丛书主编／王后雄

考点

同步解读

高中数学 1（必修）

册主编／马春华

考点分类精讲　方法视窗导引

Kaodian
Tongbu Jiedu

误区盲点预警　题型优化测训

紧扣课标，直击高考，突破难点，解析疑点，化整为零，各个击破，点线面全方位建构“同步考点”攻略平台。

由“母题”发散“子题”，理顺“一个题”与“多个题”的关系，寻找“一类题”在思维方法和解题技巧上的“共性”，通吃“千张纸，万道题”，实现知识“内化”，促成能力“迁移”。

新课标

华中师范大学出版社

丛书主编/王后雄

Kaodian
Tongbu Jiedu

考点

同步解读

高中数学 1（必修）

本册主编/马春华

随书赠送 4 套试卷

新课标

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

考点同步解读 高中数学1(必修)/丛书主编：王后雄 本册主编：马春华

—武汉：华中师范大学出版社，2012. 6

ISBN 978-7-5622-5500-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①王… Ⅲ.①数学课-高中-教学参考资料

Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 109220 号

考点同步解读 高中数学1(必修)

丛书主编：王后雄　　责任编辑：涂　庆

责任校对：袁晓秋　　封面制作：胡　灿

选题设计：华大鸿图编辑室(027—67867361)

出版发行：华中师范大学出版社©

社址：湖北省武汉市洪山区珞喻路 152 号

销售电话：027—67867371　027—67865356

传真：027—67865347　　邮购：027—67861321

网址：http://www.ccnupress.com　　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn

印刷：湖北恒泰印务有限公司　　督印：章光琼

字数：360 千字

开本：889mm×1194mm　1/16　　印张：14

版次：2012 年 6 月第 2 版　　印次：2012 年 6 月第 1 次印刷

定价：25.80 元

欢迎上网查询、购书

目 录 CONTENTS

第一章　集合与函数的概念

1.1　集合

1.1.1　集合的含义与表示

课标解读

1.（★★★）了解"什么是集合".

2. 了解元素与集合的关系.

(1)（★★★★★）掌握集合元素的"三性"；

(2)（★★★）了解"属于"、"不属于"的概念及其符号的运用；

(3)（★★★）了解集合的分类和空集的特征；

(4)（★★）能记住常用特定集合的记法.

3. 能用自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题.

(1)（★★★）会用列举法表示集合；

(2)（★★★）会用描述法表示集合；

(3)（★★★）会进行集合描述法与列举法表示之间的转换.

学法导引

本节学习的关键在于概念的理解.集合及相关概念抽象性强，特别要注意的是不要把集合中的许多概念与日常生活中的一些"概念"混淆，同时也要注意与初中的相关知识的区别.

(1)一般地，我们把一些元素组成的总体叫做集合，但这只是集合的一个描述，并不是集合的准确定义.集合是数学中最基本的概念，它不能"被定义"，而只能用它来定义"别人".

(2)集合中的元素有三特性：确定性、互异性、无序性.特别是互异性，这是一个百考不厌、花样百出的考点，简明地讲集合肯定是一些元素组成的全体，但反过来，"全体"未必是集合.

(3)集合常用的三种表示方法：列举法、描述法、图示法（Venn 图法或数轴法），各有优点，用什么方法要具体情况具体分析.

考点分类精讲

考点 1　集合的含义

核心总结

(1)一般地，把一些元素组成的总体叫做集合.把研究的对象统称为元素.

(2)集合必须具有以下两个特点：①整体性：集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象；②确定性：依据某一明确标准，对象要么是集合的元素，要么不是集合的元素，二者必居其一.

考题 1　下列对象中可以构成集合的是（ C ）.

A. 大苹果　　B. 小桔子　　C. 中学生　　D. 约等于零的实数

错解　D

错因　根据集合中元素的确定性可知，本题中的 D 选项"约等于零的实数"不能被明确界定，因为"约等于"没有一个明确的标准，不清楚精确到什么程度才是"约等于"，故不能构成集合；A 中大苹果和 B 中小桔子中的大和小都没有明确的标准，所以也不能构成集合.

正解　C

导师·导学

集合是什么？什么是集合！

1. 集合是数学中最基本的概念，就如几何中的点、线、面一样是无法"被定义"的，就像原料，你可以用它来制造产品，但你不能用什么来制造原料，所以，我们只能用描述性的语言来说明，而无法去定义集合.正因如此，我们只能判断什么是或者不是集合，却无法定义集合是什么！

2. 集合概念中的"对象"所指非常广泛.现实生活中我们看到的、听到的、闻到的、触摸到的、想到的各种事物或一些抽象的符号，都可以看作"对象"，即集合的元素.

3. 集合是某些确定元素组成的总体.

误区·盲点

判断一个"全体"是否能构成一个集合，

考题 2 考查下列每组对象：

(1)著名的数学家；

(2)某校 2012 年秋季在校的所有高个子同学；

✓(3)不超过 20 的非负数； ✓

✓(4)方程 $x^2-9=0$ 在实数范围内的解；✓

✓(5)直角坐标平面内第一象限的所有点. ✓

其中能构成集合的是(C). ✓

A. (1)(3)　　B. (2)(3)　　C. (3)(4)(5)　　D. (1)(2)(5)

【解析】 (1)"著名的数学家"不是一个明确的标准，对于某个人是否"著名"无法客观地判断，因此"著名的数学家"不能构成一个集合；类似地，(2)同样也不能构成集合；(3)任给一个实数 x，可以明确地判断是不是"不超过 20 的非负数"，即"$0\leqslant x\leqslant 20$"与"$x>20$ 或 $x<0$"，两者必居其一，且仅居其一，故"不超过 20 的非负数"能构成集合；类似地，(4)也能构成集合；(5)只要横、纵坐标均大于零，就是第一象限的点，故(5)也能构成集合.

【答案】 C

【变式 1-1】 考察下列各组对象：

(1)所有漂亮的人；

✓(2)所有大于 0 的正整数；

✓(3)不大于 3 且不小于 0 的有理数；

✓(4)参与中国加入 WTO 谈判的中方成员；

(5)某校 2010 年春季在校的所有成绩好的同学.

其中能构成集合的是 (2)、(3)、(4). ✓

【变式 1-2】 考察下列每组对象：

✓(1)2010 年参展上海世博会的所有展馆；

(2)2010 年山东高考数学试卷中所有的难题；

✓(3)北京大学 2010 级的新生；

(4)平面直角坐标系中，第一象限内的一些点.

其中能构成集合的有 (1) (3). ✓

考点 2　集合中元素的三个特性及应用

核 心 总 结

(1)集合中元素的三个特性：确定性、互异性、无序性.

①确定性：对于集合 A 和某一对象 x，有一个明确的判断标准可以鉴定 x 属于 A，还是 x 不属于 A，二者必居其一，而且只居其一；

②互异性：集合中没有相同的元素；

③无序性：集合中的元素是不排序的.

(2)两集合相等的概念：只要构成两个集合的元素是一样的，就称这两个集合是相等的.

~~$x^2=x$~~　$x^2-x=1$　$x(x-1)=1$

考题 3 (1)数集 $\{1,x,x^2-x\}$ 中元素 x 所满足的条件是 $x\neq 1,0$，2　$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(2)已知集合 $A=\{a,a+b,a+2b\}$，$B=\{a,ac,ac^2\}$（a 为常数），若 $A=B$，求 c 的值.

