奇才教育

李正兴 高考

数学红宝书

THE RED BOOK OF MATHEMATICS

梳理必考点 + 精讲压轴题

李正兴◎编著

红宝书

资深数学高级教师毕生教学成果

解密高考数学最新最热题型

上海社会科学院出版社

奇才教育

李正兴 高考

数学红宝书

THE RED BOOK OF MATHEMATICS

梳理必考点 + 精讲压轴题

李正兴◎编著

红宝书

上海社会科学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

李正兴高考数学红宝书：梳理必考点＋精讲压轴题/李正兴著. —上海：上海社会科学院出版社，2014

ISBN 978-7-5520-0643-8

Ⅰ.①李… Ⅱ.①李… Ⅲ.①中学数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 150113 号

李正兴高考数学红宝书：梳理必考点＋精讲压轴题

著　　者：李正兴
责任编辑：李　慧
封面设计：郁心蓝
出版发行：上海社会科学院出版社
上海淮海中路 622 弄 7 号　电话 63875741　邮编 200020
http://www.sassp.org.cn　E-mail:sassp@sass.org.cn
排　　版：南京展望文化发展有限公司
印　　刷：上海新文印刷厂
开　　本：889×1194 毫米　1/16 开
印　　张：26.75
字　　数：1150 千字
版　　次：2014 年 8 月第 1 版　2014 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5520-0643-8/G·350　定价：58.00 元

序

近200万字的《李正兴高考数学红宝书：梳理必考点＋精讲压轴题》以及与之配套的《李正兴高考数学蓝宝书：狂练必考点＋精做压轴题》终于付梓在即，这是我写作的第十二部数学高复系列图书，由上海社会科学院出版社出版发行，本丛书是根据近年来高考数学命题的现状及改革方向，遵循考纲，注重思维，聚焦能力，为高考学生精心打造的教辅书，又兼顾名牌大学自主招生的最新走向(包括上海市水平考加试及全国高校自主命题)，吸取了近年来数学高复研究成果，是对数学高复的全新演绎.

《李正兴高考数学红宝书：梳理必考点＋精讲压轴题》共五十九节，实质是五十九个必考专题，每个专题又蕴涵了若干必考点，不论是上海卷还是全国卷、省市卷，重要考点无一遗漏，对每一个必考点的分析力争精准到位.

在本书出版之际，填词一首：

金缕曲

数苑四十载，在教坛，华发染鬓，才情尽送，叹高次方程无解，世事原来不公，难将息，灵泉源涌，五色尚存生花笔，向人间，纸墨相吟弄，夜深沉，海上风.

青春岁月消踪，想当年，意气勃发，今已成空.

一曲清歌浦江畔，汗牛也要充栋，君不见，江湖澒洞，

得失无关文章事，勤耕耘，莘莘学子有用，脚乃健，心犹雄.

退休已经七个年头，却仍然是整天忙忙碌碌、辛苦而快乐着，杨绛在“一百岁感言”中说：我们曾如此渴望命运的波澜，到最后才发现：人生最曼妙的风景，竟是内心的淡定与从容. 这是一个智者的内心独白. 在物欲横流的人世间如何以平静的心态坚持做对社会有价值的事情，这种坚持与名利无关，名够累人利也不缺，在本世纪的十五年中，以个人的力量出版了2 000万字的数学高复专著，计十部35本，发行数近40万册，有四十万高三学生用过或正在用我写的书；如果考虑重复使用以及有些名校买一本试卷集印刷几百份. 受众远不止这个数. 这应当是一件最为快乐的事情，孔子仅是弟子三千，我的学生百倍于此数，今天我们大谈“你幸福了吗?”对我而言，能静心地把四十余年的教学经验和知识传授给那么多的学生，可以称得上是幸福了!

人的一生总会经受一些苦难的，邓小平时代才开始重视人的价值，把苦难当作不同程度的锻炼吧! 每一个人降生到这个美丽又险恶的世界上来，“一定有对于他最合宜的位置，这个位置仿佛是降生时就给他准备了的只等他有一天来认领，每一个人的禀赋都是独特的，由此决定了能使其禀赋和价值得到最佳实现的那个位置也必然是独特的.”(哲学家周国平语)我的位置是当一个出色的数学教师，由于我还有较为扎实的文科功底，决定了我这个数学教师具有一定的写作才能，于是决定了我在这个位置从容而淡定地一干就是三十多年，退休后再干十年，我乐此不疲地授课、教研、写作，爬格子居然爬出了2 000万字，有时梦中还想着如何写作，怎样才能写得更好，我想起了钱锺书先生的诗：“睡乡分境隔山川，枕坼槐安各一天，那得五丁开路手，为余凿梦两通连”，我在为具有梦想的学生们写作，无怨无悔地做他们的“开路手”，我的心与学生的心始终是相通的. 他们的受益是我的快乐，感谢苍天，我找到了最适合我的天性的生活，对我而言是理想的生活，我不会在喧闹的人世间迷失方向，我的老年生活更充实，更绚丽多彩!

七律一首正反映出我当前的生活状态，词一首是我心灵的写照. 以此与读者交流，一位老者正陪伴你过走火热的六月，走向成功!

七　律

远离浮躁已超然，阅读授课两不闲.
书稿在案秃笔破，曙色临窗漏日妍.
昂立邀我拓教研，老骥伏枥赋新篇.
心曲没有终止符，白首痴顽亦可怜.

六州歌头——述怀

霜雪染发，落日夕阳红，述而斋，北窗下，清晖共，勤耕耘.
案上稿盈尺，渐升起，涓流积，沧溟水，拳石垒，泰山耸.
千万余字，十部三十册，笑对晚风，人生苦与乐，尽在不言中.

岁月匆匆，白头翁，忆少年时，狂来笔，青春梦，豪情涌.
“文革”乱，神州坠，道难通，影朦胧.
小平扭乾坤，启高考，情意浓.
攻数理，授《九章》，心晶莹.
收得桑榆，满山桃李拥，暮敲晨钟.
浩然吟啸客，老眼望山川，漠漠苍穹.

感谢我的妻子杨蕙芬，没有她的支持，我的2 000万字，35本专著是不可能写出来的，亲情使我获得生命的享受，我坚信，大自然提供的只是素材，唯有亲情才能把素材创造成完美的作品，我获得的任何细小的成功都有她的陪伴，这就是阳光下绵亘着人生简朴的幸福，浩渺宇宙，一个生灵与另一个生灵的相遇总是千载一瞬，她的爱心既博大又深沉.

限于本人水平，书中存在的疏漏之处，欢迎读者批评指正、合作交流.

