贵州民族大学学术文库

复合材料的多尺度分析

王自强◎著

西南交通大学出版社

贵州民族大学学术文库

贵州民族大学学术著作出版基金资助

复合材料的多尺度分析

王自强◎著

西南交通大学出版社
·成 都·

内容简介

本书针对复合材料及其结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合问题给出了多尺度计算方法及其理论分析. 本书共分为八章，第一章给出了复合材料的多尺度分析方法；第二章介绍了小周期参数的椭圆形方程的均匀化理论；第三章介绍了两种多尺度算法；第四、五章给出了小周期复合材料热传导问题的二阶双尺度展开式及其收敛性分析；第六至八章分别研究了复合材料板的弯曲、热-力耦合和力-电耦合问题的二阶多尺计算方法.

读者需具备微分方程、有限元方法和程序设计方面的初步知识即可学习本书.

本书可供统计学、信息与计算科学、数学与应用数学专业的本科生，应用数学、计算数学、运筹学与控制论和统计学专业的研究生，理工科相关专业的研究生，对微分方程数值解感兴趣的教师及科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

复合材料的多尺度分析 / 王自强著. —成都：西南交通大学出版社，2015.1
（贵州民族大学学术文库）
ISBN 978-7-5643-3479-6

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①复合材料 – 尺度分析 Ⅳ. ①TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 224333 号

贵州民族大学学术文库
复合材料的多尺度分析
王自强 著
*
责任编辑 黄淑文
封面设计 墨创文化
西南交通大学出版社出版发行
四川省成都市金牛区交大路 146 号 邮政编码：610031
发行部电话：028-87600564
http: //www.xnjdcbs.com
成都蓉军广告印务有限责任公司印刷
*
成品尺寸：170 mm × 230 mm 印张：10
字数：178 千字
2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-3479-6
定价：39.00 元

序 言

科学和工程中的许多问题都涉及多种尺度. 对于多尺度问题，由于其巨大的计算量使得传统的数值方法难以直接求解，因此人们希望找到既能节省计算时间又可以保持计算精度的多尺度计算方法，以求解多尺度问题. 目前为止，已经有一些经典的多尺度计算方法，如多重网格方法、均匀化方法、小波数值均匀化方法、多尺度有限元法、非均匀化多尺度方法等，这些方法在很多科学和工程领域中的应用已取得了一定的成功.

很多自然科学和工程的问题都具有多尺度的特征：例如材料的微损伤有大小不同的尺度，多孔介质的孔径大小存在着不同的尺度等；然而，在实际应用中却常常忽略多尺度特征而采用经验模型. 这些模型在应用中取得很大的成功，但经验模型也存在本身的局限性，主要体现在：（1）由于模型的误差很大，导致很多问题求解的精度不高；（2）完全忽略细观结构的影响，不能完全反应问题本身的自然特征；（3）缺乏可靠的理论基础.

因此，对于很多问题，人们希望建立能反映自然属性，精度更高且具有理论基础的多尺度模型. 在建立多尺度模型的同时，首先必需考虑问题自身的特征. 按照问题的特征可以把多尺度问题分为以下几类：

第一类：这类多尺度问题包含了孤立的瑕点或奇异点，比如裂痕、断层、突变以及接触线. 对于这类问题，只需要在孤立的瑕点或奇异点附近建立细观尺度的模型，其它区域满足某个宏观模型即可. 这样，细观尺度的模型只需在很小的计算区域里求解.

第二类：这类多尺度问题存在相关的宏观模型，但宏观模型不清晰，不能直接用于求解. 典型的一个例子是均匀化问题，这时系数为 $a^{\varepsilon}(x)=a(x,x/\varepsilon)$，其中 ε 表示细观尺度，虽然与宏观变量 x 相关的宏观模型确实存在，但宏观模型不明确.

第三类：这类多尺度问题的细观结构具有强烈的不规则性，难以找到相关的宏观模型.