【解析】 (1)根据集合中元素的互异性可知

$a+b=ac$　$a+2b=ac$

~~$a+b=ac^2$~~　~~$a+2b=ac^2$~~

~~$a+2b+ac$~~

其关键是对标准的"确定性"的把握，即根据这个"标准"，可以明确判定一个对象是或者不是给定集合的元素. 例如："我们班的高个子同学"就不能构成一个集合，因为"高个子"并不是一个明确的判定标准. 但若改成"我们班上高于 180 cm 的同学"，这个"高于 180 cm"就是一个明确的判定标准. 因此它能构成一个集合. 对于给定一个集合和一个对象，这个对象是否为这个集合的元素，只有"是"与"不是"两种情况，如果所给出的对象是没有严格的标准、相对模糊，无法判断这个对象是否为这个集合的元素，则这些对象就不能构成集合.

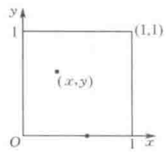
拓展·研讨

无限的世界(一)

正方形里的点作为集合 A，取其一边上的点作为另一个集合 B，那么，集合 A 与集合 B 中的点哪一个多呢？显然…不要轻易下结论哟！答案会让你很崩溃：一样多！

道理惊人地简单：不妨设正方形在第一象限，4 个顶点是 $(0,0)$、$(1,0)$、$(0,1)$、$(1,1)$. 正方形内一个点可以用它的坐标 (x,y) 表示，比如：

$$\begin{cases}x=0.31350724\cdots\\y=0.9486135\cdots\end{cases}$$



来个队列变换，间隔插入，两列化成一列，得到一个新数

$a_{(xy)}=0.39\,14\,38\,56\,01\,73\,25\,4\cdots$

这就把正方形里的点和 0 到 1 之间的数一对一地对应起来了！

那么正方体和其一棱是否存在这种关系呢？你能说清楚个中缘由么？

导师·导学

如何认识集合中元素的三个特性？

(1)确定性：是指集合中的元素是确定的，即任何一个对象都能明确它是否是某个集合的元素. 它是判断一组对象是否形成集合的标准.

(2)互异性：是指对于一个给定的集合，它的任意两个元素都是不同的. 简单地说，一个集合中不能出现相同的元素.

(3)无序性：集合中的元素是没有前后顺序的，如由 1,2,3 和 3,2,1 组成的集合是同一集合.

$$\begin{cases}x\neq1,\\x\neq x^2-x,\\x^2-x\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq1,\\x\neq0\text{ 且 }x\neq2,\\x\neq\dfrac{1\pm\sqrt5}{2},\end{cases}$$

故 x 满足的条件为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0,x\neq1,x\neq2,x\neq\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$.

故填 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0,x\neq1,x\neq2,x\neq\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$.

$x^2-x\neq1.$　$x^2-x+\frac14=\frac54$　$(x-\frac12)^2=\frac54$

(2) **✗ 错解**　由 $a+b=ac^2$，且 $a+2b=ac$，消去 b，得 $2ac^2-ac-a=0$.
因为 $a\neq0$，所以 $2c^2-c-1=0$，即 $(c-1)(2c+1)=0$.
又 $c\neq1$，故 $c=-\dfrac12$.

错因　要解决 c 的求值问题，关键是要有方程思想. 此题应根据相等的两个集合元素完全相同及集合中元素的确定性、互异性、无序性建立关系式，故上述的解法不完整.

$a+b=ac$　$a+2b=ac^2$

✓ 正解　分两种情况进行讨论.　$a+b=ac.$　$a+2b=ac^2.$

①若 $a+b=ac$，且 $a+2b=ac^2$，消去 b，得 $a+ac^2-2ac=0$.
当 $a=0$ 时，集合 B 中的三元素均为零，和元素的互异性相矛盾，故 $a\neq0$.
所以 $c^2-2c+1=0$，即 $c=1$，但 $c=1$ 时，B 中的三元素又相同，所以此时无解.
②若 $a+b=ac^2$，且 $a+2b=ac$，消去 b，得 $2ac^2-ac-a=0$.
因为 $a\neq0$，所以 $2c^2-c-1=0$，即 $(c-1)(2c+1)=0$.
又 $c\neq1$，故 $c=-\dfrac12$. 综上所述，$c=-\dfrac12$.

考题 4　设 a,b,c 为非零实数，则 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合有哪些元素？

【解析】　当 a,b,c 均为负数时，$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$ 均为 -1，故 $x=-4$；

当 a,b,c 只有一个为正数时，$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$ 中必有两个为 1，两个为 -1，故 $x=0$；

当 a,b,c 有两个为正数时，$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$ 中必有两个为 1，两个为 -1，故 $x=0$；

当 a,b,c 均为正数时，$\dfrac{a}{|a|},\dfrac{|b|}{b},\dfrac{c}{|c|},\dfrac{|abc|}{abc}$ 均为 1，故 $x=4$.

由 $x=\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{c}{|c|}+\dfrac{|abc|}{abc}$ 的所有值组成的集合的元素有 $0,-4,4$.

【变式 2-1】　(1)数集 $\{0,2,x^2-x\}$ 中的 x 不能取哪些实数值？
(2)设集合 $M=\{1,x,y\}$，$N=\{x,x^2,xy\}$，且 $M=N$，求 $x^{2009}+y^{2010}$ 的值.

$x=x^2.$
$xy=y$
$x^2=1$
$x=-1$ 或 $x=1.$
$x=-1.$　$y=0.$
$(1,-1,y)$
$(-1,1,xy)$

$x^2-x\neq0.$
$x(x-1)\neq0.$
$x\neq0$　$x\neq1.$

$x^2-x\neq2$
$x^2-x+\frac14=\frac94$
$(x-\frac12)^2=\frac94$
$x-\frac12=\pm\frac32$
$x_1=\frac32+\frac12=2$
$x_2=-\frac32+\frac12=-1.$

$x^{2009}+y^{2010}=-1^{2009}+0^{2010}=-1$

(4)问题示例：
①互异性：如方程 $x^2-2x+1=0$ 的解集用集合记为 $\{1\}$，而不能记作 $\{1,1\}$；
②无序性：如集合 $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 是同一个集合. 但 $\{(1,2)\}$ 与 $\{(2,1)\}$ 是不是呢？

点拨·导航

不是

(1)考题 3(1)考查集合元素的“互异性”，一旦集合元素确定下来，那么集合中就不会存在重复的元素，即元素间均互不相等. 这样，集合有 3 个元素，就有 3 组不等式. 如果集合有 4,5,6,…个元素呢？

(2)考题 3(2)是一个集合相等的问题，其解题关键有二：

① 两集合元素个数相同，对应元素相等. 值得注意的是：这个“对应”是要分类讨论的(这也是对集合元素“无序性”的考查)；

② 该题隐含了对集合元素“互异性”的考查，由元素对应相等列方程解得的结果必须回代检验，防止出现重复元素.

误区·盲点

如何准确把握集合元素“互异性”

1. 易错点

(1)如考题 3(1)这类考查集合元素“互异性”的题型，在解答时往往容易遗漏，比如该题集合中既然有三个元素，那三个元素两两不相等的不等式应是三个，而不是两个；

(2)如考题 3(2)这类考查集合相等的题型，在解答时容易忽略集合元素的“互异性”，如题中当 $c=1$ 时，会造成集合 B 中出现重复元素.

2. 防错良方

(1)紧扣元素“互异性”，充分分类讨论；
(2)养成“回代检验”的良好习惯.

梳理·归纳

有关集合元素“三性”的题型方法

1. 根据集合中元素的确定性可以解出字母的所有可能的值，再根据集合中元素的互异性对集合中的元素进行检验. 另外，在利用集合中元素的特性解题时要注意分类讨论思想的运用.