李正兴
2014年夏
于海上述而斋

前 言

《李正兴高考数学红宝书：梳理必考点+精讲压轴题》(简称“红宝书”)十六章五十九节，覆盖高中数学教材全部知识，并实行文理分叉，每章包含体系综述和若干专题. 节与节之间、章与章之间环环相扣，凝聚数学思想，逻辑神韵飞扬. 每节由“知识梳理”“学法点拨”“例题精讲”“难点攻略”“易错警示”“真题导读&考题预测”六个方面实施“推进式”教学，注重探究，直指高考，实现与高考零距离.

1. “知识梳理”：重要考点一览无余，尽收眼底. 从而可以达到消除盲点、贯通知识、建构知识链的目标. 你想在数学高考中获得高分，对考点的整理归纳是必不可少的重大步骤，是战前的知识储备、战斗的武器库.

2. “学法点拨”：让学生通过点拨，做到复习有方向. 这部分文字不多，字字“金玉”，以简洁的语言带给你攻克数学堡垒的灵感.

3. “例题精讲”：针对本讲应掌握的考点，给出若干紧扣考纲，能呈现基础知识和解题通法的典型例题，每例给出“策略点击”与解法展示，尽量一题多解，倡导多角度多维度分析问题、攻破难题，引导学生拓展知识的核心部分，拓展思维、循序渐进，由此及彼、逐步深入. 当你弄懂了一道例题，同时也厘清了一些数学概念，掌握了若干解题方法，进而能举一反三、举一反十解决一大批习题，成为一个出色的解题者，岂不快哉！

4. “难点攻略”：选例大多是近年来涌现出来的一些极其典型的训练题，浓缩了一种纯粹的高考精华，体现了一种全新的备考理念，是基本方法的科学总结，有了方法的储备，剑指难点，迎战不慌！

5. “易错警示”：帮助考生寻找易错点，进行查漏补缺. 在数学高复过程中对多数学生而言常有一个瓶颈状态存在，每次测试低级错误不断、问题出在对考点以及解题通法不能做到“了然于胸”，正如堵塞不畅的河道只有加以疏通才能通畅无阻、一泻千里. 这一步工作做到位是短时期内提高成绩的有效途径.

6. “真题导读&考题预测”：大数学家希尔伯特说：“尽管数学知识千差万别，我们仍然清楚地意识到作为整体的数学中，使用着相同的逻辑工具，存在着概念的亲缘关系，同时在它的不同部分之间，也有大量相似之处.”这里的真题或考题预测通常是经历时间洗礼或近年来高考中涌现出来具有创新精神的精彩好题，典型性强、具有启迪思维，揭示规律性的内涵，同时也是对近年来高考命题的走向进行科学分析. 现阶段可能考的题型，是结合考纲而作出的一种概率极高的预测.

纵观近年高考试题，尽管包装得新奇，像穿了一件新颖的马夹，剥开马夹，考查的仍然是常见的数学能力、解读或预测这类试题也就是展示解题过程中存在的逻辑之美、节奏之美、数学思想之美. 宋代理学家朱熹有一首《观书有感》的诗写得很精彩：“半亩方塘一鉴开，天光云影共徘徊. 问渠哪得清如许，为有源头活水来.”学习数学也要追求豁然开朗，把书读活的感觉.

本书配套《李正兴高考数学蓝宝书》使用，效果更好.

目　录

第一章　集合与命题

高中数学课程以"集合和命题"作为开端是非常必要的.集合论是现代数学的基础,它的创始人是德国数学家康托尔.集合作为一种语言将贯穿在整个高中数学内容中;而集合与命题之间的联系以及基本的逻辑关系在数学表达和论证中起到十分重要的作用.

本章主要阐述两大部分内容,一是集合的一些初步知识,二是命题与条件.集合的初步知识包括:集合的有关概念、集合的表示及集合与集合之间的关系、集合的运算和对有限集的进一步研究等;命题与条件主要包括:命题的基本知识、四种命题形式及其相互关系、条件的判别等.

至今,集合理论和方法已渗透到现代数学的各个领域,如数学分析、泛函分析、概率论、信息论……掌握集合思想已成为现代人应具备的数学素质,正如数学家 A. N. 科尔莫戈洛夫所言:"康托尔的不朽功绩,在他敢于向无穷大冒险迈进,他对似是而非之论,流行的成见,哲学的教条等作了长期不懈的斗争,由此使他成为一门新学科的创造者,这门学科(指集合论)今天已经成了整个数学的基础."

第一节　集合的概念与运算

一、知识梳理

1. 集合:把某些能够确切指定的一些对象看作一个整体,这个整体就叫作集合,简称集.集合中的各个对象叫作这个集合的元素.

2. 集合元素的特征:确定性、互异性、无序性.

3. 子集:对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 中任何一个元素都属于 B,那么集合 A 叫作集合 B 的子集,记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

4. 真子集:对于两个集合 A、B,如果 $A\subseteq B$,并且 B 中至少有一元素不属于 A,那么集合 A 叫作集合 B 的真子集,记为 $A\subsetneqq B$.

5. 相等集:对于两个集合 A、B,如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,那么集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

6. 空集:不含任何元素的集合,记$\varnothing$.空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

7. 交集:由集合 A 和集合 B 的所有公共元素组成的集合,叫作 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{且} x\in B\}$.

8. 并集:由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,叫作 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{或} x\in B\}$.

9. 补集:记 U 为全集,A 是 U 的子集,则由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫作 A 在全集 U 中的补集,记为 $\complement_U A=\{x\mid x\in U \text{且} x\notin A\}$.

10. 对于含有 n 个元素的有限集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$,其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为 2^n, 2^n-1, 2^n-1, 2^n-2.

11. 集合的四种表示方法:列举法、描述法、文氏图法、特定字母法.

12. 德·摩根公式:$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup \complement_U B$, $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap \complement_U B$.

二、学法点拨

1. 理解集合的概念,掌握集合的两种表示方法(列举法与描述法),领会集合中元素的确定性、互异性和无序性,以及元素与集合的"属于"或"不属于"关系.

2. 能对集合不同表示方法做转换,明确元素的形式,理解集合之间的"包含""真包含"与"相等"关系,注意空集在解题中的运用.

3. 理解集合运算的含义,会进行集合间的"交""并""补"运算,并注意集合的包含关系与集合运算的联系,如 $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$;$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$ 等,还要会运用文氏图表示集合运算.

4. 注意集合与方程、不等式、函数、解析几何等知识的联系,掌握集合的思想方法,特别是依据"正难则反"的原则运用"补集法"解题,在各类集合的运用中提高能力.

三、例题精讲

例 1 设集合 A 有 4 个元素且不含有元素 -1, 0, 1,且满足条件：若 $a \in A$,则有 $\dfrac{1+a}{1-a} \in A$.

