高等专科学校通用教材

概率论与数理统计

全国工科院校应用概率统计委员会
概率统计教材编写组

主　编　戴俭华
副主编　孙光亮　蔡德亲

安徽科学技术出版社

高等专科学校通用教材

概率论与数理统计

全国工科院校应用概率统计委员会
概 率 统 计 教 材 编 写 组 编

主　编　戴俭华
副主编　孙光亮　蔡德亲

编　者　（以姓氏笔划为序）
王化文　严广松　张仁达
侯紫燕　徐　军　梁方楚

(皖)新登字 02 号

责任编辑:徐　风

封面设计:王国亮

高等专科学校通用教材

概率论与数理统计

全国工科院校应用概率统计委员会

概率统计教材编写组　编

安徽科学技术出版社出版

地址:合肥市九州大厦八楼

邮政编码:230063

新华书店经销

合肥市总工会义兴印刷厂印刷

开本:787×1092　1/32　印张:7.75　字数:16 万

1994 年 7 月第 1 版　1994 年 7 月第 1 次印刷

印数:9 150

ISBN7-5337-1092-4/O·28　定价:6.50 元

内 容 提 要

本书为专科学校《概率论与数理统计》通用教材。前五章为概率论部分，适合只讲授概率论的专业，第六、七、八章为数理统计基本内容，第九章回归分析与方差分析是作为数理统计的应用部分，各校可根据教学时数与专业需要，有选择地讲授后四章内容；

为了便于教学，编者又专门为本书提供一册教学参考书，书中附有全部习题的解答。

前　　言

全国工科院校应用概率统计委员会于1993年7月，在黄山召开了第二届工科院校概率统计教学研究与应用成果学术交流会。会议认为，目前国内缺少供专科学校使用的“概率论与数理统计并重”的少学时教材。因此，委员会根据教材建设的有关精神和与会院校的要求，组织了部分院校，成立概率统计教材编写组，并于1993年10月在合肥工业大学召开了编写工作会议，在广泛交流各校的教学经验基础上，共同拟订大纲和编写原则，着手合作编写此书。

本教材在编写过程中，注意到以下几方面：

(1)本书内容包括概率论和数理统计两部分，两者并重；

(2)根据专科学校学制与要求，在选材上注重各种概率统计方法的实用价值，在编写方法上力求纲目分明，叙述清晰，突出基本的概念、理论、方法和计算；

(3)本书适用于各类高等专科学校、职工大学和业余大学的教学，也可供工程技术人员及经济管理人员作为自学读本；

(4)本书教学时数约40～50学时，少学时专业可删去打*的内容，必要时可删去第三章(二维随机变量)。在例题与习题的配备上，难易适中，份量恰当。

参加本书编写的作者有青岛建筑工程学院孙光亮、重庆兵器工业职工大学张仁达、宁波高等专科学校梁方楚、解放军

汽车管理学院徐军和王化文、河南纺织工业专科学校侯紫燕和严广松、海南大学蔡德亲和合肥工业大学戴俭华，戴俭华担任主编，孙光亮和蔡德亲担任副主编。

参加本书审稿的同志有解放军汽车管理学院许依群、合肥工业大学杨杏娣、华东冶金学院潘慰。

本书的全部编写工作是在全国工科院校应用概率统计委员会交流培训部直接主持下进行的。参加编写的上述院校给予了大力支持，谨向他们致谢。

由于水平所限，加之时间仓促，谬误之处难免，希望使用本书的同行和读者批评指正。

编 者

1994 年 5 月

目　录

附表

第一章　随机事件及其概率

人们在生产实践、科学研究、日常生活中，会遇到各种各样的现象。有一类现象，在一定条件下必然会发生或必然不会发生。例如，在标准大气压下，纯水加热至100℃时沸腾现象是必然会发生的；而在相同条件下水要结冰是必然不会发生的。这种在一定条件下必然会发生或必然不会发生的现象称为**确定性现象**。还有一类现象，在一定条件下可能发生也可能不发生。例如，任抛一枚质地均匀的硬币，观察出现“正面”向上或“反面”向上的情况；任购一张奖券，看其号码是否恰好“中奖”等。这种在一定的条件下可能发生也可能不发生的现象称为**随机现象**。

人们经过长期的实践和研究，发现随机现象虽就每一次观察或试验结果来说，具有不确定性，但在大量重复观察或试验中，其结果却呈现出一定的规律性。例如任抛一枚质地均匀的硬币，在大量重复试验中，我们会发现，其出现正面向上的次数和出现反面向上的次数大体相等，在大量重复试验中，随机现象所呈现出的~~这种~~规律性，称为**统计规律性**。在本章中，我们将介绍诸如随机事件、随机事件的概率等概率论中的一些基本概念和基本理论。

