

化工设备设计参考资料

化工及炼油系统中塔类设备的
自振特性计算

中国科学院工程力学研究所 北京炼油设计研究院

化学工业部设备设计技术中心站

一 序 言

化工、石油系统中的处理塔，是属于伸臂弯曲梁型的高塔，在地震荷载及风荷载等动力荷载作用下，首先需求出其自振特性，而在文献〔1〕中我们已讨论过储液罐等剪切型结构的自振特性，而分馏塔这一类高柔的弯曲型结构的自振特性计算问题在国内外文献中〔2〕〔3〕〔4〕虽有不少讨论，但这些研究都是将高塔作为理想伸臂梁，魏赫曼〔2〕采用集中质量法将伸臂梁简化为单质点振动，而美国规范〔3〕则简单地采用等截面梁公式，我国多数设计单位过去沿用魏赫曼的公式。实际上这类高塔在正常运转时内部介质在不断运动，塔的质量有变化，而且分布也不均匀；此外塔内设塔盘及其他附件，塔外有管边等与其他结构相联系，其刚度很难精确标出，不少塔还处于高温、高压作用，材料性能与常温常压有所不同，因此按理想弹性梁公式计算自振周期是否符合实际情况有待研究，为此，我们从全国各化工、石油企业选了一百多个有代表性的高塔进行自振特性测量，本文就是对这些实测结果进行统计分析，对于直接放在基础上的塔（简称落地塔），放在钢筋混凝土框架上的塔（简称框架塔）以及相互之间有拉结的塔（简称群塔）分别提出周期的简化计算公式，并讨论了基础转动（即地基软硬）对自振周期之影响问题，文中并简单地评述了现有国内外计算公式。

二、落 地 塔

落地塔是最简单的一种塔，可视为下端固定上端自由的悬臂梁，对于等断面塔（图1），基本周期 T 的公式〔5〕为：

$$T = \frac{2\pi}{3.515} \sqrt{\frac{A\gamma H^3}{EJg}} = 1.79 \sqrt{\frac{WH^3}{EJg}} \quad (1)$$

式中：

A 为塔体断面面积，对薄壁圆环断面为：

$$A = \pi D t \quad (\text{米}^2);$$

D 为塔直径 (米);
 t 为塔壁厚 (米);
 H 为梁高 (米);
 E 为塔体弹性模量, 三号钢为 2.1×10^7
 (吨/米²);

g 为重力加速度为 9.8 (米/秒²);

J 为塔断面惯性矩, 对薄壁圆环断面为:

$$J = \frac{\pi}{8} D^3 t = \frac{A}{8} D^2 \text{ (米}^4\text{)};$$

γ 为塔的体荷重, 即塔操作重 W 除以塔臂体积

$$\text{即 } \gamma = \frac{W}{\pi D t H}$$

对于钢塔(1)式可化为(2)式和(3)式:

$$T = 3.53 \times 10^{-4} \sqrt{\gamma} \cdot \frac{H^2}{D} \quad (2)$$

$$T = 1.97 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{WH^3}{D^3 t}} \approx 2 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{WH^3}{D^3 t}} \quad (3)$$

从(2)式可以看出周期 T 主要与 $\frac{H^2}{D}$ 成正比, 与体荷重 γ 的平方根成正比。对于一般的塔, 重量随反应过程在变化, 精确值不易确定, 但在正常运转时, 重量变化幅度不大, 而且重量变化一倍, 周期只变化 41%, 另一方面大部分塔操作重与塔直径、高度有一定近似规律, 因此可以采用 $\frac{H^2}{D}$ 参数统计的公式计标 T。

我们选了 60 个数据较全、资料较可信的塔按 $\frac{H^2}{D}$ 参数进行统计, 其结果见表一。

表一中包括变断面塔 (直径 D 沿高度是变化的), 为简化起见这种塔也和等断面塔一起统计, 其折标直径 D 取全高的平均值, 对有 n

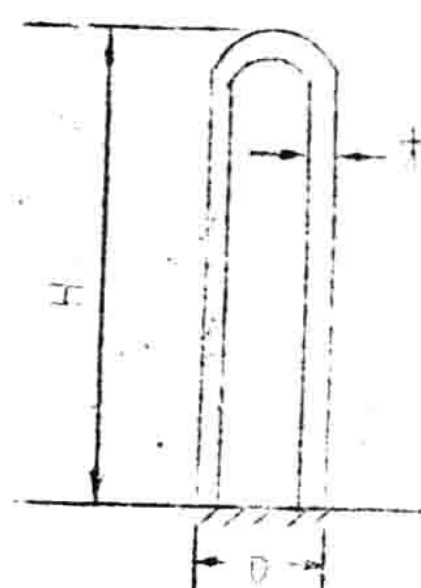


图 1 落地塔筒图

段直径变化的塔，表中折标直径 D 取为：

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n D_i H_i}{H'} \quad (4)$$

式中 D_i 为第 i 段直径； H_i 为相应高度； H' 为塔体全高。

这种处理的误差情况见附录一。

表一中之 H 分两种情况：当为混凝土实心圆墩基础时， H 为塔体高。当为混凝土圆筒基础时， H 为塔体高加圆筒基础高。

根据表一作出图 2，从图 2 及公式(2)可以看出，周期 T 基本上与 $\frac{H^2}{D}$ 成线性关系，此直线用下列方程表示：

$$T = a + b \left(\frac{H^2}{D} \right)$$

由最小二乘法使各法误差平方和为最小的原理求出 a 与 b ：

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} = 0.34$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n x_i^2} = 0.00087$$