随着多尺度模型的发展，还会出现更多类型的多尺度问题，对各类多尺度问题的求解引起了人们广泛的关注，也推动了多尺度计算方法的发展. 很多科学和工程问题都存在多尺度问题，多尺度模拟是一个典型的跨学科问题，它涉及数学、化学、物理、工程、计算机科学、环境科学、统计学、金融数学等学科，越来越受到科学家的重视. 很多科学和工程问题都存在多尺度问题. 对于多尺度问题，传统的数值方法需要在细尺度上求解，即要对求解区域进行非常精细的剖分. 精细剖分产生的节点过多，往往需要很大的计算量而导致计算时间过长. 若只在粗尺度上求解，则会忽略细尺度的信息. 因此，人们一直致力于寻求既可以节省计算时间又可以保持计算精度的新数值方法来求解多尺度问题，从而推动了多尺度计算方法的发展.

随着多尺度问题在工程中的应用越来越广泛，基于多尺度问题求解的复杂性，国内外学者提出了一些多尺度计算方法，这些数值方法主要可分为传统的多尺度计算方法和近年来发展的多尺度计算方法. 传统的多尺度计算方法包括多重网格法、自适应方法等. 其中多重网格方法通过粗网格校正和误差光滑技术，在减小工作量的同时保证了细尺度上解的计算精度. 然而，传统的多尺度计算方法需要在细观尺度上求解原问题，使得在解决很多实际问题时仍需要巨大的计算量，甚至难以求解. 因此，人们希望找到更有效的数值方法来求解多尺度问题.

近年来发展的多尺度计算方法包括多尺度有限体积法（Multi-sacle Finite Volume Method）、多尺度有限元法（Multi-seale Finite Element Methods）、均匀化方法（Homogenization Method）、非均匀化多尺度方法（Heterogeneous Multi scale Method）等.

多尺度有限体积法是由 Jnny 等提出的，多尺度有限元方法是由 Bbauska、Hou 等提出的. 这两类方法在宏观尺度上进行网格剖分，然后通过在每个单元里求解细观尺度的方程（构造线性或者振荡的边界条件）来获得基函数. 从而把细观尺度的信息反应到有限元法或有限体积法的基函数里，使宏观尺度的解包含了细观尺度的信息. 但多尺度有限元方法和多尺度有限体积法在构造基函数时需要较大的计算量.

均匀化方法是一种多尺度分析的方法. 该方法通过对单胞问题的求解，把细观尺度的信息映射到宏观尺度上，从而推导出宏观尺度上的均匀化等式，即可在宏观尺度上求解原问题. 均匀化方法在很多科学和工程应用中取得了

巨大成功. 崔俊芝院士在均匀化理论的基础上，提出了可计算的双尺度渐近分析模式，并给出了相应的有限元算法及其误差分析. 该算法可以很好地处理周期复合材料的热传导问题、弹性力学问题、热力耦合问题等. 该算法的优点是只需在宏观区域上求解均匀化问题的均匀化解，在参考单胞上求解局部单胞函数组，利用渐近展开式把均匀化解和局部单胞函数族组装成为求解周期复合材料的多尺度算法.

本书为复合材料热传导行为分析和复合材料板的热-力耦合、力-电耦合弯曲行为分析提供一套理论上可靠的高性能数学方法，为复合材料及其板、壳结构设计，性能优化提供技术支持和理论依据.

曹俊英
2014 年 4 月

前言

近年来，随着复合材料的广泛应用，复合材料及其结构的热-力耦合、力-电耦合响应机理、多尺度模型及其算法研究已经成为力学、数学、物理学与材料科学多学科交叉的前沿研究领域，成为高科技与国防重大装备研发中迫切需要解决的基础科学问题. 虽然对于这类问题的研究已有一定进展，众多学者已经对复合材料及其结构的力、热性能分析的计算方法进行了研究，并取得了重要成果，但是多限于复合材料块体结构的静态热-力耦合问题.

复合材料因其具有优良性能而被广泛应用于众多高科技领域，且大多被制备成板、壳形态的薄壁结构. 本书将围绕复合材料及其板结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合弯曲行为的数学模型和计算方法开展系统、深入研究. 主要研究内容包括：复合材料及其板结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合的宏-细-微观关联的弯曲模型，包括高阶多尺度方法及其收敛阶；高阶多尺度方法的有限元算法；典型复合材料及其板结构的热传导问题、热-力耦合和力-电耦合弯曲行为计算，以验证高阶多尺度模型和算法的有效性. 旨在为复合材料及其板、壳结构的设计、性能优化提供技术支持和理论依据. 本专著的研究结果和方法将对复合材料结构在恶劣服役环境下的防热、隔热、健康检测的模拟分析，加速复合材料在航空、航天、兵器和舰船中的应用，具有重要的指导意义.