2. 分类讨论的基本步骤：
(1)确定分类主体以及分类主体的范围；
(2)确定分类标准；
(3)逐类讨论(注意回代检验，如考题 3(2))；
(4)归纳综述结论. 但需要注意的是，分类并不是越细越好，充分而简明的分类往往更加高效，如考题 4.

【变式 2-2】 已知集合 A 中有 3 个元素 $x-2$，$\boxed{2x^2+5x}$，12，且 -3 属于 A，求 x 的值.

$x-2=-3$. $2x^2+5x=-3$

$x=-3+2=-1$

$2x^2+5x=-3$

$x^2+\frac{5}{2}x=-\frac{3}{2}$

$x-2=-3$.

$x=-1$.

$2\times1+5\times(-1)$

$=-3$

【变式 2-3】 (1)设 a,b,c 均为非零实数，则 $x=\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ca|}{ca}+\frac{abc}{|abc|}$ 的所有值组成的集合为 ~~{4,-4}~~ {2,0,-2,4}

① 四个为正数：$1+1+1+1=4$

四个为负数

(2)已知 $S=\{a,b,c\}$ 中三个元素是 $\triangle ABC$ 的三边长，那么 $\triangle ABC$ 一定不是(D).

A. 锐角三角形　　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

考点 3　集合与元素关系的判断

核心总结

1. 元素与集合的关系

	关系	概念	记法	读法
元素与集合的关系	属于	如果 a 是集合 A 中的元素，就说 a 属于集合 A	$a\in A$	a 属于集合 A
	不属于	如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A	$a\notin A$	a 不属于集合 A

2. 常用数集及表示符号

名称	非负整数集（自然数集）	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$

考题 5 (1)(2010，上海检测)下列所给关系正确的个数是(A B)

①$\pi\in\mathbf{R}$；②$\sqrt{3}\notin\mathbf{Q}$；③$0\in\mathbf{N}^*$；④$|-4|\notin\mathbf{N}^*$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

(2)用符号"$\in$"或"$\notin$"填空：

①$2\sqrt{3}$ ______ $\{x|x<\sqrt{11}\}$；　②$\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ______ $\{x|x\leqslant 2+\sqrt{3}\}$；

③3 ______ $\{x|x=n^2+1,n\in\mathbf{N}\}$；　④$(-1,1)$ ______ $\{y|y=x^2\}$；

⑤设 $x=\frac{1}{3-5\sqrt{2}}$，$y=3+\sqrt{2}\pi$，$M=\{m\mid m=a+b\sqrt{2},a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{Q}\}$，则 x ______ M，y ______ M.

拓展·研讨

一个常见的集合与方程的综合问题

【例题】 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中没有元素，求 a 的取值范围；

(2)若 A 中至多有一个元素，求 a 的取值范围.

【解析】 (1)若 $A=\varnothing$，即 $ax^2-3x+2=0$ 无实根，

$\therefore\Delta=9-8a<0$，即 $a>\frac{9}{8}$；

(2)若 A 中至多有一个元素，包括 A 为空集和 A 中只有一个元素两种情况.

若 A 中只有一个元素，有两种情况：

当 $a=0$ 时，方程为 $-3x+2=0$，即 $x=\frac{2}{3}$；

当 $a\neq0$ 时，方程为 $ax^2-3x+2=0$ 有两相等实根.

$\therefore\Delta=9-8a=0$，即 $a=\frac{9}{8}$.

综合(1)的结论可知 $a=0$ 或 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

【点拨】 对于方程 $ax^2+bx+c=0$ 来说，二次项系数往往要分 $a=0$ 及 $a\neq0$ 两种情况讨论.题目中的关键词"至多只有一个"是指集合中无元素或只有一个元素.在解题中尤其应注意"至多""至少"等字眼所包含的情况有哪些.

导师·导学

如何认识元素与集合的关系？

(1)$a\in A$ 与 $a\notin A$ 取决于 a 是不是集合 A 中的元素，根据集合中元素的确定性可知，对于任何 a 与 A，$a\in A$ 或 $a\notin A$ 这两种情况必有一种且只有一种成立.

(2)符号"$\in$""$\notin$"表示元素与集合的关系，不能用来表示集合与集合之间的关系，这一点要牢记.

(3)提示：

a 与 $\{a\}$ 是不同的，a 表示一个元素，$\{a\}$ 表示由一个元素 a 构成的集合，一般称 $\{a\}$ 为单元素集.特别地，0 与 $\{0\}$ 是不同的.

【解析】 (1)①②正确，故选 B.

(2)①~~$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$，故填$\notin$~~；

②$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{7+2\sqrt{10}}<\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$.

故填$\in$；

③设 $n^2+1=3$，解得 $n=\pm\sqrt{2}\notin\mathbf{N}$，故填$\notin$； →自然数

④把$(-1,1)$代入 $y=x^2$ 成立，但$(-1,1)$是有序实数对，而$\{y|y=x^2\}$是 y 值的集合.

故填$\notin$；

⑤$x=\dfrac{1}{3-5\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{41}-\dfrac{5\sqrt{2}}{41}$，　$\because -\dfrac{3}{41}\in\mathbf{Q}$，$-\dfrac{5}{41}\in\mathbf{Q}$，

$\therefore x\in M$.　$\because \pi\notin\mathbf{Q}$，　$\therefore y\notin M$.

故填$\in$；$\notin$.

考题 6　设实数集 S 是满足下面两个条件的集合：

①$1\notin S$；　②若 $a\in S$，则$\dfrac{1}{1-a}\in S$.　　$\dfrac{1}{1-2}=-1\in S$.

(1)求证：若 $a\in S$，则 $1-\dfrac{1}{a}\in S$；　　$\dfrac{1}{1-(-1)}\in S$　$\dfrac{1}{2}\in S$.

(2)若 $2\in S$，则在 S 中必含有其他的两个数，试求出这两个数；

(3)集合 S 能否是单元素集？若能，把它求出来；若不能，说明理由；

(4)求证：集合 S 中至少有三个不同的元素.

(1)【证明】 由 $a\in S$，则$\dfrac{1}{1-a}\in S$，可得$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}\in S$，

即
$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{1-a-1}=1-\frac{1}{a}\in S.$$

故若 $a\in S$，则　$1-\dfrac{1}{a}\in S$；

(2)【解析】 由 $2\in S$，则$\dfrac{1}{1-2}=-1\in S$；由$-1\in S$，则 $\dfrac{1}{1-(-1)}=\dfrac{1}{2}\in S$.

而当$\dfrac{1}{2}\in S$时，$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2\in S$，又回到了开始.

因此当 $2\in S$ 时，有另两个元素$-1\in S$，$\dfrac{1}{2}\in S$；

(3)【解析】 不妨设 $S=\{a\}$，则由条件②得 $\dfrac{1}{1-a}\in S$. 由元素的互异性知 $a=\dfrac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，由于 $\Delta=1-4=-3<0$，故方程无实数根，因此集合 S 不能为单元素集；

(4)【证明】 由(1)知 $a\in S$ 时，$\dfrac{1}{1-a}\in S$，$1-\dfrac{1}{a}\in S$.

下证 a，$\dfrac{1}{1-a}$，$1-\dfrac{1}{a}$三者两两互不相等.