请回答下列问题：

(1) 已知 $2 \in A$,求出 A 中其他所有元素；

(2) 选择一个你喜欢的实数属于 A,再求出 A 中其他所有元素；

(3) 根据已知和(1)(2),你能悟出什么道理？请证明你的猜想.

策略点击：在求集合中的元素时,一定要注意集合中元素的互异性,由元素的互异性可知所求集合中元素的个数只能有 4 个.

解：(1) 由 $2 \in A$,则 $\dfrac{1+2}{1-2} = -3 \in A \Rightarrow \dfrac{1-3}{1+3} = -\dfrac{1}{2} \in A \Rightarrow \dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3} \in A \Rightarrow \dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 \in A$,所以集合 $A = \left\{2, -3, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right\}$.

(2) 任取一个常数,如 $3 \in A$,则同(1) 可得 $A = \left\{3, -2, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$.

(3) 猜想对任意的 $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, $a \in A$,则集合 $A = \left\{a, \dfrac{1+a}{1-a}, -\dfrac{1}{a}, \dfrac{a-1}{a+1}\right\}$,证明如下：若 $a \in A$,则 $\dfrac{1+a}{1-a} \in A \Rightarrow \dfrac{1+\frac{1+a}{1-a}}{1-\frac{1+a}{1-a}} = -\dfrac{1}{a} \in A \Rightarrow \dfrac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}} = \dfrac{a-1}{a+1} \in A \Rightarrow \dfrac{1+\frac{a-1}{a+1}}{1-\frac{a-1}{a+1}} = a \in A$. 根据集合元素的互异性可得 $a \neq \pm 1$ 且 $a \neq 0$.

例 2 (1) 将下列集合用列举法表示：

① 集合 $A = \{y \mid y = x^2 - 1, \mid x \mid \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\}$,② 集合 $B = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1, \mid x \mid \leqslant 2, x \in \mathbf{Z}\}$;

(2) 已知集合 $A = \left\{x \,\middle|\, \dfrac{x+a}{x^2-2} = 1\right\}$ 有唯一元素,用列举法表示满足条件的 a 的集合.

策略点击：对于(1),集合 A 的元素是数 y,它满足函数关系 $y = x^2 - 1$ 在 $\mid x \mid \leqslant 2$, $x \in \mathbf{Z}$ 时 y 的取值,也是函数的值域；集合 B 的元素是点的坐标,是满足函数关系 $y = x^2 - 1$ 在 $\mid x \mid \leqslant 2$, $x \in \mathbf{Z}$ 时对应的点集. 前者是数,后者是形,是集合研究的两种重要对象. 对于(2),解题关键是将集合的符号语言转换成图形语言,利用函数的图像分析自变量与函数值的对应关系,解题过程中注意不要忽视元素 x 的隐性限制条件 $x^2 \neq 2$.

解：(1) 因为 $\mid x \mid \leqslant 2$, $x \in \mathbf{Z}$,所以 $x = \pm 2, \pm 1, 0$,对应的 y 值分别为 3, 0, -1.

集合 A 表示函数 $y = x^2 - 1$ 在 $\mid x \mid \leqslant 2$, $x \in \mathbf{Z}$ 条件下的值域,所以 $A = \{3, 0, -1\}$.

集合 B 表示函数 $y = x^2 - 1$ 在 $\mid x \mid \leqslant 2$, $x \in \mathbf{Z}$ 条件下的点集,所以 $B = \{(2, 3), (-2, 3), (-1, 0), (1, 0), (0, -1)\}$.

(2) 由集合中元素性质条件将 $\dfrac{x+a}{x^2-2} = 1$ 转化为 $a = x^2 - x - 2$ $(x \neq \pm\sqrt{2})$.

函数 $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$ $(x \neq \pm\sqrt{2})$ 的图像为挖去两点 $M(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$、$N(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$的抛物线,如图 1-1 所示.

可知,当 $a = -\dfrac{9}{4}$ 时,x 有唯一值 $x = \dfrac{1}{2}$;

又 $x \neq \sqrt{2}$,故当 $a = -\sqrt{2}$ 时,x 有唯一值 $x = 1 - \sqrt{2}$;

又 $x \neq -\sqrt{2}$,故当 $a = \sqrt{2}$ 时,x 有唯一值 $x = 1 + \sqrt{2}$.

因此满足条件的 a 的集合为 $\left\{-\dfrac{9}{4}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

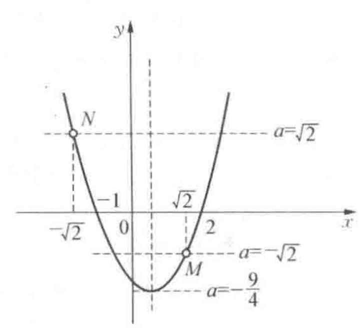


图 1-1

例 3 已知 $A = \{1, 1+d, 1+2d\}$, $B = \{1, r, r^2\}$,其中 $d \neq 0$, $r \neq 1$. 若 $A = B$,试求集合 A.

策略点击：两集合相等即为其中元素对应相等,而集合中的元素具有无序性,所以本题中元素的对应有两种形式,又集合中的元素具有互异性,所以对求出的 r, d 必须验证. 可见,数学概念是数学的核心,抓住了数学概念也就抓住了解题的根本.

解：若 $\begin{cases} 1+d = r, & ① \\ 1+2d = r^2, & ② \end{cases}$ 将①代入②得 $1 + 2d = (1+d)^2$,解得 $d = 0$,与条件 $d \neq 0$ 矛盾；

所以 $\begin{cases}1+d=r^2, ③\\1+2d=r, ④\end{cases}$ 将④代入③得 $1+d=(1+2d)^2$，所以 $d=0$（舍去）或 $d=-\dfrac{3}{4}$.

所以 $A=B=\left\{1,\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{2}\right\}$.

例 4 (1) 已知集合 $M=\{x\mid 0\leqslant ax+1\leqslant 4\}$，$N=\{x\mid (x+1)(x-4)\leqslant 0\}$ 且 $M\subseteq N$，求 a 的取值范围；

(2) 已知集合 $P=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，$S=\{x\mid x^2-2ax+a\leqslant 0\}$，且 $S\subseteq P$，求实数 a 的取值组成的集合 A.

策略点击：对于(1)必须对 a 的取值按 $a=0$，$a>0$，$a<0$ 三种情形分类讨论. 对于(2)先讨论特殊情形($S=\varnothing$)，再讨论一般情形，这是此类问题求解的一般程序. 关键是对 Δ 分类讨论，确定 a 的取值范围. 可用数形结合的方法讨论 $\Delta>0$ 时的情况，读者若能探索本例的变式 $S\supseteq P$ 的情况，则对问题的理解会"更上一层楼".