随着复合材料结构应用的深入，复合材料结构的服役环境经历了从单一物理场到多物理场耦合的发展过程. 对复合材料结构性能的要求也从简单到复杂，例如航天飞行器的外壳结构为复合材料板、壳结构，它的服役环境是热-力耦合的环境，要求复合材料板、壳结构具有高比强度、高抗冲击能力、低热膨胀系数以及抗热损伤、抗辐射损伤等特点. 工作在热-力耦合环境下的复合材料板还有太阳能帆板、大型抛物面天线、高灵敏度射电望远镜的反射面、多层集成电路元件等. 目前在复合材料板热-力耦合问题的分析和数值计算方法方面尚缺少精细的分析技术与手段，现有的分析方法与数值算法不是特别理想. 因此，迫切需要寻求新的高精度数值计算方法，来研究复合材料板在多物理场耦合环境下的宏-细观行为，为材料优化设计和制备提供理论依据.

预测复合材料结构在一定载荷下的物理和力学行为，在数学上就是求解偏微分方程初边值问题，此类问题的系数是随机函数或周期振荡函数. 复合

材料的均匀化方法，就是寻求和原问题对应的均匀化的偏微分方程初边值问题，此问题描述复合材料的宏观行为，称为均匀化问题，其解称为均匀化解，方程的系数称为均匀化系数，这种方法称为数学均匀化方法，它已经成为预测复合材料等效性能的方法之一，目前仍在发展当中. 多尺度渐近展开法是一种重要的数学均匀化方法，该多尺度渐近展开法由 V. A. Marchenko 和 E. J. Khrouslylov 于 1964 年首次提出；随后，I. Babuska 和 O. A. Oleinik 等基于均匀化思想做了很大补充，解决了大量的数学理论问题，该方法对具有剧烈振荡系数问题的研究起了很大的促进作用；A. Bensoussan 和 J. L. Lions 介绍了具有小周期结构椭圆问题的一阶多尺度渐近展开；Weinan E 院士、张平文教授和明平兵研究员等对复合流体进行了多尺度分析和建模，提出了非均匀的多尺度分析方法（HMM）；T. Y. Hou 教授等对具有剧烈振荡系数的椭圆问题给出了多尺度有限元方法，其基本思想是在有限元的基函数构造中考虑了多种尺度效应，从数值计算和理论分析等角度提供了一个很好的方法，并将该方法应用到不可压缩流体和黏性流体模拟中；陈志明研究员对电磁学问题、多相流、多向异性孔洞介质等问题给出了相应的多尺度分析方法；崔俊芝院士对具有剧烈振荡周期系数和随机系数的热传导问题、弹性问题、网状及编织结构的复合材料提出了高阶多尺度方法，特别是二阶双尺度方法. 目前，多尺度方法已被广泛应用于统计学、力学、化学、生物学等相关领域.

在本书完成之际，我要感谢我的老师、同学、亲友、领导和同事. 他们一直以来的支持和帮忙让我克服了种种困难，并不断进步.

首先我要感谢培养和教育我的博士生导师崔俊芝院士. 感谢您将我带入更高的科研之门，使我在科研道路上找准方向.

同样的谢意致以我的硕士生导师郑州大学的宋士仓教授，感谢您在学习、生活和工作上对我的关心和鼓励！

感谢贵州民族大学校领导和理学院领导对我的大力支持和关心以及同事们的热情鼓励和帮助！同时感谢贵州民族大学学术出版基金和贵州省科技厅自然科学基金（〔2013〕2144）的资助.

此外，我要感谢我的父母、我的岳父、我的哥嫂、姐姐和亲戚们.

