如何做好解答题？高频考点在哪里？高分秘诀是哪些？
都可在这本书中找到答案。

清华考研无忧系列

2016考研数学

强化夺冠经典600题

张同斌　林　浩◎主　编

高分目标 分享成功人士力作，跟引路人，实现考研梦

高分态度 重点突出强化拔高，各个击破，努力是态度

高分王道 六百题强化勇突围，考点串联，高分是王道

清华大学出版社

清华考研无忧系列

2016考研数学

强化夺冠经典600题

阜阳师范学院图书馆
藏书

张同斌　林　浩◎主编

清華大學出版社
北京

内容简介

本书是为参加全国硕士研究生入学统一考试的考生在强化提高阶段设计的复习用书。根据作者多年评阅试卷和20余年考研辅导班授课经验，精心编排了600题，主要以解答题为主，其中高等数学330题，线性代数和概率论与数理统计各137题和133题，这些题目覆盖了数学考试大纲的所有考点，具有较强的代表性。对每一道题目，详尽给出考点分析，进行详细解答，尽可能给出多种解题方法、并进行解题方法、技巧的归纳总结，开阔考生的视野，达到触类旁通、举一反三的效果。本书适合数学一、数学二、数学三考生使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

2016考研数学强化夺冠经典600题/张同斌，林浩主编.—北京：清华大学出版社，2015
(清华考研无忧系列)

ISBN 978-7-302-39724-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①张…②林… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第065979号

责任编辑：朱敏悦
封面设计：汉风唐韵
责任校对：王凤芝
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：三河市君旺印务有限公司
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：26.5　　**字　　数**：641千字
版　　次：2015年6月第1版　　**印　　次**：2015年6月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：45.00元

产品编号：061861-01

前　言

数学是全国硕士研究生入学统一考试工学类、经济学类和管理学类考生必考的课程，考试内容包括高等数学（数学一、数学三占 56%，数学二占 78%）、线性代数（数学一、数学二、数学三占 22%）和概率论与数理统计（数学一、数学三占 22%）。从试卷结构来看共 23 个题目，其中 8 个（单项）选择题（共 $4\times8=32$ 分）、6 个填空题（共 $4\times6=24$ 分）、9 个解答题（共 94 分），满分为 150 分。解答题包括计算题、证明题和应用题等，属于主观题，占到了 62.7%，能否快速、准确地解答主观题，是考生取得优异成绩的基础与关键。

主观题主要考查考生对基本概念、基本理论与基本方法理解与掌握的基础上综合分析、解决问题的能力。以历年考试成绩统计看，得分率一般，基于此，作者编写了符合大纲要求，接近真题难度，体现命题规律的《2016 考研数学强化夺冠经典 600 题》，以期能够通过这些"好题"的训练解决主观题得分率一般的短板，这本书与《2016 考研数学基础通关经典 1000 题》是姊妹篇，如果说《2016 考研数学基础通关经典 1000 题》对于夯实数学基础、提高客观题的解题能力有较大帮助的话，这本《2016 考研数学强化夺冠经典 600 题》对提高综合分析解决数学问题的能力起到锦上添花的作用。

本书具有如下特色：

1. 将浩如烟海的数学题目通过 600 题浓缩在有限的考点中，每个考点给出了题型变化，使考生从战略上能够把握数学的命题方向，从战术上掌握每个考点以不同形式命题时的应对方法，从而使考生从一个较高的角度俯瞰考研数学，把握考研数学全貌，对全面提高数学成绩起到引领作用。

2. 题目的"口味"与真题相一致，难度达到或略高于真题，注重数学思维的培养，通过题目的训练，使考生能够在把握数学命题方向的基础上，提高解答题的速度与正确率。

3. 题目选取完全基于最新数学考试大纲并融入近年来命题规律，有些题目是编者根据三十年的教学积累以及二十余年考研辅导班的经验有针对性编制而成，具有较好的前瞻性与预测性。题目虽然是针对主观题设计，对主观题强化提高有较大的促进作用，同时对于进一步深化提高解答客观题的能力也有较大的帮助。