解：(1) $N=[-1,4]$. 当 $a=0$ 时，$M=R$，不合题意；

当 $a>0$ 时，由 $0\leqslant ax+1\leqslant 4$，得 $-\dfrac{1}{a}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{a}$，$M=\left[-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a}\right]$，

因为 $M\subseteq N$，所以 $\begin{cases}-\dfrac{1}{a}\geqslant -1,\\ \dfrac{3}{a}\leqslant 4,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$；

当 $a<0$ 时，$M=\left[\dfrac{3}{a},\ -\dfrac{1}{a}\right]$，因此 $M\subseteq N\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{a}\geqslant -1,\\ -\dfrac{1}{a}\leqslant 4,\end{cases}$ 即得 $a\leqslant -3$.

综上知，a 的取值范围是 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

(2) $P=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，设 $f(x)=x^2-2ax+a$，

① 当 $\Delta=(-2a)^2-4a<0$，即 $0<a<1$ 时，$S=\varnothing$，满足 $S\subseteq P$.

② 当 $\Delta=0$，即 $a=0$ 或 $a=1$ 时，若 $a=0$，则 $S=\{0\}$，不满足 $S\subseteq P$，舍去；若 $a=1$，则 $S=\{1\}$，满足 $S\subseteq P$.

③ 当 $\Delta>0$ 时，要满足 $S\subseteq P$，即等价于方程 $x^2-2ax+a=0$ 的两根位于 1 和 2 之间，即

$$\begin{cases}\Delta>0,\\ 1<-\dfrac{(-2a)}{2}<2,\\ f(1)\geqslant 0,\\ f(2)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\text{ 或 }a>1,\\ 1<a<2,\\ 1-a\geqslant 0,\\ 4-3a\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow a\in\varnothing,$$

综合①②③得 $0<a\leqslant 1$，即所求集合 $A=\{a\mid 0<a\leqslant 1\}$.

例 5 (1) 设 $A=\{x\mid x^2-5x-6=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid ax^2-x+6=0,\ x\in\mathbf{R}\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的值；

(2) 集合 $A=\{x\mid x^2-(a+1)^2x+2a^3+2a\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0\}$，求使 $A\subseteq B$ 成立的实数 a 的取值范围.

策略点击：对于(1)，讨论两个方程解集之间的关系，由 $B\subseteq A$，应对 B 可能的情况逐个加以讨论，排除不可能的取值；对于(2)，讨论两个不等式解集之间的关系，B 中不等式 $x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0$ 左端因式分解后得 $(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$，则必须对 $3a+1$ 与 2 的大小关系进行分类讨论，再结合 $A\subseteq B$ 这一关系求出实数 a 的取值范围.

分类讨论是一种十分重要的数学思想方法，运用原则是：合理分类，不重复、不遗漏.

解：(1) 由已知得 $A=\{-1,6\}$，因为 $B\subseteq A$，所以 $B=\varnothing$ 或 $B=\{-1\}$ 或 $B=\{6\}$ 或 $B=\{-1,6\}$（列举所有可能情况，别忘记空集是任何集合的子集）.

① 若 $B=\varnothing$，则 $a\neq 0$ 且 $\Delta=(-1)^2-4\cdot a\cdot 6<0$，解不等式得 $a>\dfrac{1}{24}$.

② 若 $B=\{-1\}$，则 $a\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$，解方程得 $a=-7$.

代入原方程得 $-7x^2-x+6=0$，即 $B=\left\{-1,\ \dfrac{6}{7}\right\}$，矛盾（必须检验：是否与题设矛盾，是否与集合元素之特征矛盾）.

③ 若 $B=\{6\}$，则 $a\cdot 6^2-6+6=0$，解方程得 $a=0$，

则 $B=\{x\mid -x+6=0,\ x\in\mathbf{R}\}=\{6\}$，所以 $a=0$.

④ 若 $B=\{-1,6\}$，则 $a\cdot(-1)^2-(-1)+6=0$ 且 $a\cdot 6^2-6+6=0$，依次解方程得 $a=-7$ 且 $a=0$，矛盾.

综上，$a>\dfrac{1}{24}$ 或 $a=0$.

(2) 解法一：$A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$（当且仅当 $a=1$ 时 $A=\{2\}$），

$x^2-3(a+1)x+6a+2\leqslant 0\Rightarrow(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$（必须分类讨论 2 与 $3a+1$ 的大小关系）.

① 当 $3a+1>2$，即 $a>\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$，

因为 $A\subseteq B$，所以 $2a\geqslant 2$ 且 $a^2+1\leqslant 3a+1$，所以 $a\geqslant 1$ 且 $0\leqslant a\leqslant 3$，所以 $a\in[1, 3]$.

② 当 $a=\frac{1}{3}$ 时，$A=\left\{x \,\middle|\, \frac{2}{3}\leqslant x\leqslant \frac{10}{9}\right\}$，$B=\{2\}$，所以 $A\subseteq B$ 不可能成立.

③ 当 $3a+1<2$，即 $a<\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x \mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

因为 $A\subseteq B$，所以 $3a+1\leqslant 2a$ 且 $a^2+1\leqslant 2$，所以 $a\leqslant -1$ 且 $-1\leqslant a\leqslant 1$，所以 $a=-1$.

综上，所求实数 a 的取值范围是 $a=-1$ 或 $1\leqslant a\leqslant 3$.

解法二：由解法一得 $A=\{x \mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$ 且 $A\subseteq B$.

令 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，则 $f(x)=0$ 的一个根位于区间 $(-\infty, 2a]$ 中，另一个根位于区间 $[a^2+1, +\infty)$ 中，

所以 $\begin{cases} f(2a)\leqslant 0, \\ f(a^2+1)\leqslant 0, \end{cases}$ 解得 $1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1$.

所以 a 的取值范围是 $\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 3$ 或 $a=-1\}$.

例 6 (1) 已知全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2\}$，$B=\left\{x \,\middle|\, \frac{5}{x+2}\geqslant 1\right\}$，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$；

(2) 已知集合 $A=\{x \mid x^2+x-2\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid 2<x+1\leqslant 4\}$，$C=\{x \mid x^2+bx+c>0\}$，且 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求 b，c 的值.

策略点击：第(1)小题考查集合的表示、集合的运算、对数不等式及分式不等式的解法等数学基础知识和基本解题技能，解答时应通过求解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 及 $\frac{5}{x+2}\geqslant 1$ 得到集合 A，B. 在进行集合运算时，通常借助数轴，这样可以直观地获得正确的结果. 解不等式时必须注意思维的严谨性. 解对数不等式应“抓住单调性，不忘定义域”实现超越不等式向一般代数不等式的转化.