最后，我要对我的妻子曹俊英博士一直以来给予的鼓励和支持表示深切的感谢. 同时，我要感谢我的儿子王维麟，你是我努力奋斗的动力，你是我勇往直前的精神支柱！

谨以此书献给我的恩师和父母，以及所有给予我关心和帮助的人！

王自强

E-mail：wangzq@lsec. cc. ac. cn

目录

第1章 绪 论

1.1 研究背景

复合材料是利用适当的物理和化学方法，将两种或者多种不同性质的材料结合起来而形成的具有新性能的材料[1]. 一般而言，复合材料的性能优于组分的材料性能，并且有些性能是其组分材料所没有的. 复合材料按用途分为功能复合材料和结构复合材料两大类. 复合材料的主要应用领域有航空航天领域、汽车工业、化工、纺织、机械制造领域和医疗领域等. 随着复合材料应用的深入，复合材料的服役环境也经历了从单一的物理场到多物理场的发展过程. 对复合材料性能的要求也从简单到复杂. 例如，航天飞行器的外壳结构是由复合材料制成的，它的服役环境是热力耦合的环境，要求复合材料具有比强度高、高抗冲击能力、低膨胀系数以及抗热损伤、抗辐射损伤等特点. 工作在热力耦合环境下的复合材料结构还有核子反应堆的外壳结构，多层集成的电子元件等. 从而，复合材料及其结构的结构工程师在进行复合材料设计时，其目标也是从单一的目标设计发展到多目标设计. 因此，有必要研究复合材料及其结构在多物理场下的宏-细观力学行为，为材料设计提供理论依据.

1.1.1 复合材料宏-细观性能研究方法

复合材料的性能分析、计算是多学科交叉的课题. 从力学模型角度，有宏观力学和细观力学等研究方法；从数学模型角度，有均匀化和多尺度分析等研究方法.

宏观力学方法是在宏观工程层次上将复合材料看作均匀的连续介质，而忽略其细观结构的非均质性. 复合材料的细观力学方法的核心任务，是建立复合材料的宏观性能同其组分性能及其细观结构参数之间的定量关系. 只要宏观性能与细观结构参数之间的关系确定，就可以为复合材料的优化设计、

性能评价提供必要的理论依据及手段. 均匀化思想首先是在 1826 年由物理学家 Poisson[2]提出的，它针对一个可导球体嵌入到一个不可导介质中的模型，运用等效的思想得到感应电磁场理论.

Eshelby[3]在 1957 年发表了关于无限大体积内含有椭球夹杂弹性场问题的文章，作者针对含本征应变的椭球颗粒，给出了椭球内外弹性场的一般解，并利用应力等效方法得到了非均匀椭球颗粒的内外弹性场. 该方法后来发展成为 Eshelby 等效夹杂理论. 20 世纪 50 年代，Hershey[4]和 Kröner[5]先后提出自洽方法（self-consistent method)，研究晶体材料的弹性性能，他们把单晶体颗粒看做嵌入具有多晶结构宏观力学性能无限大均匀介质中的一个夹杂，然后利用 Eshelby 等效夹杂理论及相应的晶体颗粒取平均过程，求得单晶体力学性能和多晶体宏观力学性能之间的隐式关系.

1.1.2 数学均匀化方法

从偏微分方程的边值问题出发，寻求复合材料结构的均匀化问题及均匀化参数的方法，称为数学均匀化方法. 这种方法已经成为预测复合材料等效性能的方法之一. 在数学上，许多物理和力学问题，如复合材料的静弹性，黏性介质中的流动和热传输，非均匀介质的物理、力学性能评价等，均能通过具有振荡系数的二阶椭圆边值问题来表示. 数学的均匀化理论由 Lions[6]，Babuska[7]等人提出，主要思想是通过构造相应的局部光滑算子得到均匀化方程，最后，可以在一个粗的网格上数值求解均匀化方程. Lions 得到了具有周期或者是拟周期结构的二阶椭圆型方程的均匀化方程和一阶校正解[6]. Oleinik 用均匀化方法处理了具有孔洞区域的混合边值问题[8].

数学均匀化方法对于复合材料结构的物理和力学行为的分析给出了系统的、严格的跨尺度处理方法. 为了得到均匀化系数，针对不同的问题，有如下四种方法：多尺度渐近展开法、收敛估计法、随机处理方法和谱分析方法.