4. 每个题目都给出了详细的分析与解题过程，有的给出了一题多解，提高考生的发散思维能力，同时使考生能够在此基础上选择适合自己的较简捷的解法，并且规范的解题过程对考生的考试答卷起到示范作用。

本书适合数学一、数学二、数学三考生使用，对于数学一、数学二、数学三分别适用的题目书中在题号右上角以[1]、[2]、[3]表示，书中收录了适量真题，对于真题，在题后以"年份"[卷种]的形式表示，如 120.（2013[1]）表示 120 题选自 2013 年数学一真题，448.（2010[2][3]）表示 448 题选自 2010 年数学二与数学三真题，便于读者识别。

在本书的编写过程中，作者参考了国内外许多著作与教材，谨向有关作者表示衷心感谢！

限于作者水平，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者和同行批评指正。

张同斌

2015 年 5 月

目　　录

Contents

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一部分　精编解答题

高等数学

【考点 1】 求函数极限.

【题型变化】 (1)利用洛必达法则求未定式$\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”},\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”},\text{“}\infty-\infty\text{”},\text{“}0\cdot\infty\text{”},\text{“}1^{\infty}\text{”},\text{“}0^{0}\text{”},\text{“}\infty^{0}\text{”}\right)$的极限.

(2)已知一个极限求与其相关的另一个极限.

(3)已知极限求参数.

(4)求分段函数在分段点的极限.

1. 设 $f(x)=e^{x}$,且 $\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=xf[xu(x)]$,求$\lim\limits_{x\to0}u(x)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{\tan x-x}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{x^{x}-\sin^{x}x}{x\sin^{2}x}$.

4. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{0}^{x}\left[\int_{0}^{u^{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x\ln(1-x^{2})}$.

5. (2004[3])求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^{2}x}-\dfrac{\cos^{2}x}{x^{2}}\right)$.

6. (2014[1][2][3])求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{1}^{x}\left[t^{2}\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

7. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\sin x)]}{\tan^{4}x}$.

8. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^{2}+bx+1}+2x)=3$,求常数 a,b.

9. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^{2}x}}$.

10. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x^{3}}$.

11. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x)^{x}-1}{x(e^{x^{2}}-1)}$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^{3})}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^{2}-ax-1}{1-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x}, & x>0,\end{cases}$问当 a 为何值时,极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$存在.

13. 求极限$\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}\right]$.

14. (2005[3])求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

15. 设 $f(x)$是连续函数,$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{2^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos 2x}}=8$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

16. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x+f(x)}{x^3}=2$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

17. 设函数 $f(x)$具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{x^3\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+xe^{\frac{1}{x}})$.

19. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

【考点 2】 求数列极限.

【题型变化】 (1)利用函数极限求数列极限.

(2)利用夹逼定理求数列极限(函数极限).

(3)利用单调增(减)有上界(下界)数列必收敛求数列极限.

20. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

21. 设函数 $f(x)$在点 $x=0$ 的某一邻域内可导,且 $f(0)=1$,$f'(0)=-1$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(e^{\frac{1}{n}}-1)\right]^{\frac{1}{1-f(\frac{1}{n})}}$.

22. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1>0$,$x_{n+1}=\ln(1+x_n)(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$;

(Ⅲ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

23[1][2]. (Ⅰ)设$\{x_n\}$是单调递减数列,$\{y_n\}$是单调递增数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.
证明:数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(Ⅱ)证明:数列 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

24. 设有数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$,其中 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}$,$b_n=\int_0^n\sqrt{x}\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$;

(Ⅱ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}$存在,并求该极限.

25. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{e^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{e^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

26[1][2]. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_{n+1}=x_n^2+x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}$存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n+1}\right)$.