① 若 $a=\dfrac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，无解，　$\therefore a\neq\dfrac{1}{1-a}$；

② 若 $a=1-\dfrac{1}{a}$，即 $a^2-a+1=0$，无解，　$\therefore a\neq 1-\dfrac{1}{1-a}$；

③ 若$\dfrac{1}{1-a}=1-\dfrac{1}{a}$，即 $a^2-a+1=0$，无解，　$\therefore \dfrac{1}{1-a}\neq 1-\dfrac{1}{a}$.

综上所述，集合 S 中至少有三个不同的元素.

【变式 3-1】 用符号$\in$和$\notin$填空.

(1)1 __$\in$__ $\mathbf{N}^*$；　0 __$\in$__ $\mathbf{N}$；　$\sqrt{3}$ __$\notin$__ $\mathbf{Z}$；　π __$\in$__ $\mathbf{R}$；

题型·方法

1. 判断一个对象是不是某个集合的元素，就是判断这个对象是否具有该集合元素所具有的公共属性. 由于集合多种多样，因此判定方法也多种多样，因题而异.

2. 一般地，①确定某数是否为某特定数集的元素往往需要做恰当等价变换，进而作出判断，如考题 5(2)①②.

②确定某数是否为某数集的元素关键是看该数是否能表示成该集合的元素形式，如考题 5(2)③④.

③确定元素是否在集合中，要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定，如考题 6 中解决的关键是多次使用条件②. 此外还应看到，在解决问题的过程中使用了集合中元素的互异性，因此遇到集合问题时要牢牢把握集合的性质. 当然若能利用好第(1)问的结论，则能使第(2)问快速获解. 事实上，有

$$2\in S,1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\in S,1-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-1\in S.$$

(2)$2\sqrt{2}$______$\{x|x<3\}$；　$\sqrt{3}+\sqrt{5}$______$\{x|x>\sqrt{2}+\sqrt{6}\}$；

(3)13 ______$\{x|x=m^2+n^2,m,n\in\mathbf{N}^*\}$；

(4)102 ______$\{y|y=m^2-n^2,m,n\in\mathbf{N}^*\}$；

(5)(2,4)______$\{y|y=x^2\}$，(3,9)______$\{(x,y)|y=x^2\}$.

$t=a+\sqrt{2}b$　$a,b\in Z$

【变式 3-2】 (1)(2012，长沙调考)已知集合 $M=\{t|t=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Z}\}$，设 $x,y\in M$，则(　　)；

整数

A. $x\pm y\notin M$　　B. $xy\in M,x\pm y\notin M$

C. $xy\notin M$　　D. $x\pm y\in M,xy\in M$

(2)设 $a,b\in\mathbf{Z}$，$E=\{(x,y)|(x-a)^2+3b\leqslant 6y\}$，点 $(2,1)\in E$，但点 $(1,0)\notin E$，点 $(3,2)\notin E$，则 $a=$________，$b=$________；

(2,1)

$(2-a)^2+3b\leq 6$

(3)已知集合 $M=\{x|x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x|x=3n-1,n\in\mathbf{Z}\}$ 且 $a\in M,b\in N,c\in P$，设 $d=a-b+c$，则(　　).

A. $d\in M$　　B. $d\in N$　　C. $d\in P$　　D. 以上都不对

$4-4a+a^2+3b\leq 6$

$3n-(3n+1)+3n-1$

【变式 3-3】 集合 M 中的元素为自然数，且满足：如果 $x\in M$，则 $8-x\in M$. 试回答下列问题：

$=3n-3n-1+3n-1$

(1)写出只有一个元素的集合 M；

(2)写出元素个数为 2 的所有集合 M；

$=3n-2$

(3)满足题设条件的集合 M 共有多少个？

考点 4　集合的表示方法

核　心　总　结

(1)列举法——把集合的元素一一列举出来.

(2)描述法——把集合中元素的公共属性描述出来，如 $\{x|p(x)\}$. 描述法常见的有：文字语言描述、符号语言描述、图形语言描述.

考题 7　用适当的方法表示下列集合：

(1)小于 10 的所有正奇数组成的集合；

(2)被 5 除余 2 的自然数组成的集合；

(3)绝对值大于 1 且不超过 5 的整数组成的集合；

(4)一次函数 $y=4-3x$，当自变量取正整数时，因变量组成的集合；

(5)第二、四象限的所有点.

【解析】 (1)设集合为 A，元素为 x. 因为 10 以内的正奇数只有 1,3,5,7,9，所以用列举法表示：$A=\{1,3,5,7,9\}$. 也可以用特征性质描述法表示为：

$A=\{x|x$ 是小于 10 的正奇数$\}$，或者 $A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{N},k<5\}$；

(2)因为集合的元素有无限多个，所以用特征性质描述法：设集合为 B，元素为 x，则 $x=5k+2$ 且 $k\in\mathbf{N}$，故 $B=\{x|x=5k+2,k\in\mathbf{N}\}$；

(3)用特征性质描述法：设集合为 C，元素为 x，则 $C=\{x\in\mathbf{Z}|1<|x|\leqslant 5\}$. 又集合元素个数不多，也可以用列举法表示：$C=\{2,3,4,5,-2,-3,-4,-5\}$；

(4)设集合为 D，元素为 y，用特征性质描述法表示为：

$D=\{y|y=4-3x,x\in\mathbf{N}^*\}$；

(5)设集合为 E，元素为 (x,y)，用特征性质描述法表示为：

$E=\{(x,y)|xy<0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$.

导师·导学

①在不引起混淆的情况下，描述法可省去竖线及代表元素，如{直角三角形}，但不能表示为{所有直角三角形}，因为{　}本身就有“所有”、“全部”的意思.

②在列举法中必须注意两点：一是对于元素较多的集合，列举时应尽可能呈现该集合的明显规律，如把集合 A 写成 $\{9,5,3,1,7,\cdots\}$ 就叫人摸不着头脑；二是注意有限集与无限集中省略号的应用，如 $M=\{1,3,5,7,9,\cdots,999\}$ 就表示 1000 以内的正奇数，它是有限集，而 $A=\{1,3,5,7,9,\cdots\}$ 则表示无限集.

③比如 $B=\{$直线 $y=2x-1$ 上的点$\}$就为文字语言描述；$B=\{(x,y)|y=2x-1\}$ 就为符号语言描述；在平面直角坐标系内画出直线 $y=2x-1$ 的图象，就为图形语言描述.

点拨·导航

(1)容易错写成 $\{1,1\}$ 或 $\{x=1,y=1\}$ 等，要注意代表元素的选取.

(2)若用描述法，一定要把限制条件，$n\in\mathbf{N},x=3n+1,1\leqslant x\leqslant 100$ 都写出来.

考题 8　用适当的方法表示下列集合：

(1)方程组$\begin{cases}x+y=2,\\3x+2y=5\end{cases}$的解集；

(2)100 以内被 3 除余 1 的正整数；

(3)到两坐标轴距离相等的点的集合；

(4)所有的正方形.

【解析】 (1)可知方程组的解为 $x=1,y=1$. 故可写成$\{(1,1)\}$或$\{(x,y)|x+y=2$ 且 $3x+2y=5\}$；

(2)可以写成$\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $1\leqslant x\leqslant 100\}$或{100 以内被 3 除余 1 的正整数}；

(3)可以写成$\{(x,y)|x\pm y=0\}$；

(4)可以写成{正方形}.

考题 9　用列举法表示下列集合：

(1) $\left\{x\left|\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z}\right.\right\}$；

(2) $\left\{x\left|x=\dfrac{a}{b},a\in\mathbf{Z},|a|<2,b\in\mathbf{N}^*\right.\text{ 且 }b\leqslant 3\right\}$；

(3) $\{(x,y)|y=2x,x\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant x<4\}$.