第(2)小题在求解时一般先将参与运算的集合化简，再进行求解. 关键是把 $A\cup B$ 看作一个整体，该集合与集合 C 的交集为空集、并集为全集，因此该集合为集合 C 在 $\mathbf{R}$ 中的补集，进而求得集合 C. 本题的最终目标是求 b，c 的值，而从条件与结论的匹配关系来看，集合 A，B，C 的限制条件均为不等式. 如何从中获得等量关系进而求出 b，c 的值呢？这就要从一元二次不等式、一元二次方程和二次函数这三者之间的关系入手，这是一种十分重要的思想方法. 要善于从数和形、等与不等、等价转化等角度去深刻理解这三者之间的关系.

解：(1) 由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant -2$ 得 $\begin{cases} 3-x\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \\ 3-x>0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x\geqslant -1, \\ x<3, \end{cases}$ 所以 $-1\leqslant x<3$.

所以 $A=\{x \mid -1\leqslant x<3\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x \mid x\geqslant 3$ 或 $x<-1\}$.

由 $\frac{5}{x+2}\geqslant 1$ 得 $\frac{x-3}{x+2}\leqslant 0$，解得 $-2<x\leqslant 3$，所以 $B=\{x \mid -2<x\leqslant 3\}$.

如图 1-2 所示，得 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\{x \mid -2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

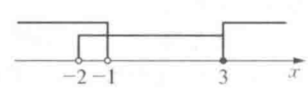


图 1-2

(2) 因为 $A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x \mid 1<x\leqslant 3\}$，

所以 $A\cup B=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$.

由 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，得 $C=\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)=\{x \mid x<-2$ 或 $x>3\}$.

又 $C=\{x \mid x^2+bx+c>0\}$，故 -2，3 是方程 $x^2+bx+c=0$ 的两根. 由韦达定理可得 $b=-1$，$c=-6$.

例 7 已知集合 $A=\left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，集合 $B=\{(x, y) \mid (a^2-1)x+(a-1)y=30\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的值.

策略点击：本题的解法可以是把集合 A，B 看作二元方程的解集，从而把 $A\cap B=\varnothing$ 转化为一个二元方程组无解的问题加以讨论，这是一种解题视角. 若把 A、B 看作是坐标平面上的点集，把问题转化为解析几何中两条直线的位置关系问题求解，这是解决这一问题的另一视角. 从前面的分析可知，对同一问题观察的视角不同，解题的出发点也就不同，解法自然也就不同. 下面提供的是前一种解法. 后一种解法的思路是联立方程组 $\begin{cases} l_1:\ (a^2-1)x+(a-1)y=30, \\ l_2:\ (a+1)x-y=2a-1\ (x\neq 2), \end{cases}$ ① 验证 $a=\pm 1$ 时的情况；② $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{a^2-1}{a+1}=\frac{a-1}{-1}\neq \frac{30}{2a-1}$，求 a 的值；③ 以 $(2, 3)$ 代入求 a；综合①②③得 $A\cap B=\varnothing$ 时 a 的值.

解：由 $A\cap B=\varnothing$，即方程组 $\begin{cases} \frac{y-3}{x-2}=a+1, \\ (a^2-1)x+(a-1)y=30 \end{cases}$ 无解，

即$\begin{cases} y-3=(a+1)(x-2), & ① \\ (a^2-1)x+(a-1)y=30, & ② \\ x\neq 2 \end{cases}$无解.

由①得 $y=(a+1)(x-2)+3$ ③,将③代入②并整理得 $2(a^2-1)x=2a^2-3a+31$. ④

当 $a^2-1=0$ 即 $a=\pm1$ 时,方程④无解;

当 $a^2-1\neq0$ 时,$x=\dfrac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}$,令$\dfrac{2a^2-3a+31}{2(a^2-1)}=2$,解得 $a=-5$ 或$\dfrac{7}{2}$.

故所求 a 的值为±1, -5, $\dfrac{7}{2}$.

四、难点攻略

例 1 已知三个方程$\begin{cases} x^2-mx+4=0, \\ x^2-(m-1)x+16=0, \\ x^2+2mx+3m+10=0 \end{cases}$中至少有一个方程有实根,求实数 m 的取值范围.

方法储备:本题从正面理解"至少"可得 3 类:① 只有一个方程有实根,有三种情况;② 只有两个方程有实根,有三种情况;③ 三个方程都有实根,有一种情况,一一解来问题显得繁杂.从反面理解,三个方程都没有实根,只有此一种情况,而它的反面就是至少有一个方程有实根的种种情况,这就提醒我们可以运用补集的思想方法.即求出三个方程都没有实根时 m 的取值范围,再求它相对于 $\mathbf{R}$ 的补集.从中可以看出正与逆必是事物矛盾的双方,反映在数学解题中主要体现于解题的思维进程上.如通常把综合法的解题方法称为"正",而把分析法、反证法的解题方法称为"逆".同样,一般问题的解决过程,总是先从正面入手,进行思考,这是解题的一种基本思想方法.但有时会遇到从正面入手不易解决,这时应从问题的反面去思考,也就是"正难则反".而补集法正是"正难则反"的体现,用这种方法可以收到意想不到的功效,因为这种"逆"恰好弥补了"正"的不足.

解:从反面看,若三个方程都没有实根,则

$$\begin{cases} \Delta_1=m^2-16<0, \\ \Delta_2=(m-1)^2-64=(m-9)(m+7)<0, \\ \Delta_3=4m^2-4(3m+10)=4(m-5)(m+2)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<m<4, \\ -7<m<9, \\ -2<m<5 \end{cases} \Rightarrow -2<m<4.$$

即 $m\in(-2,4)$ 时三个方程都没有实根.

再求补集得三个方程至少有一个方程有实根时,$m\in(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$.

例 2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant0\}$, $B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$.若$A\cup B=A$,求实数 m 的取值范围.

方法储备:考虑到"空集是任何集合的子集"这一性质,因此需要分 $B=\varnothing$ 与 $B\neq\varnothing$ 两种情况,分别确定 m 的取值范围.这里运用分类讨论的思想,对讨论的问题进行合理、自然、"层次"清晰、明确地划分,做到不重不漏.

解:因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$,又 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant0\}=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant5\}$.

(1) 若 $B=\varnothing$,则 $m+1>2m-1$,即 $m<2$,此时总有 $A\cup B=A$,故 $m<2$;

(2) 若 $B\neq\varnothing$,则 $m+1\leqslant 2m-1$,即 $m\geqslant2$.

由 $B\subseteq A$,得$\begin{cases} -2\leqslant m+1, \\ 2m-1\leqslant5 \end{cases}\Rightarrow -3\leqslant m\leqslant3$,所以 $2\leqslant m\leqslant3$.

综合(1)(2)知,m 的取值范围是$(-\infty,3]$.

