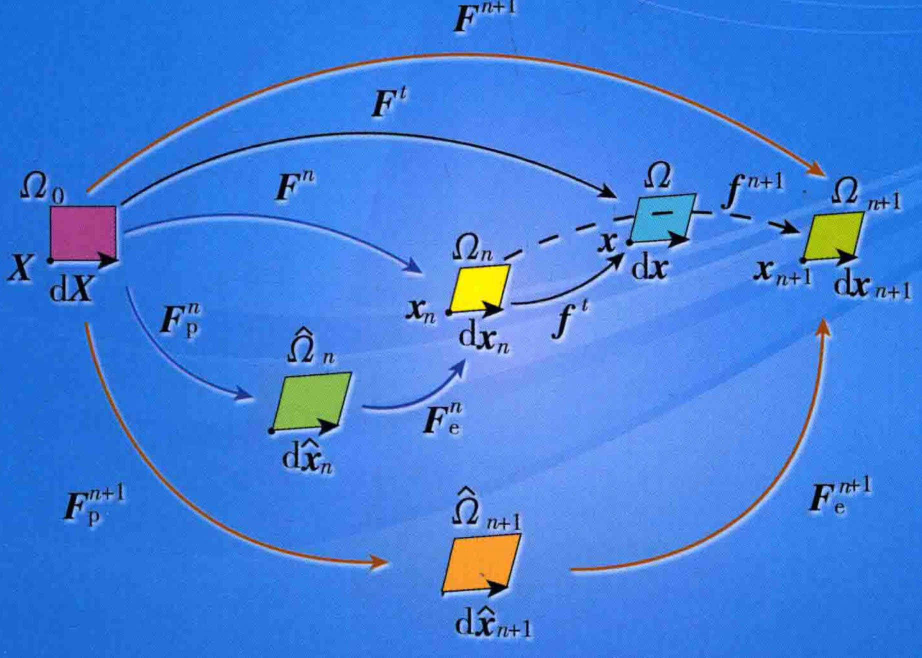
连续介质力学引论

李锡夔　郭　旭　段庆林　编著



科学出版社

连续介质力学引论

李锡夔　郭　旭　段庆林　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者在多年来为大连理工大学力学和各工程专业研究生讲授“连续介质力学”课程的讲稿的基础上修订完成。主要内容包括：张量分析简介、变形和运动的几何描述、连续介质运动的守恒律、宏观连续体的本构理论等。考虑到作为连续介质力学主要任务之一的初、边值问题的数值求解，本书特别关注与基于连续介质力学理论的有限元等数值方法的衔接，书中还着重介绍基于内变量理论以及热力学第二定律构建有限变形下弹塑性材料本构方程的一般理论和方法。

本书可作为力学专业和其他工程专业的研究生、高年级本科生连续介质力学课程的教材，也可作为从事计算力学和工程中力学问题数值模拟工作的科技人员的参考书。

安徽大学图书馆 藏书 www.lib.ahu.edu.cn

图书在版编目（CIP）数据

连续介质力学引论/李锡夔，郭旭，段庆林编著. —北京：科学出版社，2015.7
ISBN 978-7-03-045321-1

Ⅰ.①连… Ⅱ.①李… ②郭… ③段… Ⅲ.①连续介质力学-研究 Ⅳ. ①O33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 181808 号

责任编辑：刘信力 / 责任校对：桂伟利
责任印制：肖 兴 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社总发行 各地书店经销
*
2015 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 8 月第一次印刷 印张：8 1/2
字数：153 000

定价：58.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

作者简介

李锡夔，男，1940年生。大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系教授、博士生导师、学术委员会委员。师从英国皇家学会会员 O. C. Zienkiewicz 教授，获英国威尔士大学博士学位。中国力学学会第六、七、八届理事，1999—2011年历任中国力学学会固体力学专业委员会副主任、主任，2013—2017年任中国力学学会计算力学专业委员会颗粒材料计算力学专业组组长。1996—2001年任国家自然科学基金委专家评审组成员、组长。澳大利亚科学委员会聘任 Newcastle 大学教授（ARCIF，2006）。曾应邀在比利时列日大学、英国卡迪夫大学、日本琦玉大学、日本竹中工务店科学技术研究所合作研究。国际期刊 *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 和 *Int. J. of Damage Mechanics* 编委。2007年至今任国际华人计算力学协会执行委员。