§1.1 随机事件

一、随机试验

为了研究问题的方便，我们把对随机现象进行的观察、实验、试验等过程，统称为**随机试验**，简称为**试验**，通常用大写英文字母E表示。

例1 某射手进行射击时，观察其命中的环数，是随机试验，记为E_1。

例2 任抛一枚质地均匀的硬币，观察出现正面或反面的情况，是随机试验，记为E_2。

例3 在某一段时间内，记录某一电话交换台接到呼唤的次数，是随机试验，记为E_3。

例4 在一批日光灯管中，任取一只测试其寿命，是随机试验，记为E_4。

从以上所列举的随机试验中，不难发现它们都具有如下两个特点：

(1)在相同条件下，试验可以重复进行；

(2)试验的所有可能的结果都能知道，且不只一个，但每一次试验，究竟会出现哪个可能结果，试验前是无法确定的。

今后我们所提及的试验，均指随机试验，它都具有以上所提到的两个特点。

二、随机事件的概念

1.随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的现象称为随机

事件，简称为事件，通常用大写英文字母 A、B、C 等表示。例如在试验 E_1 中，A_n＝“击中 n 环”($n=0,1,2,\cdots10$)、B＝“击中奇数环”等都表示试验 E_1 中的事件。

2. 基本事件

在随机试验中，每一个可能发生的，不可再分解的最简单的随机事件，称为**基本事件**。例如 E_1 中的 A_n＝“击中 n 环”($n=0,1,2,\cdots10$)，都是基本事件。在随机试验中，能够分解为两个或两个以上基本事件的随机事件，称为**复合事件**。例如 E_1 中的事件 B＝“击中奇数环”，就是一个复合事件，它由 5 个基本事件构成。

3. 必然事件和不可能事件

在随机试验中，必然会发生的现象称为**必然事件**；必然不会发生的现象称为**不可能事件**。通常分别用字母 Ω 和 Φ 表示。例如 E_1 中 Ω＝“击中或未击中”是必然事件；Φ＝“击中 11 环”就是不可能事件。从本质上讲，必然事件和不可能事件都不是随机事件。为了研究问题的方便，人们把必然事件和不可能事件也当作随机事件来对待。

三、样本空间

为了揭示随机现象的规律性，首先需要清楚地了解所有基本事件。随机试验的基本事件的全体称为**样本空间**(也称基本事件空间)。通常用表示必然事件的字母 Ω 来表示(显然，样本空间本身是必然事件)。样本空间的元素是基本事件。样本空间的元素也称为样本点，通常用字母 ω 表示。如果用 Ω_1 表示 E_1 中的样本空间，则 $\Omega_1=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2\cdots\omega_{10}\}$，其中 ω_0 表示基本事件“未击中”，ω_n ($n=1,2,\cdots10$)表示基本事件“击中 n

环”。

由于样本空间就是基本事件的集合，因而在引进样本空间的概念之后，我们就可以利用集合论中的方法和理论来研究随机事件，这样做将为我们带来极大的方便。样本空间是一个集合，这个集合的元素就是试验中的基本事件(可用单点集表示)。样本空间的任一子集就是试验中的任一事件，它由一个或多个基本事件构成。我们说某一事件发生，是指该子集中至少有一个基本事件发生。必然事件显然就是样本空间 Ω、不可能事件就是样本空间中的空集 Φ。

四、事件间的关系及运算

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中，则称**事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B**，记为 B⊃A 或 A⊂B。例如在试验 E_4 中，如果用 t 表示日光灯管的寿命(小时)，设 $A=\{t|t\leqslant 1000\}$，$B=\{t|t\leqslant 1500\}$，则有 A⊂B。

对任意事件 A，显然有 Φ⊂A⊂Ω。

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B，并且事件 B 也包含事件 A，则称**事件 A 与事件 B 相等**，相等的事件具有相同的样本点。例如在试验 E_2 中，如果设 A=“出现正面”，B=“未出现反面”，则有 A=B。

3. 事件的和

两个事件 A 和 B 至少有一个发生，是一个事件，称为 **A 与 B 的和**，记为 A∪B。它是由 A 中的所有样本点或 B 中的所

有样本点组成的集合。

当 $A \subset B$ 时，有 $A \cup B = B$。事件的和运算可以推广到有限个或可列多个事件中去。事件 A_K($k=1,2,\cdots n$ 或 $k=1,2,\cdots$)中至少有一个发生是一个事件，称为**这 n 个事件或可列多个事件的和**。记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 或 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$。例如在试验 E_3 中，用 n 表示电话台在某一小时内接到的次数，如果设 $A=\{n|n>200\}$，$B=\{n|100<n<300\}$，则 $A \cup B=\{n|n>100\}$。

4. 事件的积

两个事件 A 与 B 同时发生是一个事件，称为**事件 A 与事件 B 的积**，它是由事件 A 和事件 B 的所有公共样本点组成的集合，记为 $A \cap B$ 或 AB。

当 $A \subset B$ 时，有 $A \cap B = A$。事件的积运算可以推广到有限多个和可列多个事件中去。事件 A_k($k=1,2,\cdots n$ 或 $k=1,2,\cdots$)中所有的事件同时发生是一个事件，称为**这 n 个事件或可列多个事件的积**，记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$。例如在试验 E_3 中，设 $A=\{n|n>200\}$，$B=\{n|100<n<300\}$，则有 $A \cap B=\{n|200<n<300\}$。