式中： x_i 为各测量点子对应的横座标， $\frac{H^2}{D}$ 。

y_i 为各测量点子对应的纵座标， T 。

n 为点子总数，由表一知 $n = 60$ 。

$$\therefore T = 0.34 + 0.00087 \frac{H^2}{D} \quad (5)$$

设 y_i 为实测周期， y'_i 为(5)式的计标周期，二者的偏差为： $d_i = y_i - y'_i$ ，不难求得(5)式的或然误差 $\{6\} \epsilon_p = 0.6745 \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n-2}} = 0.073$ 。

从表一标出误差落在 ± 0.073 范围内的点子占47%，按偶然误差定义，这一比例应占50%，二者基本接近。

实测值相对于计算值的误差百分比为 $\frac{d_i}{y'_i}$ ，总的平均相对误差

$$\frac{\sum_{i=1}^n |d_i / y'_i|}{n} = 13.8\%$$

考虑到塔体刚度及质量本身有不小误差，上述误差还是工程上许可的。

落地塔实测周期值按 $\frac{H^2}{D}$ 参数统计表

表一

序号	名称	高度 H (米)	塔外径 D (米)	$\frac{H^2}{D}$ (米)	实测周期 T (秒)	周期误差 $\pm d$ (秒)
1	某厂稳定塔	32.2	2.236	464	0.81	0.07
2	某厂蒸馏分馏塔	28.8	2.828	293	0.66	0.065
3	某厂酚精制抽提塔	25.82	2.628	254	0.75	0.19
4	某厂酮苯三次蒸发塔	21.8	2.60	183	0.58	0.08
5	某厂酮苯二次蒸发汽提塔	23.58	1.73	321	0.58	-0.04
6	某厂酮苯三次蒸发汽提塔	21.8	1.48	321	0.58	-0.04
7	某厂酚精制蒸发汽提塔	33.2	1.236	893	0.92	-0.20
8	某厂酚精制干燥塔	22.5	2.628	193	0.34	-0.165
9	某厂酚精制吸收塔	27.85	1.236	628	0.91	0.025
10	某厂减压塔	34.6	5.84	205	0.57	0.05
11	某厂减压减粘分馏塔	28.5	3.62	268	0.70	0.13
12	某厂减压减粘汽提塔	13.93	1.012	192	0.57	0.065
13	某厂热裂化稳定塔	14.3	1.432	143	0.58	0.12
14	某厂热裂化轻油塔	20.19	2.84	143	0.36	-0.10
15	某厂热裂化重油塔	21.35	2.44	372	0.50	-0.16
16	某厂热裂化稳定塔	23.53	1.636	338	0.79	0.16
17	某厂热裂化二级吸收塔	15.96	1.024	248	0.65	0.095
18	某厂迭合塔-1	23.0	0.836	578	0.77	-0.07
19	某厂重整汽提塔	39.0	2.73	557	0.83	0.01
20	某厂重整分馏塔	23.45	1.624	338	0.57	-0.06
21	某厂重整甲苯塔	34.15	1.632	713	1.00	0.04
22	某厂重整二甲苯塔	29.0	1.428	588	1.00	0.15
23	某厂重整汽提塔	23.9	1.424	400	0.63	-0.055
24	某厂重整稳定塔	22.5	1.74	291	0.57	-0.02
25	某厂重整预加氢汽提塔	21.68	1.50	300	0.50	-0.10
26	某厂减压塔	36.32	6.44	204	0.45	-0.065
27	某厂焦化柴油吸收塔	14.1	1.024	194	0.37	-0.14
28	某厂焦化吸收脱吸塔	33.87	1.53	895	1.30	0.18
29	某厂催化分馏塔	41.51	4.228	408	0.85	0.16
30	某厂重整苯塔	32.35	1.63	642	0.95	0.05

续下表

续表

序号	名 称	高 度 H (米)	塔 外 径 D (米)	$\frac{H^2}{D}$ (米)	实测周期 T (秒)	周期误差 $\pm d$ (秒)
31	某厂重整二甲苯塔	35.3	1.432	870	0.95	-0.15
32	某厂烷基化脱异辛烷塔	26.1	1.024	665	0.80	-0.115
33	某厂气体分馏一级吸收塔	23.44	1.62	340	0.75	0.115
34	某厂气体分馏稳定塔	33.63	2.04	555	0.75	-0.07
35	某厂催化分馏塔	33.61	3.83	295	0.47	-0.125
36	某厂烷基化脱异丁烷塔	43.39	2.028	930	1.27	0.12
37	某厂烷基化丙烷塔	34.92	1.044	1165	1.3	-0.05
38	某厂烷基化脱正丁烷塔	35.12	1.228	1005	1.3	0.085
39	某厂丙烷脱沥青塔-1	25.97	2.93	230	0.37	-0.17
40	某厂减压塔	36.62	6.44	208	0.36	-0.16
41	某厂迭合第二分馏塔	29.4	1.636	529	0.67	-0.13
42	某厂碳化塔	24.3	2.0	295	0.59	-0.005
43	某厂氨合成塔	14.0	0.7	278	0.53	-0.05
44	某厂铜洗塔	18.5	1.4	245	0.54	-0.01
45	某厂水洗塔	21.5	2.1	220	0.37	-0.16
46	某厂CO ₂ 吸收塔	36.0	1.6	809	0.93	-0.11
47	某厂碱液再生塔	33.5	2.2	511	0.93	0.15
48	某厂CO ₂ 吸收塔	32.2	2.1	494	0.77	0.00
49	某厂CO ₂ 再生塔	32.0	2.6	394	0.61	-0.07
50	某厂饱和热水塔	28.0	2.6	330	0.61	-0.015
51	某厂水洗塔	30.0	2.8	321	0.56	-0.06
52	某厂饱和热水塔	24.0	3.0	192	0.59	0.085
53	某厂硝酸吸收塔	24.0	11.0	52	0.39	0.00
54	某厂合成塔	15.0	0.8	278	0.67	0.09
55	某厂饱和热水塔	24.0	3.0	192	0.48	-0.025
56	某厂水洗塔	27.0	2.8	260	0.46	-0.105
57	某厂水洗塔	29.0	2.8	300	0.59	-0.01
58	某厂氨合成塔	14.9	0.8	278	0.72	0.14
59	某厂铜液塔	18.2	0.7	473	0.56	-0.19
60	某厂重整甲苯塔	35.4	1.832	685	0.97	0.035