第一种方法是多尺度渐近展开法. 这一类方法起源于数学物理方程中的摄动理论，对所研究的问题的解 $u^{\varepsilon}(x)$，寻求下面的渐近展开式：

$$u^{\varepsilon}(x)=u^{0}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon u^{1}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{2}u^{2}\left(x,\frac{x}{\varepsilon}\right)+\cdots, \tag{1.1}$$

此方法是由 Marchenko 和 Khrouslov[9]于 1964 年首次提出的. 随后，Babuska[7]，De Giorgi[10]，Bensoussan[6]，Bakhvalov 和 Panasenko[11]，Oleinik[8]， Yosifian[12]等相继做了很多数学、物理上的补充，并解决了大量的数学物理问题，该方法对具有振荡的周期性构造的复合材料研究具有一定的促进作用.

第二种方法是能量估计方法，此方法由 Tartar[13]在 1978 年提出，通过引入振荡测试函数和能量收敛的概念来证明渐近展开解的收敛性. 此外，Nguetsent[14] 和 Allaire[15]引入了双尺度的概念和双尺度收敛分析方法. Spagnolo[16]对于一般构造的复合材料结构的均匀化问题引入了 G-收敛和 H-收敛的概念. De Giorgi[17]对于复合材料的非线性问题还给出了Γ-收敛的概念. 这些收敛性概念和收敛性分析方法的提出，都是为了给不同类型的复合材料问题的均匀化提供合理的理论基础.

第三种方法是对于随机构造的复合材料的均匀化，采用处理随机问题的方法. 在适当的简化假设下，可以用双尺度的随机变量构造性的给出渐近展开式，并在概率的意义下讨论概率的渐近收敛性. 最早从数学角度考虑具有随机和准周期系数算子的是 Kozlov[18], [19]. 随后，Zhikov[20]，Yosifian[12]等人从不同的角度考虑了随机算子的均匀化和相关收敛性分析.

第四种方法是谱分析方法，主要研究高频波在剧烈振荡的材料性质的介质中传播行为，也称为“Bloch 波”，如文献[21]. 对于不同类型的复合材料问题，需要适当的均匀化方法研究其宏观行为.

下面简要介绍一下周期复合材料结构的建模与表征. 假设所有的夹杂具有相同的形状和大小，复合材料的细观结构是周期性分布的，即整个复合材料结构由一个个夹杂均匀排列成，这样的细观单元称为单胞. 整周期区域 Ω 和参考单胞 Y 如图 1.1 所示.

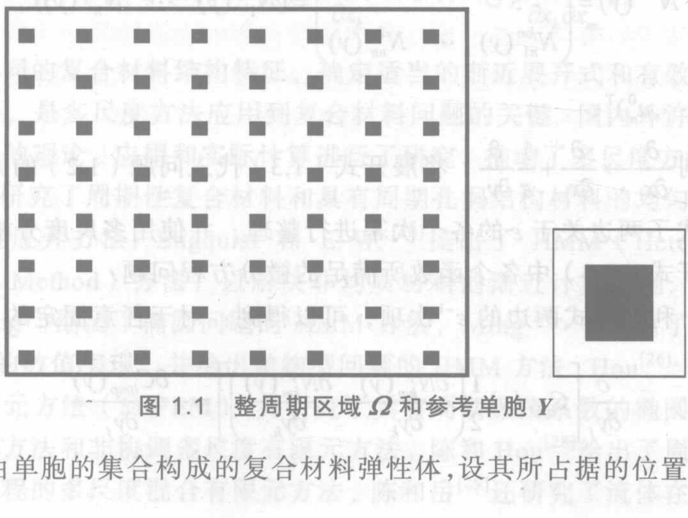

图 1.1 整周期区域 Ω 和参考单胞 Y

考虑由单胞的集合构成的复合材料弹性体，设其所占据的位置为 $\Omega \in R^n$，

它具有以 ε 为特征尺寸的微观尺度. 取定 Ω 中的任意一点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，其单胞上对应的点为 $y=\dfrac{x}{\varepsilon}$，这里 ε 为特征尺寸的微观尺寸. 设复合材料的弹性模量为 $C^{\varepsilon}_{ijhk}(x)=C_{ijhk}(x/\varepsilon)=C_{ijhk}(y)$ 是 Y-周期的.