研究领域包括：计算力学、多孔多相介质力学、颗粒材料力学、多尺度分析方法、多物理场耦合问题非线性有限元方法、非线性计算固体力学、高分子材料成型充填过程数值模拟等。在国内外学术期刊发表论文一百余篇，其中国际学术期刊论文约八十篇。

郭旭，男，1971年生。大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系教授、博士生导师、国家杰出青年基金获得者、长江学者特聘教授、教育部长江学者创新团队"结构优化的理论、方法与应用"负责人、科技部中青年科技领军人才。目前担任大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系主任、工业装备结构分析国家重点实验室副主任，中国力学学会理事、青年工作委员会主任、微纳米力学工作组副组长，国务院第七届学科评议组成员，亚洲结构与多学科优化协会执委。国际期刊 *Extreme Mechanics Letters* 编委、*Theoretical & Applied Mechanics Letters* 副主编、《计算力学学报》副主编，《力学学报》(中英文版)、《固体力学学报》(英文版)、《应用数学与力学》等期刊编委。主要研究领域为：计算力学、结构与多学科优化、微纳米力学。

段庆林，男，1979年生。大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系副教授。2001年本科毕业于大连理工大学工程力学系，获学士学位并保送本校研究生（硕博连读），于2007年获固体力学博士学位。后赴美国西北大学机械工程系作博士后研究，师从计算力学大师 Ted Belytschko 教授，开展无网格法的数值积分、材料破坏、扩展有限元法以及流固耦合等问题的研究。2010年7月回国，在大连理工大学工程力学系任副教授，研究方向为无网格法、材料破坏、扩展有限元法等。担任 *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*，*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 等国际期刊的审稿人。

序

连续介质力学通过引入“连续介质”这一模型化的概念，使得微积分等数学工具可方便地应用于力学分析，极大地推动了应用力学的发展。尤其是近些年来，随着计算机技术的飞速发展，基于连续介质力学理论的非线性有限元法已成为复杂工程问题分析的主要手段之一。掌握连续介质力学的基本概念，明晰它与非线性有限元的联系，对于发展新的计算方法乃至使用好现有的商业软件已十分必要。

本书的主要特点是“直接服务于固体非线性有限元计算”，作者围绕这一目标来介绍连续介质力学的基本理论。这体现在内容安排上，作者仅选择与非线性有限元分析紧密相关的连续介质力学基本理论知识，如应力应变度量、守恒方程等内容，不追求学术理论上的完整和艰深，因而未讨论曲面几何等知识点；另一方面，作者引入了非线性有限元的本构算法，即不仅给出了本构模型，还着重阐述了这些模型在非线性有限元的框架下是如何分析求解的，如第 4 章的指数返回映射算法等。这些内容在通常的连续介质力学教材中并不多见。此外，在表述上也很注意将连续介质力学的张量表示和通行于有限元领域的向量-矩阵表示方法相结合。

贯彻全书的另一个重要精神是力学问题的公式化以及公式之间的理性推导。常做科学研究的人可能会有这样一个体会：推导出一个漂亮的公式会极大地帮助我们理解问题的物理本质。这一点在本书中得到了很好的体现，例如应力速率张量客观性的讨论、弹塑性和式分解近似性的分析等使用了大量的公式推导来理性揭示问题的本质，令人印象深刻。

本书作者李锡夔教授等长期从事非线性有限元和连续介质力学的研究和教学，书中多项内容反映了作者及其合作者在这个领域的贡献，凝聚了作者多年教学工作中的体会。相信本书的出版不仅仅作为一本连续介质力学的入门教材，更是连接非线性有限元的桥梁，在理性认识非线性计算、培养更多优秀的计算人才等方面将发挥积极的作用，乃至产生深远的影响，故为之序。

中国科学院院士

程耿东

2015 年 4 月于大连

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

连续介质力学是近代力学的一个重要分支，它以统一的观点研究模型化为连续介质的物体在外部及其内各部分相互作用下有关运动、变形等的宏观力学行为，是诸多力学课程的理论基础。国内外已出版了许多各具特色的连续介质力学专著。我们多年来为力学与工程专业一年级研究生开设六十四学时的“连续介质力学”课程，本书是在该课程讲稿的基础上修订而成的，并不追求许多连续介质力学专著在内容上的完备性。