27[1][2]. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1, x_{n+1}=\dfrac{1+2x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$. 证明:数列$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【考点 3】 无穷小的比较.

【题型变化】 (1)比较两个或三个无穷小的大小(主要考客观题).

(2)已知两个无穷小的比较,求参数.

28. (2006[2])试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

29. 设 $f(x)$是满足$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=2$ 的连续函数,且当 $x\to0$ 时,$\int_0^{\sin^2 x}f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的 n 阶无穷小,求 n.

30. 设 $f(x)$为连续函数,且$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)-\sin x}{x^3}=1, F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$,当 $x\to0$ 时,$F(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 ax^k 为等价无穷小,其中 a 为非零常数,k 为正整数.

(Ⅰ)求 a 与 k 的值及 $f(0)$;

(Ⅱ)证明:$f(x)$在点 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

【考点 4】 函数的连续性与间断点的类型及判断.

31. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax+2x}{e^x-1}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{e^x-\sin x-1}{\ln\left(1+\frac{1}{2}x^2\right)}, & x>0\end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,求常数 a,b.

32. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin \pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\\ a & x=1,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{\pi}(x-1)}-1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

(Ⅰ)当 a 满足什么条件时,$x=1$ 是 $f(x)$的可去间断点?

(Ⅱ)当 a 为何值时,$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$是连续函数.

33. 设函数 $f(x)=x^{\sin x}, x\in(0,1]$,对于其他 x,$f(x)$满足 $3f(x+1)-f(x)=k$,其中 k 为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$在$(-1,0]$上的表达式;

（Ⅱ）问 k 为何值时，$f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

34. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-ax^2+bx}{x^{2n}+1}$是连续函数，求常数 a,b.

35. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\tan t-\tan x}}$，求 $f(x)$的间断点并判断其类型.

36. 设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\dfrac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}$，求 $f(x)$的间断点并判断其类型.

【考点 5】 闭区间上连续函数的性质.

【题型变化】 (1)利用零点定理证明函数零点(方程根)的存在性.

(2)利用最值定理与介值定理(推论)证明存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

37.（Ⅰ）证明：方程 $x^n+nx=2$ 存在唯一的正实根 a_n(其中 n 为正整数)；

（Ⅱ）计算$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{-2n}$.

38. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

39. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{b-a}{2}\right)$.

【考点 6】 导数的概念与几何意义.

【题型变化】 (1)利用导数定义求某些函数在特殊点的导数.

(2)利用导数定义或左、右导数讨论分段函数在分段点的可导性.

(3)求隐函数、参数方程所确定的函数[1][2]、积分上限函数对应曲线上某点处的切线与法线方程.

(4)已知一个极限，求函数在某点处的导数.

(5)已知函数在某点可导，求极限.

(6)曲线 $y=f(x)$与 $y=f'(x)$之间的关系.

40. 设 $f(x)=(x^2-1)\arctan\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$，求 $f'(1)$.

41. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$是区间$(-\infty,+\infty)$内的可导函数，试确定常数 a,b.

42. 设 $f(x)$是周期为 2 的周期函数，且在点 $x=1$ 处连续，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[f(x)+3]}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=2$，求曲线 $y=f(x)$在$(-1,f(-1))$点的切线方程.

43. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且对任意 x,y 都有 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$，$f'(0)=e$，求 $f(x)$的表达式.

44. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$其中 $\varphi(x)$具有二阶导数，且 $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=-1$.

(Ⅰ)确定常数 a 的值,使得 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续;

(Ⅱ)求 $f'(x)$;

(Ⅲ)讨论 $f'(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内的连续性.

45. 设函数 $F(x)=f(x)g(x)$,如果 $f(x)$在 x_0 点可导,$g(x)$在 x_0 点连续但不可导,证明:$F(x)$在 x_0 点可导$\Leftrightarrow f(x_0)=0$.