考虑复合材料结构 Ω 上的弹性边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[C^{\varepsilon}_{ijhk}(x)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u^{\varepsilon}_h(x)}{\partial x_k}+\dfrac{\partial u^{\varepsilon}_k(x)}{\partial x_h}\right)\right]=f_i(x), & \text{在}\Omega\text{内}, \\ \boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x)=0, & \text{在}\partial\Omega\text{上}.\end{cases} \tag{1.2}$$

因为材料的细观结构具有的振荡特征，使得位移 $\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x)$ 场和应变 $e_{ij}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x))$ 场变量也具有局部振荡的特性.

假设问题（1.2）的解具有如下形式的渐近展开形式：

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon}(x)=\boldsymbol{u}^0(x)+\varepsilon N^k(y)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0(x)}{\partial x_k}+\varepsilon^2 N^{km}(y)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^0(x)}{\partial x_k\partial x_m}+\cdots, \tag{1.3}$$

这里：

$$\boldsymbol{N}^k(y)=\begin{pmatrix} N^k_{11}(y) & \cdots & N^k_{1n}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ N^k_{n1}(y) & \cdots & N^k_{nn}(y)\end{pmatrix}=(\boldsymbol{N}^k_1(y)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{N}^k_n(y)),$$

$$\boldsymbol{N}^{km}(y)=\begin{pmatrix} N^{km}_{11}(y) & \cdots & N^{km}_{1n}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ N^{km}_{n1}(y) & \cdots & N^{km}_{nn}(y)\end{pmatrix}=(\boldsymbol{N}^{km}_1(y)\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{N}^{km}_n(y)),$$

和 $\boldsymbol{u}^0=(u^0_1,\cdots,u^0_n)^{\mathrm{T}}$.

考虑到 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\to\dfrac{\partial}{\partial x_i}+\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial y_i}$，将展开式（1.3）代入问题（1.2）的方程，将所有得到的式子两边关于 ε 的各个次幂进行整理，并使用多尺度分析方法，可以得到展开式（1.3）中各个函数所满足的微分方程问题.

首先，利用等式两边的 ε^{-1} 次项，可以得到：对于任意固定的 p, m：

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left[C_{ijhk}(y)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N^p_{hm}(y)}{\partial y_k}+\frac{\partial N^p_{km}(y)}{\partial y_h}\right)\right]=-\frac{\partial C_{ijmp}(y)}{\partial y_j}. \tag{1.4}$$

对方程(1.4)附加周期边界条件 $\int_Y N_{hm}^p(y)\mathrm{d}y=0$，则一阶的辅助函数 $N^p(y),\ p=1,2,3$ 得到定义.

其次，利用等式两边的 ε^0 项建立等式，并将得到的等式关于 y 在单胞 Y 上取积分，可以得到均匀化解满足的微分方程，并附加相应的边界条件，则有：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\hat{C}_{ijhk}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_h^0(x)}{\partial x_k}+\dfrac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_h}\right)\right]=f_i(x), & \text{在}\Omega\text{内},\\ \boldsymbol{u}^0(x)=0, & \text{在}\partial\Omega\text{上},\end{cases} \tag{1.5}$$

这里：

$$\frac{1}{|Y|}\int_Y\left[C_{ijhk}(y)+C_{ijpq}(y)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_{ph}^k(y)}{\partial y_q}+\frac{\partial N_{qh}^k(y)}{\partial y_p}\right)\right]\mathrm{d}y=\hat{C}_{ijhk} \tag{1.6}$$

表示均匀化弹性模量，它描述了复合材料的宏观弹性性能.