连续介质力学的主要任务之一是为变形连续体非线性力学分析及其初、边值问题数值求解提供基础知识。随着计算力学和计算工具的高速发展，近三十年来，基于连续介质力学的非线性计算力学，特别是基于连续介质力学的材料-几何非线性有限元方法的研究得到了长足进步。现今，离开连续介质力学基础知识已经很难深入讨论连续体和板壳结构的非线性有限元问题；对学生和从事工程实际问题数值分析的科技人员来说，甚至很难看懂国内外学术期刊中的相关文献。近年来，许多非线性有限元专著，例如 Crisfield M. A. 的 *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*（Vol. 1，Vol. 2），Belytschko T. 等的 *Non-linear Finite Elements for Continua and Structures*，E. A. de Souza Neto 等的 *Computational Methods for Plasticity*：*Theory and Application* 均有专门章节介绍连续介质力学的基础知识。本书的特点是为广大读者提供一本适合自学的，面向有限元等数值方法的连续介质力学简明教程。本书内容选取上特别关注连续介质力学理论与计算力学、特别是非线性有限元方法的关联，为非线性有限元方法提供基础理论知识，为广大学生阅读非线性有限元学术文献提供指引。

连续介质力学的基本框架建立在变形场论的基础之上，张量表示和运算是连续介质力学最基本的数学工具之一。本书的第 1 章将首先讨论“向量和张量基础”。作为连续体非线性变形和应力分析的基础，第 2 章将讨论连续介质的变形和运动的几何学描述以及与此相伴随的应力与应变度量。连续介质的各守恒律，即质量、动量和能量守恒等，以及描述材料不可逆破坏过程的热动力学第二定律将在第 3 章中讨论。第 4 章将围绕热动力学第一、第二定律和内状态变量理论讨论建立“弹塑性本构方程

的一般途径”。各章后均附有少量习题，供读者课后练习使用。

本书可作为力学专业和其他工程专业的研究生、高年级本科生连续介质力学课程的教材，也可作为从事计算力学和工程中力学问题数值模拟工作的科技人员的参考书。

本书的研究工作和出版得到了工业装备结构分析国家重点实验室、高等学校本科教学改革与教学质量工程建设项目"工程力学专业综合改革"，以及国家自然科学基金项目"有限变形下变形局部化数值模拟方法研究"（No. 19472016）的资助，在此表示衷心的感谢！

由于作者水平所限，本书难免存在缺点和疏漏，敬请读者不吝指正。

李锡夔　郭　旭　段庆林

2015 年 3 月于大连理工大学

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　向量和张量基础

力学大师冯元桢说："美丽的故事需要用美丽的语言来讲述，张量就是力学的语言。"本章只阐述向量和张量的基础知识，目的是为后面力学内容的讲述提供工具和便利，并不奢求涵盖整个张量分析的内容。

1.1　向量的基本概念和表示

在三维欧几里得(Euclidean)空间中，同时具有大小和方向的量称为**向量**(或**矢量**)，例如力、力矩、速度、加速度等，常用黑体字符表示，例如 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{M},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a}$ 等。只有大小的量称为**标量**，例如温度、时间、质量、能量等。在三维空间(为简明起见，略去欧几里得，下同)的笛卡儿坐标系中选取与全局正交坐标系坐标轴重合的正交标准基$\boldsymbol{e}_x^0,\boldsymbol{e}_y^0,\boldsymbol{e}_z^0$，即$\boldsymbol{e}_i^0\cdot\boldsymbol{e}_j^0=\delta_{ij}$(式中 i,j 分别表示 x,y,z；δ_{ij} 称为 Kronecker delta 符号)，任一向量可表示为这组全局正交标准基的线性组合，例如，对于速度向量 $\boldsymbol{v}$ 有

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{e}_x^0+v_y\boldsymbol{e}_y^0+v_z\boldsymbol{e}_z^0 \tag{1.1.1}$$

向量式(1.1.1)的分量表示为

$$\begin{Bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{Bmatrix}=v_x\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix}+v_y\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}+v_z\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix} \tag{1.1.2}$$

式(1.1.1)和式(1.1.2)可推广到 n 维空间。定义一组与 n 维空间中全局正交坐标系的坐标轴重合的正交标准基$\boldsymbol{e}_1^0,\boldsymbol{e}_2^0,\cdots,\boldsymbol{e}_n^0$，则任一 n 维向量 $\boldsymbol{v}$ 及其分量可分别表示为

$$\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1^0+v_2\boldsymbol{e}_2^0+\cdots+v_n\boldsymbol{e}_n^0=\sum_{i=1}^{n}v_i\boldsymbol{e}_i^0 \tag{1.1.3}$$

$$\begin{Bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{Bmatrix}=v_1\begin{Bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}+v_2\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\end{Bmatrix}+\cdots+v_n\begin{Bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{Bmatrix} \tag{1.1.4}$$

