}$

解：$\begin{vmatrix}4&8&12\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\\1&6&5\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&2&3\\\frac{1}{8}&\frac{2}{8}&\frac{3}{8}\\1&6&5\end{vmatrix}=\frac{4}{8}\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&6&5\end{vmatrix}=\frac{4}{8}\times0=0$

下面说一点要注意事项：既然行列式中某行的公因子可以提到行列式外面，那么行列式外面的数自然也可以乘到行列式中，并且可以乘到任何一行。

例.
$$\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\2&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\2\times1&2\times2&2\times3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\1&2&3\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\begin{vmatrix}2&8&14\\2&5&8\\1&2&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&4&7\\4&10&16\\1&2&3\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\2&4&6\end{vmatrix}\end{array}\right.$$

上例中行列式外面的 2 是从原行列式的第三行提到行列式外面的，但是再乘到行列式中时，可以乘到任意一行。

与性质 2 一样，**性质 3 也有一个推论：如果行列式有两行对应成比例，那么此行列式就不用费力去计算了，其值一定为 0**，证明过程如下：

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\ka&kb&kc\\d&e&f\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=k\times0=0$$

现在来看一道例题。

例. 计算$\begin{vmatrix}1&4&2\\1&9&2\\9&36&18\end{vmatrix}$

解：由于第一行和第三列对应成比例（第三行是第一行的 9 倍），所以$\begin{vmatrix}1&4&2\\1&9&2\\9&36&18\end{vmatrix}=0$。

要注意：性质 2、性质 3 推论的结论都是行列式的值为 0。只不过前者说的是若行列式有两行相同，则值为 0;