根据(1.3)，我们可以定义 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x)$ 的一阶双尺度近似解为：

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(x)=\boldsymbol{u}^0(x)+\varepsilon N^k(y)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0(x)}{\partial x_k}. \tag{1.7}$$

更进一步，我们可以定义 $\boldsymbol{u}^\varepsilon(x)$ 的二阶双尺度近似解为：

$$\boldsymbol{u}^{(2)}(x)=\boldsymbol{u}^0(x)+\varepsilon N^k(y)\frac{\partial \boldsymbol{u}^0(x)}{\partial x_k}+\varepsilon^2 N^{km}(y)\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}^0(x)}{\partial x_k\partial x_m}. \tag{1.8}$$

根据不同的复合材料结构特征，确定适当的渐近展开式和有效的多尺度有限元算法，是多尺度方法应用到复合材料问题的关键. 国内外许多学者对多尺度方法的理论、应用和实际计算进行了研究，推动了多尺度方法的发展. Oleinik[8]等研究了周期性复合材料和具有周期孔洞结构材料的均匀化和一阶多尺度渐近展开方法. Engquist 和 E. W.[22]提出了 HMM(Heterogeneous Multi-Scale Method)方法，以解决非均质材料的渐近计算问题. E. W. 和 Ming，Zhang[23]给出了椭圆问题的 HMM 方法，Ming[24]，[25]给出了椭圆问题 HMM 方法的数值实现，并给出抛物型问题的 HMM 方法. Hou[26]，[27]提出了多尺度有限元方法(MsFEM)，并研究了具有周期振荡系数的椭圆问题的多尺度有限元方法和非协调多尺度有限元方法，陈和 Hou[28]给出了周期振荡系数椭圆型方程的多尺度混合有限元方法，陈和岳[29]还研究了流体在非均质介

质中的输运过程的均匀化问题. Fish[30]~[32]把均匀化问题从空间的多尺度扩展到了时间多尺度. 崔、曹和陈[33]~[39]等针对小周期复合材料提出了高阶渐近展开式和双尺度耦合算法，并把此方法应用到工程计算中，使均匀化方法容易地从理论分析进入数值计算和实际应用阶段. 此外，崔、李、连和余[40]~[43]等还分别研究了三维编织的复合材料以及随机颗粒的复合材料的等效力学参数的计算双尺度方法. 崔、冯、万和关[44]~[47]等研究了复合材料热-力耦合的多尺度分析方法.

1.1.3 复合材料板的多尺度计算研究进展

在实际的工程应用中，复合材料经常被制备成板或壳的结构形式. 由于板或者壳结构的厚度方向相对于其他方向来说是比较小的，所以经常把三维的线弹性方程用一个在板的中性面上定义的二维方程所近似. 最经典的板模型 *Reissner-Mindlin* 经常被用于求解中厚板的弯曲问题[48]~[51]来反映出横向的剪切变形. 它的优点是可以降低维数和避免用有限元求解时的闭锁现象. 鉴于这个原因，这个模型的严格数学理论和模型误差的分析是非常有意义的一个研究领域. 研究此类问题的方法有：变分收敛法和Γ-收敛法[52]~[57]. 他们不但给出了 *Reissner-Mindlin* 板模型的严格数学理论，而且还给出了该解对原始三维解的逼近误差.

据我们了解，双尺度渐近展开方法已经应用于研究复合材料板的弯曲问题. 在文献[58]中，作者首次证明了当板的厚度 $\delta \to 0$时，三维的薄板可以收敛到二维的均质的 *Kirchhof* 板. 众所周知，*Kirchhof* 板忽略了横向剪切变形的影响. 因此，它不能满足一些实际工程问题的需要. 为了克服这个缺点，在文献[59]中，作者引入了一个所谓的 *Hencky-Reissner* 板，通常被称为 *Reissner-Mindlin* 板，简化三维复合材料板为二维的复合材料板后，再利用均匀化方法和双尺度展开式来求解该问题. 这样做的优点是考虑了横向剪切变形和在实际的工程计算中具有高的逼近. 但是文献[59]中所用到的局部函数是定义在一个二维模型上的，它并不能完全的反映全部的三维微观力学行为. 为了捕捉三维的微观结构力学行为，文献[60]提出了一个新的双尺度展开式. 在文献[60]中，考虑微观的三维变形和宏观二维变形，作者基于二阶双尺度展开式和 *Reissner-Mindlin* 板模型预测复合材料板的三维细观力学行为，他们定义出了三个类型的局部函数和得到了一个层合板的模型.

在航空航天领域和汽车工业领域中，许多复合材料结构被制备成为板或