46. 设曲线 $y=f(x)$与曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}-1\right)=e^y$ 在点$(1,0)$处有公共切线.

(Ⅰ)求公共切线方程;

(Ⅱ)计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

47. 设 $f(x)$是周期为 3 的连续函数,在点 $x=0$ 的某一邻域内恒有

$$f(1+\tan x)-2f(1-\tan x)=6x+\tan^2x,$$

已知 $f(x)$在点 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$在点$(10,f(10))$处的切线方程.

48. 设函数 $f(x)$在 $x\leqslant x_0$ 时具有二阶导数,

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0, \end{cases}$$

试确定常数 a,b,c,使得 $F(x)$在点 x_0 处二阶可导.

49. 设函数 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内有定义,当 $0\leqslant x<1$ 时,$f(x)=x(x^2-1)$,且 $f(x+1)=af(x)$,试确定常数 a 的值,使 $f(x)$在点 $x=0$ 处可导,并求出此导数.

【考点 7】 各种类型函数的求导运算.

【题型变化】 (1)求分段函数的导数.

(2)求初等函数的导数.

(3)求隐函数的一阶、二阶导数.

(4)[1][2]求参数方程所确定的函数的导数.

(5)求幂指函数与连乘积形式函数的导数.

(6)求简单函数的高阶导数.

(7)求积分上限函数的导数.

50. 已知 $y=f\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)$,$f'(x)=\ln(1-x)$,求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

51. 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du\right]dt}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$为连续函数.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$在点 $x=0$ 处的连续性与可导性;

(Ⅱ)求 $f'(x)$.

52. 设 $f(x)$为可导函数,且 $f(0)=0$,n 为正整数,又 $F(x)=\int_x^0 t^{2n-1}f(x^n-t^n)dt$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{3n}}$.

53. 设函数 $f(t)=\lim\limits_{x\to 0}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xt}(t\neq 0)$.

(Ⅰ)求 $f^{(n)}(t)$;

(Ⅱ)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(t)}{nf(t)}$.

54. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$,$g(x)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \ln(1+x^2), & x<0, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))]\Big|_{x=0}$.

55. (2007[2])已知函数 $f(u)$具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定,设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

56. 设函数 $y=y(x)$由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$所确定.

(Ⅰ)求曲线 $y=y(x)$在点$(1,0)$处的切线方程;

(Ⅱ)[1][2]求曲线 $y=y(x)$在点$(1,0)$处的曲率.

57[1][2]. 设函数 $y=y(x)$由方程$\begin{cases} x=\displaystyle\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u, \\ y=(2-t^2)\mathrm{e}^{-(1-t)^2} \end{cases}$ 所确定,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=1}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=1}$.

58. 设函数 $y=y(x)$由方程 $\displaystyle\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x x\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ 所确定,求 $\mathrm{d}y|_{x=0}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

59. 试用变换 $x=\cos t$ 将微分方程$(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 化为以 t 为自变量的方程,并解方程.

【考点 8】 与微分中值定理相关的问题.

【题型变化】 (1)与微分中值定值相关的极限计算问题.

(2)利用罗尔定理证明 $f'(\xi)=0$ 或 $f''(\xi)=0$.

(3)利用拉格朗日中值定理、柯西中值定理以及泰勒中值定理证明与 ξ 相关的等式或不等式.

(4)关于两个中值 ξ,η 相关的证明问题.

60. 设 ξ 是函数 $f(x)=\arcsin x$ 在$[0,x]$或$[x,0]$上满足拉格朗日中值定理的中值,其中 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}\theta^2$.

61. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{\mathrm{e}}{n}-\arctan\dfrac{\mathrm{e}}{n+1}\right)$.

62. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上具有二阶连续导数,$f(0)=f(1)$,且当 $x\in(0,1)$时,$|f''(x)|\leqslant M$. 证明:对任意 $x\in(0,1)$,$|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}M$.