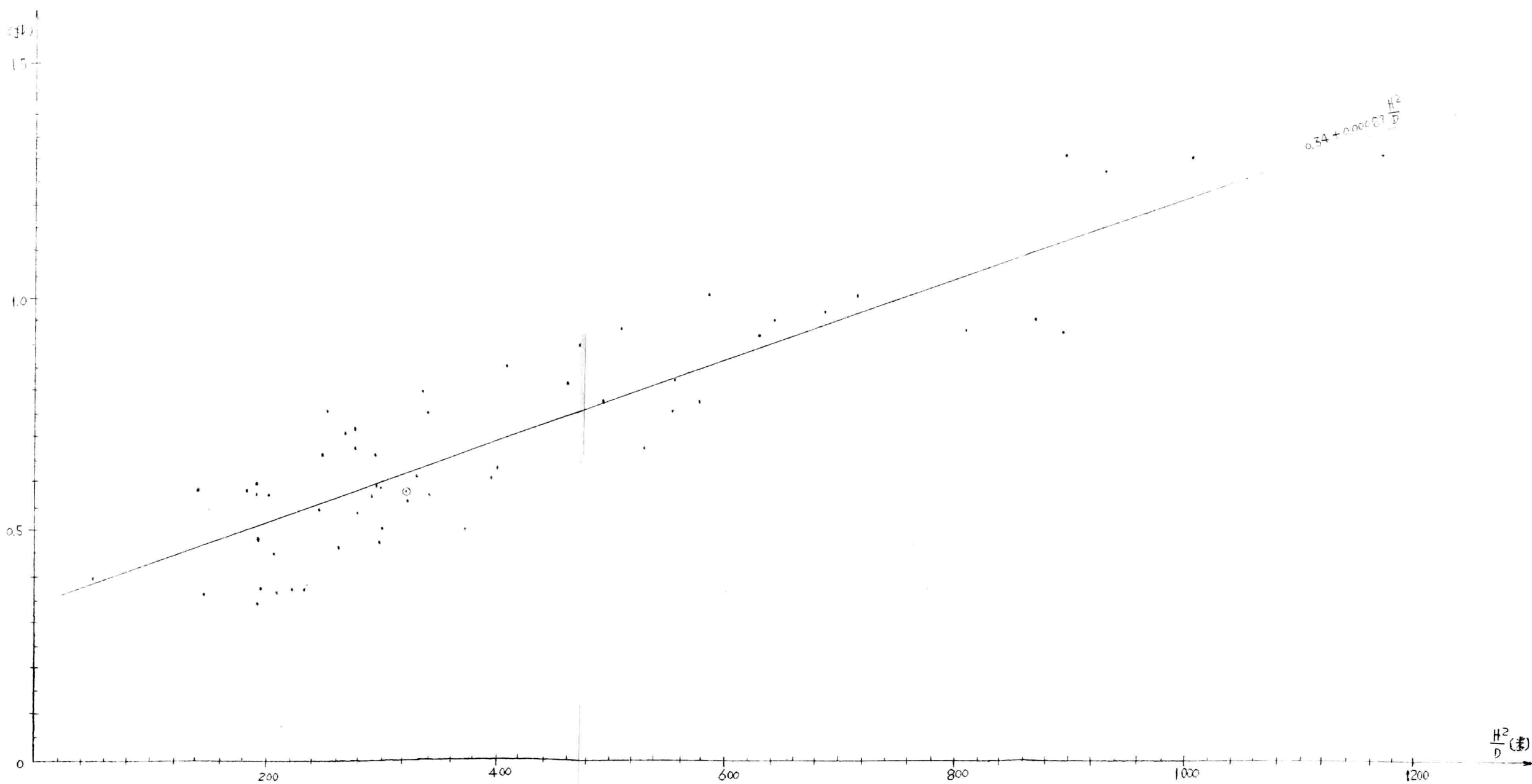


图 2 落地塔实测周期按参数 $\frac{H^2}{D}$ 统计图

但是这个公式对个别操作重较大的塔，误差可能较大，例如对于表二中的 22 号塔，按(5)式称为 0.85 秒，而实测为 1.33 秒，所以对这种塔须考虑重量的影响。

2. 在实测的几十个塔中，只有部分塔有操作重量，我们按参数 $\sqrt{\frac{WH^3}{D^3t}}$ 汇总了 27 个落地塔及 10 个框架塔的资料，列于表二。相应地绘出图 3。

表二中 D 的意义同表一，W 为塔体操作重（吨），t 为塔壁厚，对有 n 段壁厚变化的塔，其折称厚度取：

$$t = \frac{\sum_{j=1}^n t_j H_j}{H'} \quad (\text{米}) \quad (6)$$

式中 t_j 为第 j 段壁厚， H_j 为相应高度； H' 为塔体全高。

H 对落地塔意义同表一，对框架塔为塔高加框架高。

用上述同样的统计方法可以求得经验公式为：

$$T = 0.15 + 1.6 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{WH^3}{D^3t}} \quad (7)$$