【解析】 (1) ∵ $\dfrac{6}{2-x}\in\mathbf{Z}$，　∴ $|2-x|$ 是 6 的因数，

∴ $|2-x|=1$ 或 $|2-x|=2$ 或 $|2-x|=3$ 或 $|2-x|=6$，

即　$x=1,3,4,0,-1,5,-4,8$.

∴ 故原集合可用列举法表示为$\{-4,-1,0,1,3,4,5,8\}$；

(2) 由 $a\in\mathbf{Z},|a|<2$，知 $a=-1,0,1$. 由 $b\in\mathbf{N}^*$ 且 $b\leqslant 3$，知 $b=1,2,3$.

∴ $\dfrac{a}{b}$的值为$\dfrac{-1}{1},\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1},\dfrac{-1}{2},\dfrac{0}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{-1}{3},\dfrac{0}{3},\dfrac{1}{3}$.

考虑到集合中元素的互异性，故原集合可用列举法表示为

$$\left\{-1,0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\}；$$

(3) ∵ $x\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant x<4$，　∴ $x=1,2,3$，其对应的 y 值分别为2,4,6.

故原集合可用列举法表示为 $\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$.

考题 10　填空：

(1)$(-1,2)$ ＿$\notin$＿ $\{x|y=-2x\}$(填“$\in$”或“$\notin$”)；

(2)用列举法表示方程组$\begin{cases}2x+y=8,\\x-y=1\end{cases}$的解集为$\{(3,2)\}$.

✗ 错解　(1)$\in$；　(2)$\{3,2\}$或$\{x=3,y=2\}$或$\{(x,y)|x=3$ 或 $y=2\}$.

错因　(1)集合$\{x|y=-2x\}$是数集而非点集，竖线后面表示的是元素的基本特征，这点在解题中尤其要注意；

(2)错解$\{3,2\}$表示的是两个数是 3 和 2 组成的集合，而$\{x=3$ 或 $y=2\}$不符合集合表示法的基本模式，$\{(x,y)|x=3$ 或 $y=2\}$表示的元素实质是$(3,y)$或$(x,2)$，与题意不符，上述错误都是概念不清，审题不准所致，所以要正确理解相关概念.

✓ 正解　(1)$\notin$；　(2)$\{(3,2)\}$.

【变式 4-1】　有下列各命题：

(1)方程 $\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$ 的解集是$\left\{\dfrac{1}{2},-1\right\}$；

(2)方程 $x^2+x-6=0$ 的解集为$\{(-3,2)\}$；

(3)容易错写成$\{y=x\}$.

(4)用描述法表示集合有两种：即文字描述和符号描述.

梳理·归纳

集合几种表示方法的辨析

1. 用列举法表示集合，首先要明确集合有哪些元素，然后再在“{　}”内将元素一一列举出来. 其中必须注意以下几点：

①元素之间必须用“,”隔开；

②集合的元素必须是明确的；

③不必考虑元素出现的先后顺序；

④集合中的元素不能重复；

⑤集合中的元素可以是任何事物.

2. 用描述法表示集合时，需要注意以下几点：

①写清楚代表元素的字母；

②说明集合元素的特征性质；

③不能出现未说明的字母；

④应恰当应用“且”与“或”；

⑤语句精炼准确.

(1)用描述法表示集合，常用模式是$\{x|p(x)\}$，其中 x 是集合的代表元素，$p(x)$为集合中元素所具有的共同特征. 要注意竖线不能省略，同时表达要力求简练、明确.

(2)在描述法表示集合时，若描述部分出现元素记号以外的字母，要对新字母说明其含义或取值范围.

3. 将特征性质描述法表示的集合转化为用列举法表示时，特别要注意元素是什么，字母的限制条件是什么. 看懂集合的具体意义是关键，特别注意 x,y 所满足的限制条件，如考题 8(2)中，$x\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant x\leqslant 100$. 考题 9(3)中 $x\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant x<4$.

4. 用韦恩图法或数轴法表示集合的最大特点是形象、直观，但通常它只是作为一种解题的辅助工具. 一般集合最终结果的表示方法不用图示法，也很少用自然语言法. 若要求结果用集合表示，其结果一定是用描述法、列举法或区间表示.

5. 识别集合含义的方法

①看代表元素. 例如，$\{x|p(x)\}$表示数集，$\{(x,y)|p(x,y)\}$表示点集.

②看条件. 例如，$\{x|y=x+1\}$表示使 $y=x+1$ 有意义的 x 的范围；$\{y|y=x^2+1\}$是使 $y=x^2+1$ 有意义的 y 的范围，即函数 $y=x^2+1$ 的值域；$\{(x,y)|y=x+1\}$是满足 $y=x+1$ 的点的集合，其实就是直线 $y=x+1$ 的图象.

(3)集合 $M=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$与集合 $P=\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$表示同一集合；

数集与点集的不同

(4)方程组 $\begin{cases}2x+y=0,\\x-y+3=0\end{cases}$ 的解集是 $\{(x,y)|x=-1$ 或 $y=2\}$.

其中描述正确的个数为（ B ）. A

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【变式 4-2】 用特征性质描述法表示图 1-1-1 中阴影部分（含边界）的点的坐标的集合.

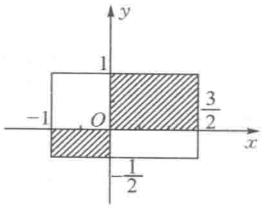


图 1-1-1

【变式 4-3】 已知集合 $A=\left\{a\,\middle|\,\dfrac{x+a}{x^2-2}=1\text{ 有唯一实数解}\right\}$，试用列举法表示集合 A.

$x+a=x^2-2$　　$b^2-4ac=0$

$x^2-2-x-a=0$　　$(-1)^2-4\times1\times(-2-a)=0$

$-2-a$　　$1-4(-2-a)=0$

$1+8+4a=0$

$4a=-9$

$a=-\frac{9}{4}$

【变式 4-4】 (1)改用列举法表示下列集合：

①$A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\dfrac{16}{9-x}\in\mathbf{N}\right\}$；　① $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

②$B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}x+y=4,\\x-y=2\end{cases}\right\}$；　$\begin{cases}x+y=4\\x-y=2\end{cases}$　$2y=2$　$y=1$　$\{(3,1)\}$

③$C=\{x|y=-x^2+5,x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{N}\}$；

④$D=\{y|y=-x^2+5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

⑤$E=\{(x,y)|y=-x^2+5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

$4n+3$

(2)改用描述法表示下列集合：

①$\left\{1,\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{7},\dfrac{1}{9}\right\}$；　$\left\{\dfrac{1}{2n+1}\,\middle|\,0\le n<5\right\}$

②被 4 整除余 3 的正整数集合；　$\{4n+3\,|\,n>-\frac{3}{4}\}$

③坐标平面内坐标轴上的点集.

$A=\{(x,y)\}$

考点 5　信息迁移题

核　心　总　结

近几年，高考及各地调考均经常出现信息迁移题在集合部分常常给出新定义，并在此定义下进行运算，只要紧扣定义的规定往往解题难度不大.

考题 11　定义集合运算：$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 中所有元素之和为（ D ）.