63. 设函数 $f(x)$的一阶泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2(0<\theta<1),$$

如果 $f(x)$具有三阶连续导数,且 $f'''(a)\neq 0$. 证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}$.

64. 设函数 $f(x)$在$[0,5]$上连续,在$(0,5)$内二阶可导,且 $3f(0)=\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=f(3)+f(4)+f(5)$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(Ⅰ)证明:存在 $\eta\in(0,3)$,使得 $f(\eta)=f(0)$;

(Ⅱ)证明:存在 $\xi\in(0,5)$,使得 $f''(\xi)=0$.

65. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)f(b)>0$,$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. 证明:对任意常数 k,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

66. 设 $0<a<b$,函数 $f(x)$,$g(x)$在$[a,a+b]$上连续,在$(a,a+b)$内可导,且 $f(a)=b$,$f(b)=a$,$f(a+b)=a+b$. 证明:至少存在一点 $\xi\in(a,a+b)$,使得 $f'(\xi)+g'(\xi)(f(\xi)-\xi)=1$.

67. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=f(1)=0$,如果 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值 $M>0$,证明:在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=M$.

68. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=f(1)$,常数 $a>0$,$b>0$. 证明:存在满足条件 $0<\xi<\eta<1$ 的 ξ,η,使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=0$.

69. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导$(0<a<b)$. 证明:存在 $\xi,\eta\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$.

70. (2013[1][2])设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数,且 $f(1)=1$. 证明:

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$;

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

71. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上具有三阶连续导数,且 $f(0)=-1$,$f(1)=-2$,$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 证明:在$(0,1)$内至少存在一点 ξ,使得 $f'''(\xi)=-24$.

72. 设函数 $f(x)$在$[0,a]$上连续,在$(0,a)$内可导,且 $f(0)=0$,$f(a)=1$. 证明对任意正常数 m,n,存在 $\xi,\eta\in(0,a)$,使得$\frac{m}{f'(\xi)}+\frac{n}{f'(\eta)}=m+n$.

73. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,对任意常数 $k>1$,有 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$. 证明:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

【考点 9】 不等式的证明.

【题型变化】 (1)利用拉格朗日中值定理证明不等式.

(2)利用函数的单调性证明不等式.

(3)利用求函数的最值证明不等式.

(4)利用泰勒公式证明不等式.

(5)利用曲线凹凸性的定义证明不等式.

74. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内二阶可导,如果在(a,b)内 $f''(x)<0$,证明:对任意 $x_1\neq x_2$,$x_1,x_2\in[a,b]$,有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

75. (2002[2])设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

76. (2012[1][2][3])证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

77. 证明:当 $0<x<1$ 时,$\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

78. 证明:当 $0<x<1$ 时,$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}<1$.

79. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a](a>0)$ 上可导,且 $f(0)=0,0<f'(x)<1$. 证明:

$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geqslant \int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$$

80. 证明:设 $p>1,q>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明:对任意 $x>0$,有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

81. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒有 $f''(x)<0(ab<0)$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{x}=k$(其中 k 为任意非零常数). 证明:在 (a,b) 内,恒有 $f(x)\leqslant(k+1)x$.

82. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续,且 $f(0)=0,f''(x)<0$. 证明:

(Ⅰ)对于任意 $x\in(0,+\infty)$ 及 $x_0\in(0,+\infty)$,有 $f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

(Ⅱ)对于 $x_i\in(0,+\infty)$ 及任意 $0<k_i<1(i=1,2,\cdots,n)$ 恒有:

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\geqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n),$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_n=1$.

【考点10】 函数的零点或方程根的个数.

83. 讨论曲线 $y=\ln x$ 与 $y=ax+b$(其中 $a>0$)交点的个数.

84. (2011[3])证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

【考点11】 函数的性态、函数的极值与最值.

【题型变化】 (1)求函数 $y=f(x)$ 或一元隐函数 $y=y(x)$ 的单调区间与极值.