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生是一个事件，称为**事件 A 与事件 B 的差**。它是由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组

集合。记为 $A-B$。例如在试验 E_4 中，设 $A=$

$1000\}$，$B=\{t|t<5000\}$，则有 $A-B=\{t|t\geqslant 5000\}$。

互不相容（互斥）事件

果在一次试验中事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 A

，则称事件 A 与事件 B **互不相容（互斥）**。互不相容的

事件没有公共样本点。例如在试验 E_4 中,如果设 $A=\{t|t\leqslant 200\}$,$B=\{t|t>300\}$,则 A 与 B 是互不相容的,即 $A\cap B=\Phi$。

7. 对立(互逆)事件

如果在一次试验中,两个事件 A 和 B 不能同时发生,并且它们之中必有一个发生,即 $A\cap B=\Phi$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称事**件 A 与事件 B 相互对立(互逆)**。记为 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$。可以证明对任意事件 A,有 $\overline{\overline{A}}=A$;对任意事件 A 和 B 有 $A-B=A\overline{B}$;对 Ω 和 Φ 有 $\overline{\Omega}=\Phi$,$\overline{\Phi}=\Omega$。例如在 E_2 中有 $A\cap B=\Phi$,$A\cup B=\Omega$,即 A(出现正面)与 B(出现反面)是相互对立的事件。

事件间的关系及运算,可借助于平面图形直观地表现出来,以帮助我们加深理解(图 1.1.1)。

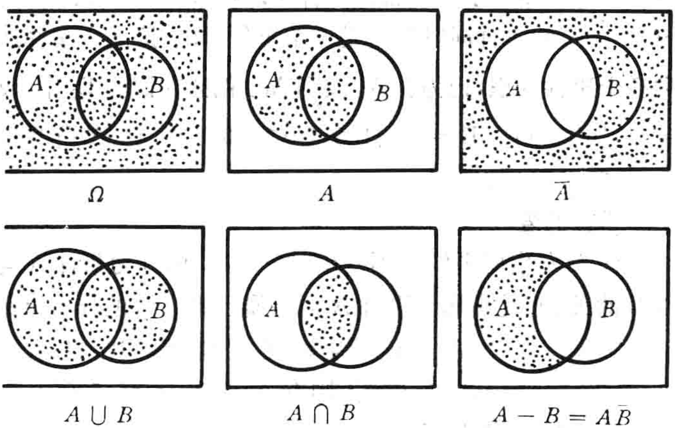

图 1.1.1

从以上的讨论中不难看出,事件间的关系及运算同集合

论中集合间的关系和运算是一致的。运用集合论的理论和方法可以证明，随机事件的运算也和集合间的运算一样，满足下列运算规律。设 A、B、C 是任意事件，则有

交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$。

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$。

对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

例 5　设 A、B、C 是任意三个事件，试用其表示下列各事件。

（1）　D="A 发生而 B、C 不发生"；

（2）　Q="A、B、C 中不多于两个发生"；

（3）　F="A、B、C 中至少有一个发生"；

（4）　G="A、B、C 都不发生"；

（5）　E="A、B、C 中恰有一个发生"。

解　根据事件间的关系和运算可得：

（1）　$D=A\overline{B}\,\overline{C}$；

（2）　$Q=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；

（3）　$F=A\cup B\cup C$；

（4）　$G=\overline{ABC}$；

（5）　$E=A\overline{BC}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{AB}C$。

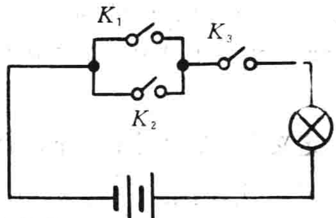

图 1.1.2

利用事件间的关系和运算规律，还可以得到其他表达形式，请读者自己完成。

例6 在如图1.1.2所示的电路图中，设 A_k="K_k 闭合"($k=1,2,3$)；B="灯亮"，试用 A_k 表示 B 和 $\overline{B}$。

解 根据题意和事件间的运算关系不难看出，$B=(A_1\cup A_2)A_3=A_1A_2\cup A_2A_3$；$\overline{B}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{A}_3=\overline{A}_1\,\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$。

§1.2 随机事件的概率

一、随机事件的频率

在随机试验中，某一事件的发生具有一定的偶然性，但在大量重复试验中的却会呈现出一定的规律性。实践告诉我们，在一定条件下，随机事件发生的可能性是事件自身的属性，采用适当的方法是可以度量的。我们希望能用一个数值来表示事件发生的可能性大小。

人们在长期实践中发现，如果在 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，比值 $\frac{m}{n}$，即所谓事件发生的频率，当 n 较大时，是用来近似表示事件发生的可能性大小的最直观、最简单的方法。

定义1 在相同条件下进行 n 次重复试验，如果事件 A 发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**。记为

$$f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

例如，在历史上有许多著名的科学家，为了研究事件发生的概率，曾经做过千万次的抛币试验，并统计了 n 次试验中正