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 6

$1\times2=2$　1×0　0　$2\times2=4$

【解析】 欲求 $A*B$ 的所有元素之和，需先确定 $A*B$ 中元素，而要求 $A*B$ 中元素，需弄清 $A*B$ 的含义. 因为 $A*B$ 中的元素是 A,B 中各取一元素相乘

6. 集合的三种语言之间的关系

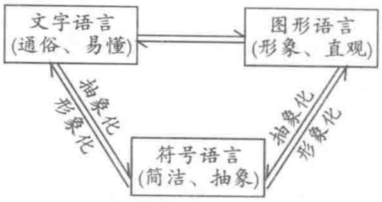


图 1-1-2

如图 1-1-2，集合的三种语言之间可以进行相互转化. 在解决集合问题时，一般是将文字语言转化为符号语言或图形语言，选择最有利的手段，表述清楚集合是由哪些元素构成的.

7. 如何选择恰当的集合表示方法？

(1)当集合中元素的个数有限且公共属性难以概括时，只能用列举法. 例如 $\{x,x^2+1,x-y\}$；

(2)当集合中的元素无法一一列出时，可先抽象出元素的共同特征，再用描述法表示；

(3)当集合中的元素不是实数或式子时，可采用自然语言表示. 例如，$B=\{x\in\mathbf{Z}|10<x<15\}$或 $B=\{11,12,13,14\}$，可以写成 $B=\{$大于 10 且小于 15 的整数$\}$. 这说明描述法与列举法可以相互转化.

误区·盲点

1. 易错点

描述集合时只关注条件中的关系式，而不注意关键“代表元”的含义，如易将 $M=\{y|y=x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$与 $N=\{(x,y)|y=x^2+2,x\in\mathbf{R}\}$混淆.

2. 防错良方

表示集合时，要明确“代表元”的意义，分清集合是数集还是点集，如 $\{x|y=x^2+2\}$表示 $y=x^2+2$ 的 x 的取值范围，$\{y|y=x^2+2\}$表示 $y=x^2+2$ 的 y 的取值范围. 而$\{(x,y)|y=x^2+2\}$表示 $y=x^2+2$ 图象上的点集.

另外，要注意一个问题：(a,b)是一个有序实数对，也就是说 a,b 的位置是不能随便互换的，比如在直角坐标系中点的坐标(1,2)与(2,1)是不同的，这个应引起注意.

导师·导学

解有关集合概念的信息迁移题的注意事项

(1)理解新定义. 例如考题 11 中 $A*B$ 中的元素是由 A,B 中任两个元素相乘得来的.

(2)运用新定义. 例如考题 11 给出具体的 A,B，再求 $A*B$.

(3)不要被新符号迷惑. 例如，本例中的“$*$”，把新符号看成新定义的运算，就像“$+,-,\times,\div$”一样，用符号表示运算法则.

所得结果，所以只需把 A 中任意元素与 B 中任意元素相乘即可.

∵ $A*B=\{0,2,4\}$，

∴ 所有元素之和为 $0+2+4=6$.

【答案】 D

考题 12 (2008，福建) 设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若任意 $a,b\in P$，都有 $a+b,ab,\frac{a}{b}\in P$（除数 $b\neq0$），则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域；数集 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ 也是数域. 有下列命题：①整数集是数域；②若有理数集 $\mathbf{Q}\subseteq M$，则数集 M 必为数域；③数域必为无限集；④存在无穷多个数域.

其中正确的命题的序号是________.（把你认为正确的命题的序号都填上）

【解析】 ①∵ $1\in\mathbf{Z},2\in\mathbf{Z}$，　∴ $\frac{1}{2}$ 必须在整数集内，而 $\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$，故①错误；

②设 M 中除了有理数外还有另一个元素 $\sqrt{2}$，则 $\mathbf{Q}\subseteq M$，　∵ $2\in\mathbf{Z}$，

∴ $2\sqrt{2}$ 也必须在 M 内，而 $2\sqrt{2}\notin M$，故②错误；

③设数域 P，$a\in P$，$b\in P$（假设 $a\neq0$），则 $a+b\in P$，

则 $a+(a+b)=2a+b\in P$. 同理，$na+b\in P$，$n\in\mathbf{N}$，故数域必为无限集；

④形如 $M=\{a+bx\mid a,b\in\mathbf{Q},x$ 为无理数$\}$这样的数集都是数域，故存在无穷多个数域.

故正确的命题的序号是③④.

【变式 5-1】 设“$*$”是集合 A 中元素的一种运算，如果对于任意的 $x,y\in A$，都有 $x*y\in A$，则称运算“$*$”对集合 A 是封闭的. 若 $M=\{x\mid x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，$\mathbf{Z}$ 为整数集，则对集合 M 不封闭的运算是（　　）.

A. 减法　　B. 乘法　　C. 除法　　D. 乘方

【变式 5-2】 已知 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4\}$，定义集合 A,B 间的运算 $A*B=\{x\mid x\in A$，且 $x\notin B\}$，则集合 $A*B$ 等于（ C ）.

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{2\}$

题型优化测训

学业水平测试

1. [考点 1] 下列各组对象能构成集合的是（ A ）.
   A. 2011 年全国的本科毕业生
   B. 2011 年中国小麦产量较高的城市
   C. 由著名数学家组成
   D. 与无理数 π 无限接近的数

2. [考点 3] 已知 $A=\{x\mid 3-3x>0\}$，则有（ C ）.
   A. $3\in A$　　B. $1\in A$
   C. $0\in A$　　D. $-1\notin A$

3. [考点 2] 由 $a^2,2-a,4$ 组成一个集合 A，A 中含有 3 个元素，则实数 a 的取值可以是（ C ）.
   A. 1　　B. -2　　C. 6　　D. 2

4. [考点 2] 下列集合：①$\{1,2,2\}$；②$\mathbf{R}=\{$全体实数$\}$；③$\{3,5\}$；④不等式 $x-5>0$ 的解集为 $\{x-5>0\}$.
   其中，集合表示方法正确的是 ③ .

5. [考点 2] 由实数 $x,-x,|x|$ 所组成的集合最多有 2 个元素.

6. [考点 3、4] 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，对任意 $a\in A$，有 $|a|\in B$，且 B 中只有 4 个元素，求集合 B.

$B=\{0,1,2,3\}$

高考水平测试

一、选择题（$5'\times5=25'$）

1. [考点 1] 下列几组对象可以构成集合的是（ D ）.
   A. 充分接近 π 的全体实数
   B. 善良的人
   C. 某校高一所有聪明的同学
   D. 某单位所有身高在 1.7m 以上的人

2. [考点 5] (2012，惠州模拟) 现定义一种运算⊗，当 m,n 都是正偶数或都是正奇数时，$m\otimes n=m+n$；当 m,n 中一个为正奇数，另一个为正偶数，$m\otimes n=mn$. 则集合 $M=\{(a,b)\mid a\otimes b=16,a\in\mathbf{N}^*,b\in\mathbf{N}^*\}$ 中元素的个数为（ C ）.
   A. 22　　B. 20　　C. 17　　D. 15

3. [考点 2] (2007，全国Ⅰ) 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a=$（ C ）.