(2)求函数曲线 $y=f(x)$ 或一元隐函数 $y=y(x)$ 的凹凸区间与拐点.

(3)[1][2]确定由参数方程确定的函数的性态.

(4)描绘函数 $y=f(x)$ 的图形(单调区间与极值、凹凸区间与拐点、渐近线).

(5)求闭区间上连续函数的最值.

(6)实际问题的最值问题.

(7)[3]导数在经济上的应用问题.

85. (2014[1])设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定,求 $f(x)$ 的极值.

86. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-y+1=e^y$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$ 在函数 $y=y(x)$ 的驻点对应的曲线上的点附近的凹凸性.

87. 设函数 $f(x)=nx(1-x)^n,x\in[0,1],n\in\mathbf{N}$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$;

(Ⅱ)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

88. 设 $\varphi(x)$ 为连续的正偶函数,$f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\varphi(t)\mathrm{d}t,x\in[-a,a]$.

(Ⅰ)证明:曲线 $y=f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅲ)如果 $f(x)$ 的最小值为 $\varphi(a)-a^2-1$，求 $\varphi(x)$.

89. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(4-t)e^{-t}dt$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值与最小值.

90[1][2]. (2011[2])设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{1}{3}, \\ y=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

91[3]. 设某商品的需求函数为 $Q=20-\frac{\sqrt{P}}{2}$，其 Q 为需求量，P 为价格.

(Ⅰ)求需求量对价格的弹性 $\frac{EQ}{EP}$；

(Ⅱ)设 $R(P)$ 为收益函数，证明：$\frac{dR}{dP}=Q\left(1-\frac{EQ}{EP}\right)$，并说明价格 P 在什么范围内变化时，总收益随 P 增加而增加，P 在什么范围内变化时，总收益随 P 增加而减少；

(Ⅲ)当 P 为何值时，总收益最大，最大值为多少；

(Ⅳ)当 $P=4$ 时，如果价格上涨 1%，总收益是增加还是减少，将变化百分之几？

【考点 12】 不定积分的计算.

【题型变化】 (1)不定积分的计算.

(2)分段函数的不定积分.

(3)函数记号的灵活表示与不定积分计算结合出题.

92. 计算不定积分 $\int \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$.

93. 计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^3}dx$.

94. 计算不定积分 $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$.

95. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^5(1+x^2)}dx$.

96. 计算不定积分 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos 2x}dx$.

97. 计算不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$.

98. (2003[2])计算不定积分 $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

99. (2009[2][3])计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx\ (x>0)$.

100. 计算不定积分 $\int \frac{\arccos\sqrt{x}-\ln 2x}{\sqrt{x}}dx$.

101. 计算不定积分 $\int \frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

102. 计算不定积分 $\int \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$.

103. 计算不定积分 $\int \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

104. 计算不定积分 $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

105. 计算不定积分 $\int \min(1,x^2)\,\mathrm{d}x$.

106. 设 $f(x)$是非负连续函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1\right]=\frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}$，求 $f(x)$.

107. 设$\frac{\ln x}{x}$是 $f(x)$的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

108. 设 $f(\cos^2 x)=\frac{x}{\cos x}$，求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

109. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

110. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$可导，$f(0)=1$，且 $f'(\mathrm{e}^x+1)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1$，求 $f(x)$.

【考点 13】 定积分的概念.

【题型变化】 (1)利用定积分的几何意义求定积分.

(2)利用定积分求和式极限.

111. 设 $y=y(x)$是$[0,2]$上的连续函数，且在任意点 $x(0<x<2)$处的函数增量 $\Delta y=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+\alpha$，其中 α 是 Δx 的高阶无穷小(当 $\Delta x\to 0$ 时)，已知 $y(1)=1$. 求定积分 $\int_1^2 y(x)\mathrm{d}x$.

112. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n}\right)^2\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right)^n}$.

【考点 14】 关于积分上限函数.