例 3 已知集合 $A=\{k\mid (k+6)x^2-2kx+3k=0$ 有两个正数根$\}$,集合 $B=\{x\mid |x-a|\leqslant1\}$.

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $B\subsetneqq A$,求实数 a 的取值范围.

方法储备:本例涉及方程和不等式的思想及化归思想,首先求出集合 A 和 B,然后根据条件确定实数 a 的取值范围.

解:由$\begin{cases} k+6\neq0, \\ \Delta=4k^2-4(k+6)\cdot3k\geqslant0, \\ x_1+x_2=\dfrac{2k}{k+6}>0, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3k}{k+6}>0 \end{cases}\Rightarrow k\in[-9,-6)$.

所以 $A=[-9,-6)$, $B=[a-1,a+1]$.

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$,则 $a+1<-9$ 或 $a-1\geqslant-6$,所以 $a\in(-\infty,-10)\cup[-5,+\infty)$.

(2) 若 $B\subsetneqq A$,则$\begin{cases} a-1\geqslant-9, \\ a+1<-6. \end{cases}$所以 $a\in[-8,-7)$.

五、易错警示

例 1 已知全集U及它的子集A, B, C满足$A\cup B=A\cup C$，那么下面结论：

(1) $B=C$;(2) $A\cap B=A\cap C$;(3) $A\cap(\complement_U B)=A\cap(\complement_U C)$，正确的个数为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

错解：因为$A\cup B=A\cup C$，所以$B=C$，因而(1)正确.

因为$B=C$，所以$A\cap B=A\cap C$，因而(2)正确.

因为$B=C$，所以$\complement_U B=\complement_U C$，因此$A\cap(\complement_U B)=A\cap(\complement_U C)$，因而(3)正确，故选 A.

评析及正解：上述解法中对于(1)的判断，因为$A\cup B=A\cup C$，所以$B=C$，是类比了实数的加法($a+b=a+c$，则$b=c$). 把实数的加法性质照搬到集合中来，是错误的. 由于对(1)的判断失误，又造成对另两个判断的失误，可运用举反例的方法说明这三个结论都是错误的.

设$U=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$, $C=\{2, 3, 4\}$，满足$A\cup B=A\cup C$.

(1) 由于$B\neq C$，可知结论(1) $B=C$不正确；

(2) $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\{2\}$，故结论(2) $A\cap B=A\cap C$不正确；

(3) $\complement_U B=\{1, 2\}$, $\complement_U C=\{1\}$, $A\cap\complement_U B=\{1, 2\}$, $A\cap\complement_U C=\{1\}$，则$A\cap(\complement_U B)\neq A\cap(\complement_U C)$，故结论(3) $A\cap(\complement_U B)=A\cap(\complement_U C)$不正确，故选 D.

例 2 已知$T=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $M=\{x\mid mx-2=0\}$，且$T\cup M=T$，求由实数m组成的集合C.

错解：由$x^2-3x+2=0$，得$x=1$或$x=2$，因为$T\cup M=T$，所以$x=1\in M$，或$x=2\in M$.

当$x=1$时，$m=2$；当$x=2$时，$m=1$，因此$C=\{1, 2\}$.

评析及正解：上述解答只注意了M为非空集合. 实际上，$M=\varnothing$时仍满足$A\cup M=T$. 即当$m=0$时，$M=\varnothing$，符合题设，应补上.

所以由$x^2-3x+2=0$，得$x=1$或$x=2$，因为$T\cup M=T$，所以$M\subseteq T$. 因此$M=\varnothing$，或$x=1\in M$，或$x=2\in M$. 当$x=1$时，$m=2$；当$x=2$时，$m=1$，另外，当$m=0$时，$M=\varnothing$，因此$C=\{0, 1, 2\}$.

六、真题导读 & 考题预测

例 1 已知全集$U=A\cup B$中有m个元素，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$中有$n$个元素，若$A\cap B$非空，则$A\cap B$的元素个数为(　　).

A. mn　　B. $m+n$　　C. $n-m$　　D. $m-n$

解法导析：根据补集定义，本题借助文氏图(Venn 图)，可直观地求出全集. 这类问题，当集合中元素个数较少时，可借助 Venn 图；当集合中元素无限时，可借助数轴，利用数轴分析法求解，在求解过程中要注意交、并、补集关系的应用.

解：如图 1-3 所示，$U=A\cup B$中有m个元素，因为$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$中有$n$个元素，所以$A\cap B$中有$m-n$个元素，故选 D.

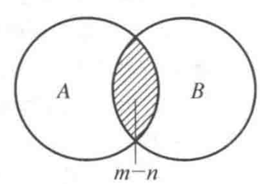


图 1-3

例 2 设集合$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$, $B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+(a^2-5)=0\}$.

(1) 若$A\cap B=\{2\}$，求实数a的值；

(2) 若$A\cup B=A$，求实数a的取值范围；

(3) 若$U=\mathbf{R}$, $A\cap(\complement_U B)=A$，求实数a的取值范围.

解法导析：集合的基本运算是高考命题的一个指向，解决此类问题一是要从研究集合中元素的构成入手；二是要对可以化简的集合先化简再研究其关系并进行运算，这样可以使问题变得简单明了，易于解决；三是要注意数形结合思想的应用与分类整合思想的应用，本例对分类讨论的要求颇高，特别要关注对空集的讨论.

解：由$x^2-3x+2=0$得$x=1$或$x=2$，故集合$A=\{1, 2\}$.

(1) 因为$A\cap B=\{2\}$，所以$2\in B$，代入B中的方程，得$a^2+4a+3=0$，所以$a=-1$或$a=-3$，

当$a=-1$时，$B=\{x\mid x^2-4=0\}=\{-2, 2\}$，满足条件；

当$a=-3$时，$B=\{x^2-4x+4=0\}=\{2\}$，满足条件.

综上，a的值为-1或-3.

(2) 对于集合B, $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-5)=8(a+3)$，因为$A\cup B=A$，所以$B\subseteq A$.

① 当$\Delta<0$，即$a<-3$时，$B=\varnothing$，满足条件；

② 当$\Delta=0$，即$a=-3$时，$B=\{2\}$，满足条件；

③ 当$\Delta>0$，即$a>-3$时，$B=A=\{1, 2\}$才能满足条件，则由根与系数的关系得$\begin{cases}1+2=-2(a+1),\\1\times 2=a^2-5,\end{cases}$即$\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2},\\a^2=7,\end{cases}$矛盾.

综上，a 的取值范围是 $a\leqslant -3$.

(3) 因为 $A\cap(\complement_U B)=A$，所以 $A\subseteq \complement_U B$，所以 $A\cap B=\varnothing$.