(7)式的或然误差为 ± 0.064 ，落在这一范围内的点子占 46%，接近 50%，总的平均相对误差为 10%。一般情况下(7)式比(5)式适用性强一些，如 22 号塔，由(5)式称为 0.83 秒，由(7)式称为 1.46 秒，实测为 1.33 秒。

(7)式中的 0.15 实质上表示剪切变形的影响，关于圆筒型结构剪切变形的问题，我们已在文献〔7〕中讨论过了。

表二中包括了部分框架塔，其理由下一节再述。

3. 关于地基柔性对周期的影响：

在魏赫曼公式中，当塔体高度与直径 D 之比 $\frac{H}{D} < 15$ 时须考虑地基基础转动对周期的影响，也即考虑地基柔性对周期的影响，其计称方法与文献〔8〕基本一致。

魏赫曼给出的公式为〔2〕：

$$T = 1.79H \sqrt{\frac{W}{g} \left(\frac{H}{EJ} + \varphi_0 \right)} \quad (8)$$

式中 φ_0 为支座受单位弯矩引起的截面转角即 $\varphi_0 = \frac{1}{C_\varphi J_\varphi}$

C_φ 为土壤不均匀弹性压缩系数，对于中等土壤约为 4000 ~ 5000 吨/米³。

J_φ 为基础底面积惯性矩(米⁴)。

根据我们的推导，式中 φ_0 应为 $3\varphi_0$ ，即(8)式应改为：

$$T = 1.79H \sqrt{\frac{W}{g} \left(\frac{H}{EJ} + 3\varphi_0 \right)} \quad (9)$$

我们按(9)式算了三个 $H/D < 15$ 的塔，并用文献〔8〕的方法进行了校核，二者基本一致，计算结果汇总在表三中：

表三

名 称	计 算 周 期 (秒)		实测周期(秒)
	计及基础转角 φ_0	不计基础转角 φ_0	
某厂减压塔	0.83	0.4	0.45
某厂酚精制抽提塔	1.87	0.65	0.75
某厂酚精制干燥塔	1.06	0.32	0.34

从表三可以看出，计及基础转动的计算周期比实测值大二倍以上，而不考虑这一影响的计算结果比实测值稍小一些，二者基本接近，地基柔性使塔的自振周期稍有加长，但按(9)式并使用苏联规范规定的 C_φ 值得出的周期显然是不对的，同时从我们对各地区实测资料来看，地基软硬对塔的自振周期影响不大，如西北某地属硬土地基，而沿海某地属软弱地基，地基差别很大，但两地直径、高度及重量相似的塔，实测结果很接近，因此地基柔性这一因素一般情况可不考虑。

落地、框架塔实测周期值按参数 $\sqrt{\frac{WH^3}{D^3t}}$ 统计表

表二

序号	名称	高度 H (米)	塔外径 D (米)	塔壁厚 $t \times 10^{-2}$ (米)	操作重 W (吨)	$\sqrt{\frac{WH^3}{D^3t}}$ ($\sqrt{\frac{吨}{米}}$)	实测周期 T (秒)	周期误差 $\pm d$ (秒)
1	某厂蒸馏分馏塔	28.8	2.828	1.4	97	2730	0.66	0.075
2	某厂酚精制抽提塔	25.82	2.628	1.4	157	3260	0.75	0.08
3	某厂酚精制蒸汽提塔	33.2	1.236	1.8	41	6260	0.92	-0.235
4	某厂酚精制干燥塔	22.5	2.628	1.4	66	1700	0.34	-0.08
5	某厂酸精制吸收塔	27.85	1.236	1.8	35	4700	0.91	0.005
6	某厂迭合塔-I	22.0	0.836	1.8	21	4600	0.77	-0.12
7	某厂重整预分馏塔	23.45	1.624	1.2	23.6	2430	0.57	0.03
8	某厂重整甲苯塔	34.15	1.632	1.6	50.2	5350	1.0	-0.01
9	某厂减压塔	36.32	6.44	2.0	327	1710	0.45	0.025
10	某厂焦化吸收脱吸塔	33.87	1.53	1.6	51	5880	1.3	0.205
11	某厂催化分馏塔	41.51	4.228	1.4	200	4350	0.85	0.0
12	某厂烷基化脱异辛烷塔	26.1	1.024	1.2	13	4350	0.8	-0.05
13	某厂减压塔	36.62	6.44	2.0	397	1910	0.36	-0.1
14	某厂碳化塔	24.3	2.0	2.4	150	3350	0.59	-0.1
15	某厂水洗塔	21.5	2.1	3.0	65	1530	0.37	-0.025
16	某厂CO ₂ 吸收塔	36.0	1.6	3.2	70	4980	0.93	-0.02
17	某厂碱液再生塔	33.5	2.2	2.0	96.8	4130	0.93	0.12
18	某厂CO ₂ 吸收塔	32.2	2.1	2.8	70	3000	0.77	0.14
19	某厂焦化柴油吸收塔	14.1	1.024	1.2	15	1800	0.37	-0.07
20	某厂水洗塔	30	2.8	3.8	141	2140	0.56	0.06
21	某厂饱和热水塔	24	3.0	1.0	86	2100	0.59	0.1
22	某厂磺碱再生塔	37	2.4	1.0	182	8170	1.33	-0.13
23	某厂磺碱吸收塔	24	11.0	40.0	1000	1610	0.39	-0.02
24	某厂饱和热水塔	24	3.0	1.0	86	2100	0.48	-0.01
25	某厂水洗塔	27	2.8	3.8	141	1820	0.46	0.02
26	某厂水洗塔	29	2.8	3.2	155	2320	0.59	0.07
27	某厂铜液塔	18.2	0.7	6.1	29.5	2910	0.56	-0.055
28	某厂带压塔	39.02	3.824	1.2	228	4450	1.06	0.195
29	某厂带压塔	40.1	3.824	1.2	228	4700	0.8	-0.105
30	某厂带压蒸汽提塔	24.05	1.26	1.2	26.4	3920	0.74	-0.04
31	某厂带压初馏塔	31.1	3.024	1.2	116	3250	0.75	0.08
32	某厂裂化低蒸发塔	26.56	2.036	1.8	57	2640	0.65	0.08
33	某厂焦化分馏塔	28.96	3.224	1.2	136	2880	0.62	0.01
34	某厂焦化汽提塔	20.29	1.02	1.0	17	3650	0.61	-0.125
35	某厂常压精馏塔	31.2	3.024	1.2	146	3640	0.73	0.0
36	某厂常压分馏塔	40.2	3.824	1.2	184	4200	0.86	0.035
37	某厂催化反应塔	67.42	4.35	1.5	354	9400	1.82	0.16