$\Rightarrow a+b=0$

$\Rightarrow a=-b$

$\Rightarrow \frac{b}{a}=-1$

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

4. [考点 3、5]（2009，北京）设 D 是正三角形 $P_1P_2P_3$ 及其内部的点构成的集合，点 P_0 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中心．若集合 $S=\{P|P\in D,|PP_0|\leqslant|PP_i|,i=1,2,3\}$，则集合 S 表示的平面区域是（ D ）

A. 三角形区域　　B. 四边形区域

C. 五边形区域　　D. 六边形区域

5. [考点 3]（2006，上海）若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M，则对任意实常数 k，总有（ A ）

A. $2\in M,0\in M$　　B. $2\notin M,0\notin M$

C. $2\in M,0\notin M$　　D. $2\notin M,0\in M$

二、填空题（$5'\times5=25'$）

6. [考点 2]（2012，本溪模拟）式子 $\dfrac{a}{|a|}+\dfrac{b}{|b|}+\dfrac{a^2}{|a^2|}+\dfrac{\sqrt{-b}}{|\sqrt{-b}|}$ 的所有可能取值组成的集合为 $\{2,0\}$．

7. [考点 5]设 A,B 为两个实数集，定义集合 $A+B=\{x|x=x_1+x_2,x_1\in A,x_2\in B\}$，若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A+B$ 中元素的个数为 4．

8. [考点 4]用列举法表示集合 $D=\left\{x\in\mathbf{Z}\left|\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{N}\right.\right\}$，则 $D=$ $\{0,1,2,5\}$．

9. [考点 3、4]给出下列集合：

①$\{(x,y)|x\neq1,y\neq1,x\neq2,y\neq-3\}$；

②$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x\neq1,\\y\neq1\end{cases}\text{且}\begin{cases}x\neq2,\\y\neq-3.\end{cases}\right.\right\}$；

③$\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x\neq1,\\y\neq1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x\neq2,\\y\neq-3.\end{cases}\right.\right\}$；

④$\{(x,y)|[(x-1)^2+(y-1)^2]\cdot[(x-2)^2+(y+3)^2]\neq0\}$．

其中能表示"在直角坐标系 xOy 平面内，除去点 $(1,1)$，$(2,-3)$ 之外的所有点的集合"的序号有 ③④．

10. [考点 4]数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则 $\dfrac{1+a}{1-a}\in A(a\neq1)$．若 $\dfrac{1}{3}\in A$，则集合中的其他元素为 $-\frac{1}{2}$，2，-3

三、解答题（$10'\times5=50'$）

11. [考点 4]用适当的方法表示集合（1）（2）（3），用另一种方法表示集合（4）（5）（6）．

（1）21 的正约数构成的集合；$\{1,21,3,7\}$

（2）x^2-9 的一次因式组成的集合；$\{x+3,x-3\}$

（3）直角坐标系下第二象限内的点组成的集合；$\{(x,y)|x<0,y>0\}$

（4）$\left\{x\left|x(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x^2-2)(x^2+2)=0,x\in\mathbf{Q}\right.\right\}$；$\{0,\frac{1}{2},-1\}$

（5）$\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

（6）$\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{6},\dfrac{5}{7}\right\}$．

$\{\frac{a}{b}|a\in N^+,b\in N^+,b=a+2\}$

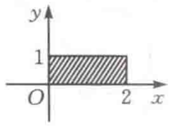
(5) $\{(0,5),(5,0),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$

(6) $\{x|x=\frac{n}{n+2},n\in N^+,n\leq5\}$

12. [考点 4]（1）用描述法表示图中阴影部分（不含边界）的点构成的集合；

（2）用图形表示不等式组 $\begin{cases}3x-2\geqslant1,\\2x-1<5\end{cases}$ 的解集．

(1) $\{(x,y)|0<x<2,0<y<1\}$



第 12 题图

13. [考点 2]（2011，沈阳模拟）$\{x,x^2-x,x^3-3x\}$ 能表示一个集合吗？如果能，说明理由；如果不能，加什么条件才能使它表示一个集合．

不能　$x\neq0$　$x\neq-1$　$x\neq2$　$x\neq-2$

14. [考点 3]已知集合 $M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Q}\}$，若 $x_1\in M$，$x_2\in M$．

（1）试问：$x_1\cdot x_2$，$\dfrac{x_1}{x_2}$ 是否属于 M？为什么？

（2）若将 M 改为 $M=\{x|x=a+b\sqrt{2},a,b\in\mathbf{Z}\}$，试问：$x_1\cdot x_2$，$\dfrac{x_1}{x_2}$ 是否属于 M？为什么？

15. [考点 3、5]已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(k\geqslant2)$，其中 $a_i\in\mathbf{Z}(i=1,2,\cdots,k)$．由 A 中的元素构成两个相应的集合：

$$S=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a+b\in A\};$$

$$T=\{(a,b)|a\in A,b\in A,a-b\in A\},$$

其中 (a,b) 是有序数对．集合 S 和 T 中的元素个数分别为 m 和 n．

若对于任意的 $a\in A$，总有 $-a\notin A$，则称集合 A 具有性质 P．

（Ⅰ）检验集合 $\{0,1,2,3\}$ 与 $\{-1,2,3\}$ 是否具有性质 P，并对其中具有性质 P 的集合，写出相应的集合 S 和 T；

（Ⅱ）对任何具有性质 P 的集合 A，证明：$n\leqslant\dfrac{k(k-1)}{2}$；

（Ⅲ）判断 m 和 n 的大小关系，并证明你的结论．

10:30 — 5:30 7个小时

高考真题赏析

$1+2=3$ $1+0=1$ $-1+0=-1$ $-1+2=1$

1. (2012 年江西高考题)若集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $\{z|z=x+y,x\in \mathbf{A},y\in \mathbf{B}\}$ 中元素的个数为(C).
A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2
【解析】 当 $x=-1,y=0$ 时，$z=-1$；当 $x=-1,y=2$ 时，$z=1$；当 $x=1,y=0$ 时，$z=1$；当 $x=1,y=2$ 时，$z=3$. 由集合元素互异性知 $\{z|z=-1,1,3\}$，故选 C.
【答案】 C

5-1 5-2 5-3 5-4

2. (2012 年全国高考题)已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)|x\in \mathbf{A},y\in \mathbf{A},x-y\in \mathbf{A}\}$，则 B 中所含元素个数为(D).
A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 10

(5,1)(5,2)(5,3)(5,4) (4,1)(4,2)(4,3) (3,1)(3,2) (2,1)

【解析】 $B=\{(5,4),(4,3),(3,2),(2,1),(5,3),(4,2),(3,1),(5,2),(4,1),(5,1)\}$，故选 D.
【答案】 D

3. (2011 年浙江高考题)设 a,b,c 为实数，$f(x)=(x+a)(x^2+bx+c)$，$g(x)=(ax+1)(cx^2+bx+1)$. 记集合 $S=\{x|f(x)=0,x\in \mathbf{R}\}$，$T=\{x|g(x)=0,x\in \mathbf{R}\}$. 若 $|S|$，$|T|$ 分别为集合 S,T 的元素个数，则下列结论不可能的是(　　).
A. $|S|=1$ 且 $|T|=0$　　B. $|S|=1$ 且 $|T|=1$
C. $|S|=2$ 且 $|T|=2$　　D. $|S|=2$ 且 $|T|=3$
【解析】 取 $a=0,b=0,c>0$，则 $|S|=1$ 且 $|T|=0$，故 A 有可能.
取 $b=2a,c=a^2(a\neq 0)$，则 $f(x)=(x+a)^3$，故 $|S|=1$，此时 $g(x)=(ax+1)^3$，则 $|T|=1$，故 B 也有可能.
取 $c=\frac{b^2}{4}$，$a\neq 0$ 且 $a\neq \frac{b}{2}$，则 $f(x)=(x+a)\cdot\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$，
故 $|S|=2$，此时 $g(x)=(ax+1)\left(\frac{b}{2}x+1\right)^2$，
$\because -\frac{1}{a}\neq -\frac{2}{b}$，$\therefore |T|=2$，即 C 有可能.
若 $|T|=3$，则 $g(x)=0$ 有三个不同的根 $x_1=-\frac{1}{a}(a\neq 0)$，$x_2,x_3$，且 $x_2\neq x_3$，$x_2\neq -\frac{1}{a}$，$x_3\neq -\frac{1}{a}$.
从而 $f(x)=0$，有根 $-a,\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$，此时 $\frac{1}{x_2}\neq\frac{1}{x_3}$，$\frac{1}{x_2}\neq -a$，$\frac{1}{x_3}\neq -a$，故 $|S|=3$，即 D 不可能，故选 D.
【答案】 D