① 若 $B=\varnothing$，则 $\Delta<0\Rightarrow a<-3$ 适合；

② 若 $B\neq\varnothing$，则 $a=-3$ 时，$B=\{2\}$，$A\cap B=\{2\}$，不合题意；$a>-3$ 时，需 $1\notin B$ 且 $2\notin B$.

将 $x=2$ 代入 B 的方程得 $a=-1$ 或 $a=-3$(舍去)；

将 $x=1$ 代入 B 的方程得 $a^2+2a-2=0\Rightarrow a=-1\pm\sqrt{3}$. 所以 $a\neq -1$ 且 $a\neq -3$ 且 $a\neq -1\pm\sqrt{3}$.

综上，a 的取值范围是 $a<-3$ 或 $-3<a<-1-\sqrt{3}$ 或 $-1-\sqrt{3}<a<-1$ 或 $-1<a<-1+\sqrt{3}$ 或 $a>-1+\sqrt{3}$.

例 3 对任意两个非零的平面向量$\vec{\alpha}$和$\vec{\beta}$，定义 $\vec{\alpha}\circ\vec{\beta}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}}$. 若平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|>0$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，且$\vec{a}\circ\vec{b}$ 和$\vec{b}\circ\vec{a}$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$ 中，则 $\vec{a}\circ\vec{b}=($　　$)$.

A. $\dfrac{1}{2}$　　　B. 1　　　C. $\dfrac{3}{2}$　　　D. $\dfrac{5}{2}$

解法导析： 本例是与集合有关的新概念题，属于信息迁移类问题，它是化归思想的具体运用. 正确理解新定义及 $\vec{a}\circ\vec{b}$ 和$\vec{b}\circ\vec{a}$ 都在集合 $\left\{\dfrac{n}{2}\,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$ 中是解题的关键，还要注意 $n\in\mathbf{Z}$. 可见在新的情境下完成某种推理的证明是集合命题的一个新方向，常见的有定义新概念、新公式、新运算、新法则等类型.

解： 根据题中给定的两个向量的新运算可知 $\vec{a}\circ\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}=\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}$，$\vec{b}\circ\vec{a}=\dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}$，

又由 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，可得$\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<1$，

由 $|\vec{a}|\geqslant|\vec{b}|>0$ 可得 $0<\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\leqslant 1$，于是 $0<\dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}<1$，即$\vec{b}\circ\vec{a}\in(0,1)$，

又$\vec{b}\circ\vec{a}\in\left\{\dfrac{n}{2}\,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$. 所以$\dfrac{|\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$，即 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|\cos\theta$，　①

同理 $\dfrac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 将①代入后得 $2\cos^2\theta>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又$\vec{a}\circ\vec{b}\in\left\{\dfrac{n}{2}\,\middle|\, n\in\mathbf{Z}\right\}$.

所以 $\vec{a}\circ\vec{b}=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{n}{2}(n\in\mathbf{Z})$，又 $1<\dfrac{n}{2}<2$，故 $n=3$.

所以 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$|\vec{a}|=\sqrt{3}|\vec{b}|$. 所以$\vec{a}\circ\vec{b}=\dfrac{\sqrt{3}|\vec{b}|}{|\vec{b}|}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$，故选 C.

第二节　命题与充要条件

一、知识梳理

1. 四种命题的概念

原命题：若 p，则 q；逆命题：若 q，则 p；否命题：若$\overline{p}$，则$\overline{q}$；逆否命题：若$\overline{q}$，则$\overline{p}$.

2. 命题的真假判断：命题的真假判断，既可直接判断，也可转化为逆否命题后判断. 判断一个命题为真命题，需要给出证明；判断一个命题为假命题，一般只需举反例，或者用反证法进行证明.

3. 充要条件的概念

(1) 充分条件：若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件.

(2) 必要条件：若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要条件.

(3) 充要条件：若既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，记作 $p\Leftrightarrow q$，则 p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件.

4. 充要条件的证明

证明过程必须是“双向”的，既要由条件推出结论(充分性)，又要由结论推出条件(必要性).

5. 充分条件、必要条件常用判断法

(1) 定义法：判断 p 是 q 的什么条件，实质是判断 $p\Rightarrow q$ 或 $q\Rightarrow p$ 是否成立.

(2) 转换法：当给出的命题的充要条件不易判定时，可对命题进行等价转换，如改用其逆否命题进行判断.

(3) 集合法：在命题的条件和结论间的关系判断有困难时，可从集合的角度考虑，记条件 p、q 对应的集合分别为 A、B，则：

若 $A \subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件；

若 $A \subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

若 $A \supseteq B$，则 p 是 q 的必要条件；

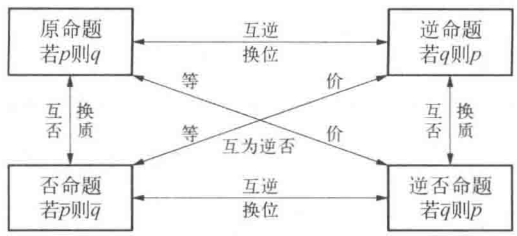
若 $A \supsetneqq B$，则 p 是 q 的必要非充分条件；

若 $A = B$，则 p 是 q 的充要条件；

若 $A \not\subseteq B$，且 $B \not\subseteq A$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

二、学法点拨

1. 四种命题反映出命题之间的内在联系，要注意结合实际问题理解其关系——特别是两种等价关系的产生过程，了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义，正确表达相关数学内容：



2. 理解推出关系及命题证明的意义，会用反证法证明简单的数学命题，其一般步骤为

① 反设：假设命题的结论不成立，即假设结论的反面成立；

② 归谬：从这个假设出发，经过推理论证，得出矛盾；

③ 结论：由矛盾判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

3. 理解充分条件、必要条件与充要条件的含义，并能用来判别一些简单的数学问题的充分性与必要性. 有关充要条件探求问题中，易犯的解题错误是用“必要条件(或充分条件)”去替代“充要条件”，所以要深刻理解充要条件的定义，即要准确把握“若 p 则 q”的命题中条件和结论的逻辑关系，提高数学判断的能力.

三、例题精讲

例 1 命题甲：数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列；命题乙：数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = an^2 + bn\ (n \in \mathbf{N}^*)$ $(a, b$ 为常数，$a \neq 0)$，判断这两个命题是否等价，并说明理由.

策略点击： 两命题等价，即可以互相推出，也即充要条件的证明，要证明命题 A 与命题 B 等价，既要从 A 推出 B，又要从 B 推出 A，两个方面都要进行论证.

解： 等价. 理由如下：

因为数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设它的公差为 d，首项为 a_1，则 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

因为 $d \neq 0$，a_1 和 d 是确定的常数，

所以 $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{d}{2}\right)n$，其中 $a = \dfrac{d}{2}$，$b = a_1 - \dfrac{d}{2}(d \neq 0)$，故 S_n 是一个关于 n 的二次函数，且常数项为 0.