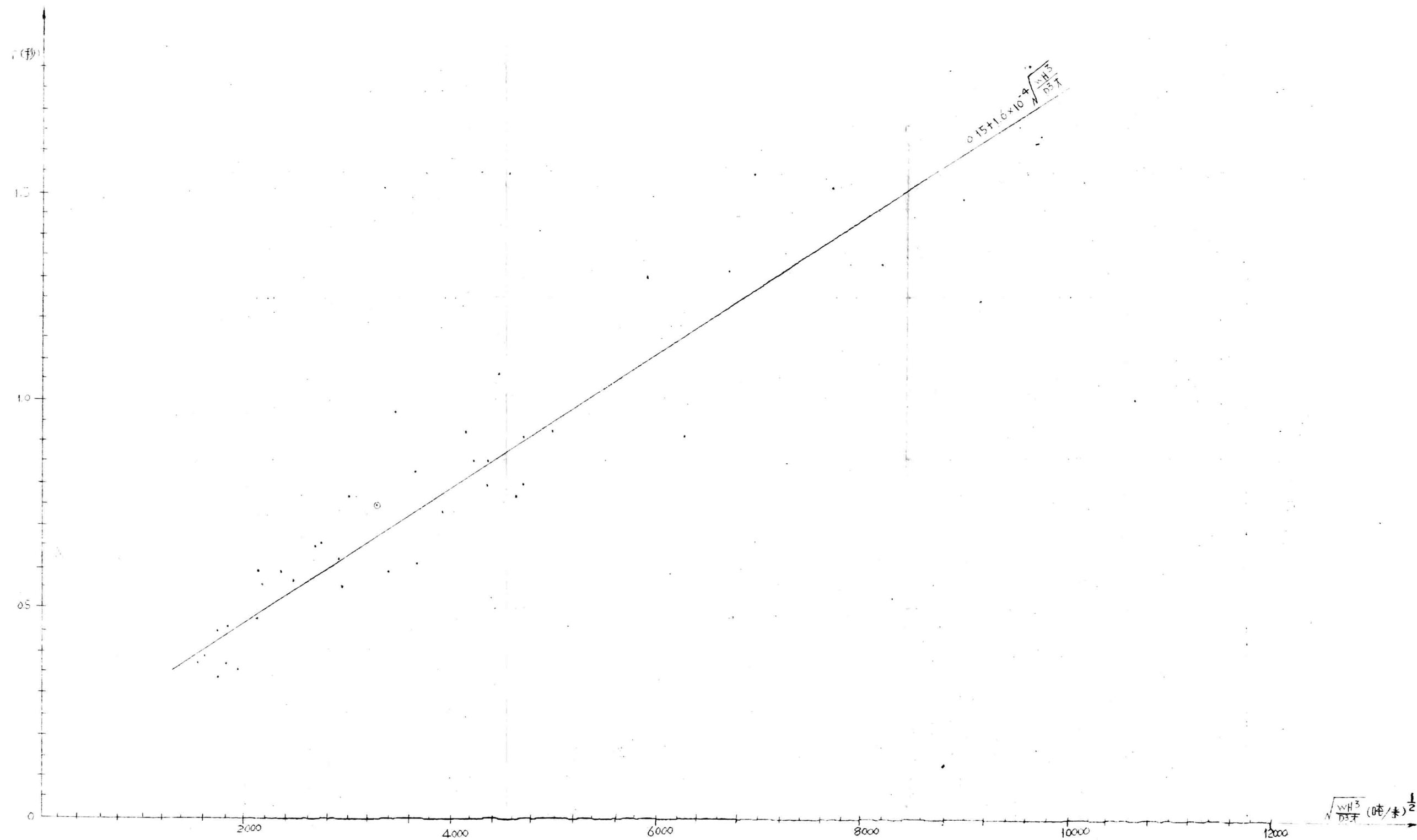


图3 落形、框架塔实测周期按参数 $N \sqrt{\frac{WH^3}{D^3 \lambda}}$ 拟合图

三、框 架 塔

框架塔由二种结构组合而成，上部是伸臂梁，下部是框架，要精确计标其自振特性是很复杂的。我们在研究冶金系统塔的自振特性时，推荐了一个简化计标方法〔9〕，根据能量等效原理〔10〕将这类复合体系分解为二个简单结构，复合结构物的周期可近似地取二个简单结构自振周期的平方和开方〔1〕，