4. (2010 年广东高考题)在集合 $\{a,b,c,d\}$ 上定义两种运算 $\oplus$ 和 $\otimes$ 如下：

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	b	b	d

$\otimes$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	c	a
d	a	d	a	d

第 2 题图

那么 $d\otimes(a\oplus c)=$(A).
A. a　　B. b　　C. c　　D. d
【解析】 由上表，知 $d\otimes(a\oplus c)=d\otimes c=a$，故选 A.
【答案】 A

$-\frac{1}{2}=m$

5. (2010 年福建高考题)设非空集合 $S=\{x|m\leqslant x\leqslant l\}$ 满足：当 $x\in S$ 时，有 $x^2\in S$. 给出如下三个命题：
①若 $m=1$，则 $S=\{1\}$；
②若 $m=-\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{4}\leqslant l\leqslant 1$；　$x\in S$, $x^2\in S$
③若 $l=\frac{1}{2}$，则 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$.　1
其中，正确命题的个数是(D).
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3
【解析】 对于①，当 $m=1$ 时，$S=\{x|1\leqslant x\leqslant l\}$，此时 $1\leqslant x^2\leqslant l^2$.
若 $x^2\in S$，则 $l^2\leqslant l$，即 $0\leqslant l\leqslant 1$. 又 $l\geqslant 1$，所以 $l=1$，故①正确.
对于②，当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$S=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant l\right\}$.
若 $-\frac{1}{2}\leqslant l<0$，则 $x^2\geqslant 0>l$，不符合 $x^2\in S$；
若 $0\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}$，则 $0\leqslant x^2\leqslant\frac{1}{4}$，要满足 $x^2\in S$，需要 $\frac{1}{4}\leqslant l$，
所以 $\frac{1}{4}\leqslant l\leqslant\frac{1}{2}$；
若 $l>\frac{1}{2}$，则 $0\leqslant x^2\leqslant l^2$，要满足 $x^2\in S$，需要 $l^2\leqslant l$，
所以 $\frac{1}{2}<l\leqslant 1$.
综上可得 $\frac{1}{4}\leqslant l\leqslant 1$. 故②正确.
对于③，当 $l=\frac{1}{2}$ 时，$S=\left\{x\middle|m\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，
若 $m<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $m^2>\frac{1}{2}$，
此时 $0\leqslant x^2\leqslant m^2$，不满足 $x^2\in S$；
若 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$，则 $0\leqslant m^2\leqslant\frac{1}{2}$，
此时 $0\leqslant x^2\leqslant\frac{1}{2}$，满足 $x^2\in S$；
若 $m>0$，则 $m^2<m$，不满足 $x^2\in S$.
综上可得 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant m\leqslant 0$. 故③正确.
【答案】 D

高考考情分析

本节的集合元素个数求解及集合信息迁移是高考热点，主要考查集合元素的互异性及新信息的理解能力，会综合函数、不等式等相关知识，常以选填题形式出现，属中档题.

1.1.2 集合间的基本关系

课标解读

1.（★★★）能识别给定集合的子集，理解子集、真子集的概念，并掌握其记法和读法.

2.（★★★★）理解两集合相等的含义，会用子集的观点来解释两个集合相等.

3.（★★★★）在具体情境中了解空集的含义并理解空集是任何集合的子集的规定.

4.（★★★★★）初步认识 Venn 图并会用 Venn 图来表示两个集合的关系，能借助集合关系与其特征性质之间的关系来研究有关集合的问题.

学法导引

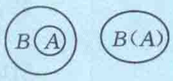
本讲学习的重点是理解集合之间的包含关系，会由相等集合的条件解决一些问题，同时会写出给定集合的子集，特别要注意空集在具体情境中对解题的影响，并注重数形结合、分类讨论思想在研究集合关系时的应用.

考点分类精讲

考点1 子集与空集

核心总结

1. 子集的概念

文字语言	符号语言	图形语言
集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，就说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的子集	$A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）	

2. 空集

(1)定义：不含任何元素的集合叫做空集；

(2)用符号表示为：$\varnothing$；

(3)规定：空集是任何集合的子集.

考题1 已知集合 M 满足 $\{1,2\}\subseteq M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，写出集合 M 所有可能情况.

1,2.

【点拨】 由 $\{1,2\}\subseteq M$，则 M 中肯定含有元素 1，2，而 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，则 M 中的元素只能是 1，2，3，4，5 中几个. 两个条件一结合，就能得出结论.

【解析】 $\because \{1,2\}\subseteq M$，

$\therefore 1\in M, 2\in M$，

又 $\because M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，

$\therefore M$ 是含有 1，2 的 $\{1,2,3,4,5\}$ 的子集，

$\therefore M$ 的所有可能情况是 $\{1,2\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,5\}$，$\{1,2,4,5\}$，$\{1,2,3,4,5\}$ 共 8 个.

考题2 下列集合中：①$\{0\}$；②$\{x\mid x=n^2+1, x<0, n\in\mathbf{R}\}$；③$\{\varnothing\}$；④$\varnothing$；⑤$\{x\mid x=\sqrt{-2-n^2}, n\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\}$；⑥$\{(0,0)\}$，是空集的为________.（只填序号）

【点拨】 空集是指不含任何元素的集合，而与元素是否等于 0 无关.

【解析】 ①中有元素 0，③中有元素 $\varnothing$，⑥中有元素 $(0,0)$，它们都不是空集；

导师·导学

关于子集与空集概念几个必须注意的问题

1.“A 是 B 的子集”的含义是：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，即由任意 $x\in A$ 能推出 $x\in B$.

2. 不能把“$A\subseteq B$”理解成“A 是 B 中部分元素组成的集合”，因为当 $A=\varnothing$ 时，$A\subseteq B$，但 A 中不含任何元素；又当 $A=B$ 时，也有 $A\subseteq B$，但 A 中含有 B 中的所有元素，这两种情况都有 $A\subseteq B$.

【拓展】 当 A 不是 B 的子集时，我们记作“$A\not\subseteq B$”（或 $B\not\supseteq A$）.

3. 如 $3\in\{1,3,5,7,9\}$，$2\notin\{1,3,5,7,9\}$，因此，$3\subseteq\{1,3,5,7,9\}$ 是错误的，但 $\{3\}\subseteq\{1,3,5,7,9\}$ 是正确的.

题型·方法

子集与空集

1. 关于子集的题型与方法

(1)依据子集定义，可根据集合 M 中所含元素的个数进行分类讨论；

(2)由于每个可能的集合 M 必含有元素 1，2，那么问题就归结为 3，4，5 这三个元素的添加了，即求集合 $\{3,4,5\}$ 非空子集的个数. 那么求出 $\{3,4,5\}$ 非空子集的个数，就等于求出了 M 的个数.

这一解题的两个步骤很好地体现了两种重要的数学思想——分类思想与化归思想.

2. 空集就像一个无处不在的幽灵，解题