反之，若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = an^2 + bn\ (n \in \mathbf{N}^*,\ a \neq 0)$.

当 $n = 1$ 时，$a_1 = S_1 = a + b$；

当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1) = 2an - a + b$.

当 $n = 1$ 时，$a_1 = a + b$，所以 $a_n = 2an - a + b\ (n \in \mathbf{N}^*)$.

$a_{n+1} - a_n = 2a(n+1) - a + b - 2an + a - b = 2a \neq 0$，$n \in \mathbf{N}^*$.

所以数列 $\{a_n\}$ 为公差不为零的等差数列.

例 2 (1) 已知 A：$\left|1 - \dfrac{x-1}{3}\right| \leqslant 2$，$B$：$x^2 - 2x + 1 - m^2 \leqslant 0(m > 0)$. 若 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 是 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 的充分不必要条件，求实数 m 的取值范围；

(2) 设有两个命题：①“关于 x 的不等式 $x^2 + (a-1)x + a^2 > 0$ 的解集是 $\mathbf{R}$”；②“函数 $f(x) = (2a^2 + a + 1)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数”，若命题①和②中至少有一个是真命题，求实数 a 的取值范围.

策略点击： 对于(1)，解不等式 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leqslant 0$，应注意式子的特点：$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$，就很容易求解；$\complement_{\mathbf{R}}A$ 是 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 的充分不必要条件，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A \subsetneqq \complement_{\mathbf{R}}B$，由于 $\complement_{\mathbf{R}}A \Rightarrow \complement_{\mathbf{R}}B$ 的逆否命题是：$B \Rightarrow A$，所以本题也可以由 B 是 A 的充分不必要条件求 m 的取值范围；由 $\complement_{\mathbf{R}}A \subsetneqq \complement_{\mathbf{R}}B$ 布列不等式，再借助数轴寻求 m 的取值范围是一个好方法. 对于(2)，命题①和②中至少有一个是真命题时 a 的取值范围是命题①和②均为假时 a 的取值范围的补集.

解：(1) 解法一：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2\Leftrightarrow -2\leqslant 1-\dfrac{x-1}{3}\leqslant 2\Leftrightarrow -3\leqslant -\dfrac{x-1}{3}\leqslant 1\Leftrightarrow -3\leqslant x-1\leqslant 9\Leftrightarrow -2\leqslant x\leqslant 10$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x<-2$ 或 $x>10\}$.

$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0\Leftrightarrow (x-1)^2-m^2\leqslant 0$，

因为 $m>0$，所以 $-m\leqslant x-1\leqslant m\Leftrightarrow 1-m\leqslant x\leqslant m+1$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x\mid x<1-m$ 或 $x>m+1\}$.

因为 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 是 $\complement_{\mathbf{R}}B$ 的充分不必要条件，又因为 $m>0$，把不等式的解表示在数轴上，如图 1-4 所示，

所以 $\begin{cases} m>0, \\ 1-m\geqslant -2, \\ 1+m\leqslant 10, \end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$.

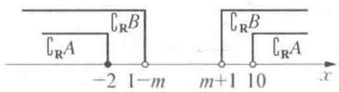


图 1-4

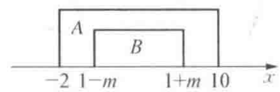


图 1-5

解法二：同解法一，得 $A=[-2,\ 10]$，$B=[1-m,\ 1+m]$.

若 $B\Rightarrow A$，则有 $B\subseteq A$，如图 1-5 所示，

所以 $\begin{cases} 1-m\geqslant -2, \\ 1+m\leqslant 10, \\ m>0, \end{cases}$ 解得 $0<m\leqslant 3$.

(2) 设命题 ① 为假，则 $(a-1)^2-4a^2\geqslant 0\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{3}$；

再设命题 ② 为假，则 $2a^2+a+1\leqslant 0$ 或 $2a^2+a+1\geqslant 1\Leftrightarrow a\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 或 $a\geqslant 0$.

若命题 ①② 同时为假，则 $-1\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}$ 或 $0\leqslant a\leqslant \dfrac{1}{3}$.

从而命题 ①② 中至少有一个为真时，a 的取值范围是 $a<-1$ 或 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 或 $a>\dfrac{1}{3}$.

例 3 (1) 已知函数 $f(x)=|x^2-2x-3|$，则关于 x 的方程 $mf^2(x)+2mf(x)+m-25=0$ 有四个不同实数解的充要条件是(　　).

A. $1<m<25$　　B. $m\geqslant 25$ 或 $m\leqslant 1$　　C. $1\leqslant m\leqslant 25$　　D. $0\leqslant m\leqslant 4$

(2) 已知集合 $A=\left\{y\,\middle|\,y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}+1,\ x\in(-1,\ 2)\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,|x-m^2|\geqslant \dfrac{1}{4}\right\}$.

命题 p：$x\in A$，命题 q：$x\in B$，并且命题 p 是命题 q 的充分条件，实数 m 的取值范围是________.

策略点击：对于(1)，可根据选项采用排除与推理相结合的方法. 对于(2)，先化简集合，再进行两集合关系的讨论.

解：(1) $m=0$ 时显然不成立，排除 B、D.

$m[f^2(x)+2f(x)+1]=25$，$[f(x)+1]^2=\dfrac{25}{m}$，$f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{m}}-1\in(0,\ 4)$，所以 $1<\dfrac{5}{\sqrt{m}}<5$，

所以 $1<m<25$，故选 A.

(2) 先化简集合 A，由 $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}+1$ 得 $y=\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]^2-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1$.

令 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$，$t\in\left(\dfrac{1}{4},\ 2\right)$，则有 $y=\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{16}$，$t\in\left(\dfrac{1}{4},\ 2\right)$，

所以 $y\in\left[\dfrac{7}{16},\ 2\right)$，所以 $A=\left\{y\,\middle|\,\dfrac{7}{16}\leqslant y<2\right\}$.

再化简集合 B，由 $|x-m^2|\geqslant \dfrac{1}{4}$ 解得 $x\leqslant m^2-\dfrac{1}{4}$ 或 $x\geqslant m^2+\dfrac{1}{4}$.

所以 $B=\left\{x\,\middle|\,x\leqslant m^2-\dfrac{1}{4}\text{ 或 }x\geqslant m^2+\dfrac{1}{4}\right\}$.

因为命题 p 是命题 q 的充分条件，所以 $A\subseteq B$，所以 $2\leqslant m^2-\dfrac{1}{4}$ 或 $m^2+\dfrac{1}{4}\leqslant \dfrac{7}{16}$.

解得实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},\ +\infty\right)$.

例 4 (1) 求关于 x 的方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$ 的两个实根均大于 1 的充要条件；