$$\text{即 } T = \sqrt{T_c^2 + T_b^2}。$$

设框架塔的简图如图 4

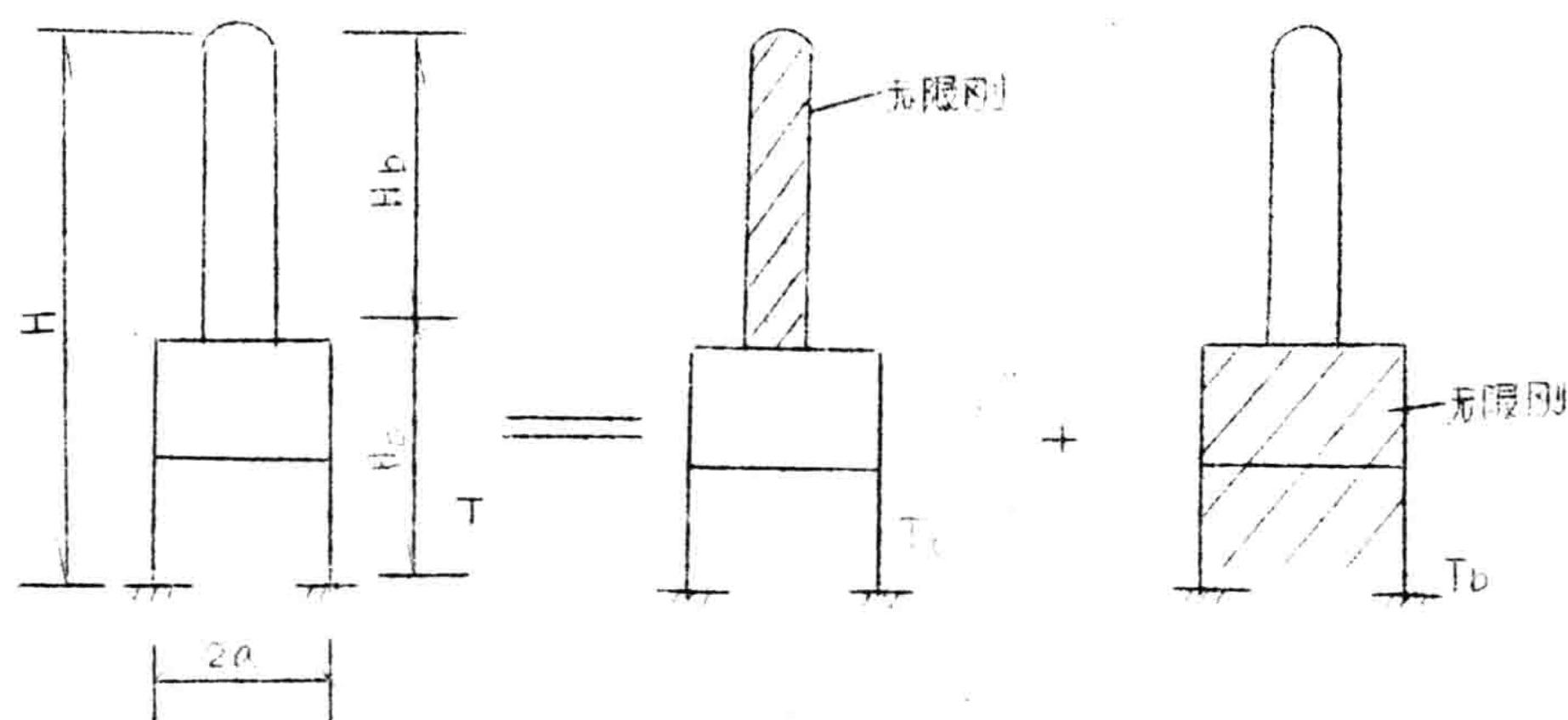


图 4 框架塔计标简图

我们推荐的近似计标方法如下：

1. 如图 4 所示，将框架塔分为二个简单结构：一是框架，上面支承一刚性塔；一是伸臂梁，即假设下部框架为无限刚。

2. 对于框架体系，上部刚性塔可以有平移及转动，为二个自由度振动体系，如图 5。

设框架的侧移刚度为 K ，转动刚度为 γ ，塔体重心 O 的线位移为 Δ ，转角为 θ ，塔体总质量为 M ，塔绕重心 O 的转动惯量为 I ，如忽略框架重量，则这个体系的振动方程为：

$$\begin{cases} M \ddot{\Delta} + K \left(\Delta - \frac{H_b}{2} \theta \right) = 0 \\ I \ddot{\theta} + \frac{H_b}{2} M \ddot{\Delta} + \gamma \theta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

(10)式中 $\ddot{\Delta}$ 及 $\ddot{\theta}$ 表示 Δ 及 θ 对时间的二次微分，因此不难求得框架体系第一周期 T_c 为：

$$T_c = \left(\frac{1}{M\gamma + KI + \frac{1}{4}KM H_b^2 - \sqrt{M\gamma + KI + \frac{1}{4}KM H_b^2 - 4M\gamma KI}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

塔体绕重心 O 的转动惯量 I 由塔的几何形状求得为：

$$I = \frac{1}{4} M \left(\frac{D^2}{2} + \frac{H_b^2}{3} \right) \quad (12)$$

框架柱的转动刚度由柱的布置形状可以求出，对于图5所示四个柱的框架，每对柱为：

$$\gamma = \frac{2E_c F_c a^2}{H_c} \quad (13a)$$

$$\text{二对柱为：} \gamma = \frac{4E_c F_c a^2}{H_c} \quad (13)$$

式中 E_c 为混凝土弹性模量。#200混凝土 $E_c = 2 \times 10^6$ 吨/米²；

F_c 为一个柱的截面积，

$2a$ 为柱子中心距，

H_c 为柱高。

框架柱侧移刚度可用一般结构力学方法求得，建议采用Сутанов法求侧移刚度较方便〔11〕。

3. 对于伸臂梁，其自振周期为：

$$T_b = 2 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{WH_b^3}{D^3 t}} \quad (13)$$