【题型变化】 (1)求积分上限函数的导数.

(2)求分段函数的积分上限函数的表达式.

(3)求积分上限函数的极值.

(4)求积分上限的二元函数的偏导数.

(5)可转化为积分上限函数的二重积分.

113. 设函数 $\varphi(x)=\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$，$x\in(-1,1)$，证明：$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2)$.

114. 设 $f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式.

115. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2(t>0)\}$，$f(x)$是可导函数，且 $f(0)=0$，$f'_+(0)=-1$，

求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\iint\limits_D f(t-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t\ln\cos t}$.

116. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，有 $\int_0^x f(x)f(x-t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{2x}-1$，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

【考点 15】 定积分与反常积分的计算.

【题型变化】 (1)求分段函数的定积分.

(2)当被积函数中含绝对值符号时，定积分的计算.

(3)利用积分区间的对称性与被积函数的奇偶性简化定积分的计算以及对称积分区间上非奇非偶函数的定积分的计算方法.

(4)求周期函数的定积分.

(5)被积函数中含积分上限函数的定积分的计算.

117. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\dfrac{x}{t}\left[g\left(2x+\dfrac{1}{t}\right)-g(2x)\right]$，$g(x)$ 的一个原函数为 $\arctan\dfrac{x}{2}$，计算定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

118. 设 $f(x)=\begin{cases}\arctan x, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{x^3}{1+x^2}, & x<0,\end{cases}$ 计算 $\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x$.

119. (Ⅰ)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$；

(Ⅱ)计算定积分 $\int_0^{\pi}x\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$.

120. 设 $f(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

121. (2013[1])计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$.

122. (Ⅰ)设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的连续函数，$g(x)$ 为偶函数，$f(-x)+f(x)=A$（A 为常数）. 证明：$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$；

(Ⅱ)计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

123. 设 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$，$f(0)=0$，计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

124. 计算定积分 $\int_0^a\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$（其中 a 为大于零的常数）.

125. 计算定积分 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

126. 设 $f(x)$ 是 $[1,\mathrm{e}]$ 上的连续函数，且 $f(x)=\ln^2 x-\int_1^{\mathrm{e}}xf(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_1^{\mathrm{e}}xf(x)\mathrm{d}x$.

127. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

128. 计算定积分 $\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}\frac{x^2}{(x^2-2x+3)^2}\mathrm{d}x$.

129. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}-1$,求 $\int_0^1 xf'(2x)\mathrm{d}x$.

130. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^6\sin x+\frac{\sin^6 x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$.

131. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

132. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 T 的非负连续函数,$s(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(Ⅰ)当 n 为正整数,且 $nT\leqslant x<(n+1)T$ 时,证明:$n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\leqslant s(x)\leqslant(n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$;

(Ⅱ)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{s(x)}{x}$;

(Ⅲ)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(x-[x])\mathrm{d}x$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

133. 设 $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$($n$ 为正整数).证明:

(Ⅰ)数列 $\{u_n\}$ 收敛;

(Ⅱ)$u_n+u_{n-2}=\frac{1}{n-1}(n>2)$;

(Ⅲ)$\frac{1}{2(n+1)}<u_n<\frac{1}{2(n-1)}$;

(Ⅳ)[1][3]级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

134. 设连续函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少,且 $f(x)>0$,如果 $u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x$,证明:数列 $\{u_n\}$ 收敛.

135. 将 $[a,b]$ 区间 n 等分,等分点 $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$(其中 $b>a>0,i=1,2,\cdots,n$).

(Ⅰ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$;

(Ⅱ)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

【考点16】 关于积分等式与不等式的证明.

136. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且不变号.证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

137. 设 $f(x)$ 为连续函数,证明 $\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left[\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$.

138. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)>0$,$f(x)$ 不变号.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sqrt[n]{g(x)}\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)记 $u_n=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\sqrt[n]{\ln(1+x)}\mathrm{d}x$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com