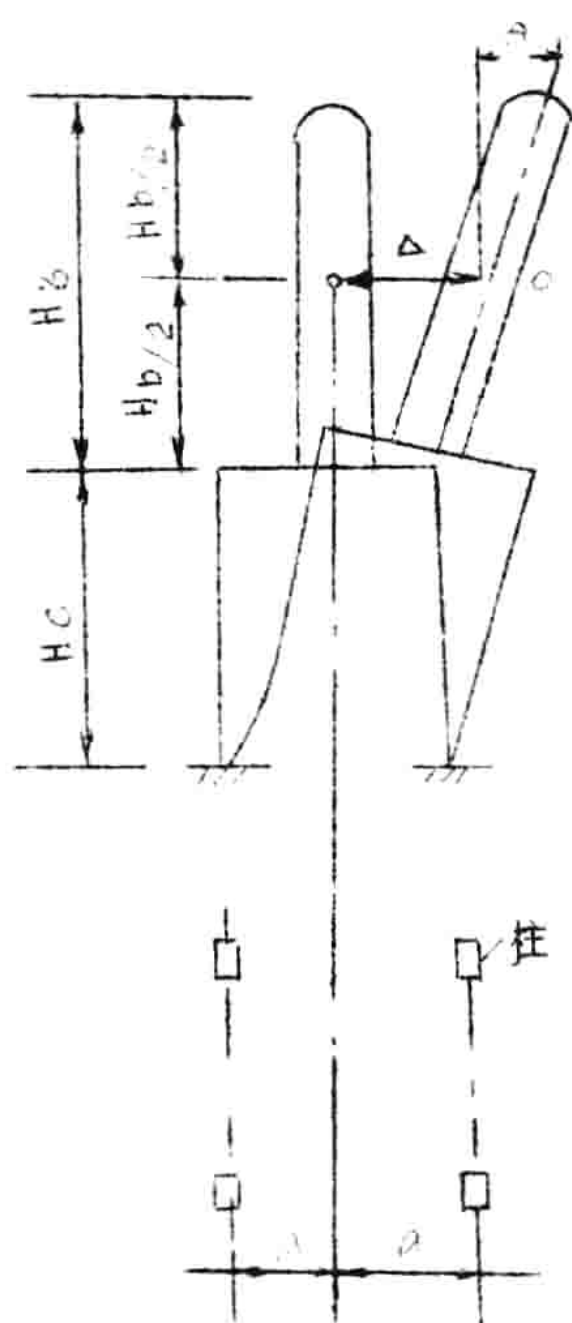


图 5 框架体系计称简图

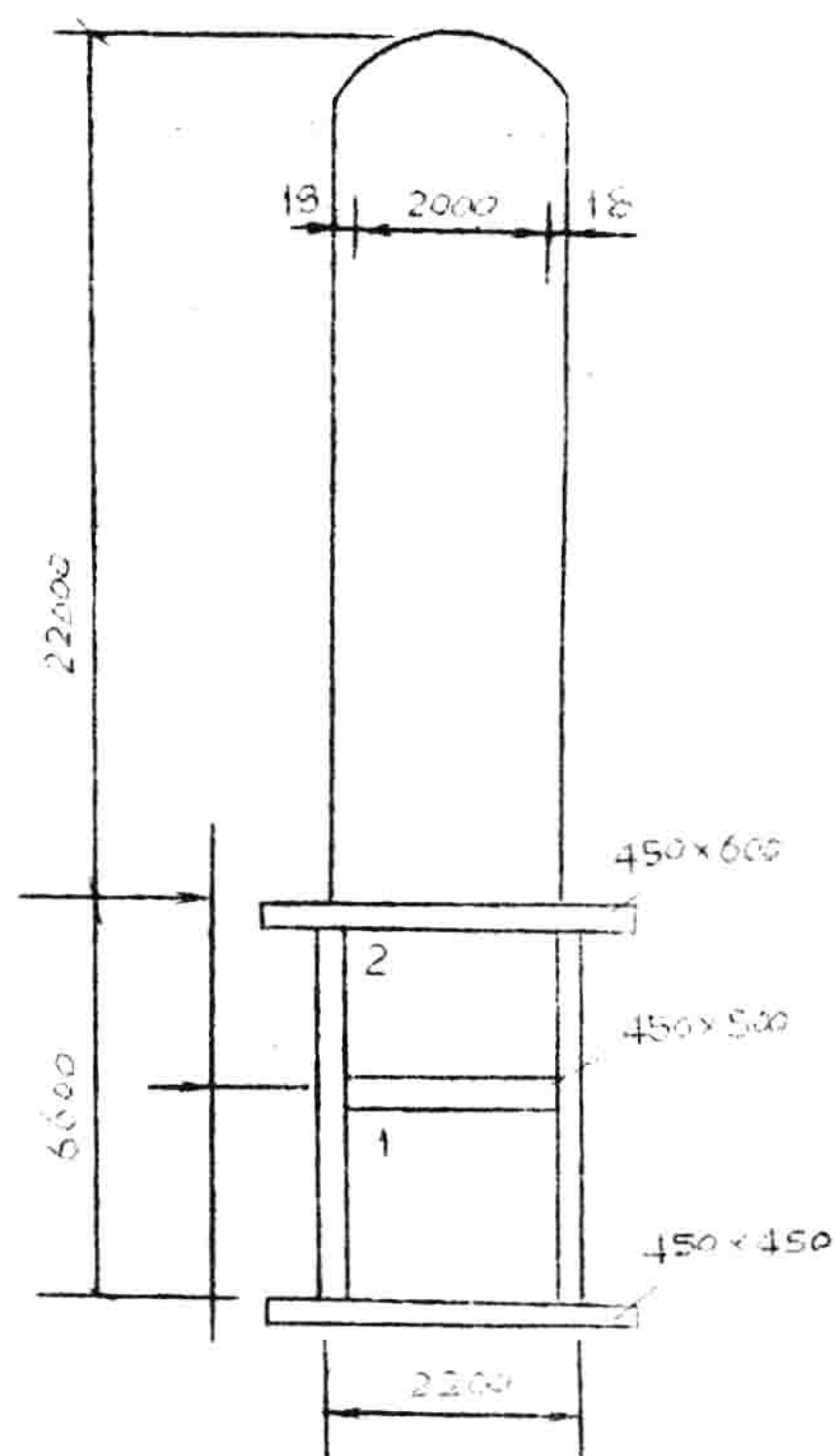


图 6 某厂裂化低压蒸发塔简图

4. 复合体系的自振周期为：

$$T = \sqrt{T_C^2 + T_b^2} \quad (14)$$

下面举一实例来说明这一方法：

实例：求某厂裂化低压蒸发塔自振周期

已知：塔体操作重 $W = 57 \text{ T}$

钢筋混凝土框架自重： 30 T

塔几何尺寸如图 6 所示

1. 求框架体系自振周期：

先用 Сигалов 法求框架侧移刚度 K ：

$$\text{柱： } J = \frac{1}{12} \times 0.45^4 = 3.42 \times 10^{-3} \text{ (米}^4\text{)}$$

$$\text{上梁： } J_2 = \frac{1}{12} \times 0.45 \times 0.6^3 = 8.1 \times 10^{-3} \text{ (米}^4\text{)}$$

$$\text{下梁： } J_1 = \frac{1}{12} \times 0.45 \times 0.5^3 = 4.68 \times 10^{-3} \text{ (米}^4\text{)}$$

将两品框架并成棉，用 CypaJOB 法求框架顶单位位移：(11)

$$\delta_{22} = \frac{1}{12} \left(F_2 + R_2 + \frac{L_2^2}{4\gamma_2} \right)$$

$$F_2 = \frac{L_1^2}{f_1} + \frac{L_2^2}{f_2}$$

$$R_2 = \frac{L^2}{4\gamma_1 + 0.33f_1}$$

$$f_1 = 4 \frac{EJ}{L_1} = 4 \times \frac{2 \times 10^6 \times 3.42 \times 10^{-3}}{3.3} = 8.29 \times 10^3$$

$$f_2 = 4 \frac{EJ}{L_2} = 8.29 \times 10^3$$

$$F_2 = 2 \times \frac{3.3^2}{8.29 \times 10^3} = 2.63 \times 10^{-3}$$

$$\gamma_1 = 2 \times \frac{EJ_1}{l_1} = 2 \times \frac{2 \times 10^6 \times 4.68 \times 10^{-3}}{2.2} = 8.5 \times 10^3$$

$$\gamma_2 = 2 \times \frac{EJ_2}{l_2} = 2 \times \frac{2 \times 10^6 \times 8.1 \times 10^{-3}}{2.2} = 14.7 \times 10^3$$

$$R_2 = \frac{6.6^2}{4 \times 8.5 \times 10^3 + 0.33 \times 8.29 \times 10^3} = 1.185 \times 10^{-3}$$

$$\frac{L_2^2}{4\gamma_2} = \frac{3.3^2}{4 \times 14.7 \times 10^3} = 1.85 \times 10^{-4}$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{12} (2.63 \times 10^{-3} + 1.185 \times 10^{-3} + 0.185 \times 10^{-3}) \\ &= 3.33 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

因此框架侧移刚度为：

$$K = \frac{1}{\delta_{22}} = \frac{1}{3.33 \times 10^{-4}} = 3 \times 10^3$$

在(11)式中塔体重量未计标框架重量，如考虑框架自重，可近似地将本框架重量按集中荷载加到塔重中，作为总重量。

$$M = \frac{(57 + \frac{1}{4} \times 30)}{9.81} = 6.57$$

由(13)式求得：

$$\gamma = \frac{4E_c F_c a^2}{H_c} = \frac{4 \times 2 \times 10^6 \times 0.45^2 \times 1.1^2}{6.6} = 2.45 \times 10^5$$

由(12)式求得塔体转动惯量为：

$$I = \frac{1}{4} \times 6.57 \left(\frac{2.018^2}{2} + \frac{20^2}{3} \right) = 2.22 \times 10^2$$

将上述数值代入(11)式得： $T_c = 0.46$ (秒)

2. 将框架视为刚体，塔体当作悬臂梁。

$$W = 57 + \frac{1}{4} \times 30 = 64.5 \text{ T}$$

由(3)式求得：

$$T_b = 2 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{64.5 \times 20^3}{2.018^3 \times 0.018}} = 2 \times 10^{-4} \sqrt{3.58 \times 10^6} \\ = 0.38 \text{ (秒)}$$

3. 求复合体系自振周期：由(14)式得：

$$T = \sqrt{T_c^2 + T_b^2} = \sqrt{0.46^2 + 0.38^2} = 0.6 \text{ (秒)}$$

该塔实测周期在二个方向稍有不同，一为 0.65 秒，一为 0.55 秒与计标结果接近。

我们用这个方法计标了十来个框架塔，汇总在表四中：