根据爱因斯坦(Einstein)求和约定，式(1.1.3)可简化为

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i^0 \tag{1.1.5}$$

式中 i 称为哑标(dummy indices)，表示此式要对 i 由 1 至 n 的整数求和。应注意的是，哑标总是成对出现，且可用相同取值范围的另一对字母任意代换，即

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{e}_i^0=v_j\boldsymbol{e}_j^0=v_k\boldsymbol{e}_k^0 \tag{1.1.6}$$

说明 1.1.1： 在矩阵和数值分析（如有限元分析）中采用向量-矩阵表示时，向量通常表示列向量，即 $n\times1$ 向量。式(1.1.4)表明，在矩阵分析中通常的 n 维向量表示意味着基向量不仅是正交标准基，而且与全局正交坐标系的坐标轴重合。

说明 1.1.2： 向量 $\boldsymbol{v}$ 的转置表示为 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}=[v_1 v_2 \cdots v_n]$，为一 $1\times n$ 的行向量。

说明 1.1.3： 在有限元分析中，向量 $\boldsymbol{v}$ 中的分量可以同时包含具有不同物理意义和量纲的量，例如 v_1, v_2, v_3 表示三维几何空间中沿笛卡儿坐标系 x, y, z 轴的速度，v_4, v_5, v_6 分别表示温度，压力，质量等。

说明 1.1.4： 在离散空间中，向量 $\boldsymbol{v}$ 可以重复地列出定义在所有 m 个离散点上的速度、温度、压力、质量等物理量。

1.2 向量的基本代数运算

1.2.1 点积(内积)

对于三维空间中的两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，它们的**点积**(dot product, inner product)定义为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{1.2.1}$$

式中 $|\boldsymbol{u}|$，$|\boldsymbol{v}|$ 分别表示向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 的模，而 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角。式(1.2.1)表明，两个向量的点积为标量。参考三维空间中任一组笛卡儿坐标系（可以不与全局正交坐标系坐标轴重合）定义一组正交标准基 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$，并采用式(1.1.1)的形式分别表示向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，则它们的点积可表示为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}u_i v_j\,\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \tag{1.2.2}$$

注意到三维笛卡儿坐标系中正交标准基中各基向量之间的正交性，即

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=|\boldsymbol{e}_i|\,|\boldsymbol{e}_j|\cos(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1.2.3}$$

将式(1.2.3)代入式(1.2.2)，并应用爱因斯坦求和约定可得到

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_i v_j\delta_{ij}=u_i v_i\quad(i=1,2,3) \tag{1.2.4}$$

将式(1.2.4)推广至 n 维空间，参考一组正交标准基 $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 表示的任意两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的点积可写为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_i v_i\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{1.2.5}$$

在广泛应用于有限元分析的向量-矩阵的表示形式中，两个向量的点积通常写为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \tag{1.2.6}$$

以上阐述说明，点积是这样一个算子(operator)，它作用在两个向量上得到一个标量。

1.2.2 叉积（外积）

对于三维空间中的两个向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，它们的**叉积**(vector product, outer product)定义为一个向量 $w=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$，其方向按右手螺旋法则定义为垂直于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 所构成的平面(如图 1.1 所示)，其绝对值(向量 $\boldsymbol{w}$ 的模)定义为以 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为邻边所构成的平行四边形的面积，即

$$|\boldsymbol{w}|=|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}|\sin(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \tag{1.2.7}$$

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是三维空间中任选的一组正交标准基，对其应用上述向量叉积定义，可得到

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=0,\quad \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2 \tag{1.2.8}$$

$$\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=0,\quad \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1 \tag{1.2.9}$$

$$\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2,\quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1,\quad \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=0 \tag{1.2.10}$$

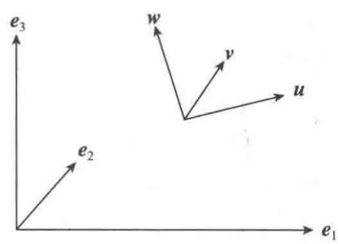


图 1.1　向量叉积定义

为简化上述表示，可定义作为标量的排列(permutation)符号

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & i,j,k \text{ 构成关于 } 1,2,3 \text{ 的偶排列}\\ -1, & i,j,k \text{ 构成关于 } 1,2,3 \text{ 的奇排列}\\ 0, & i,j,k \text{ 不构成关于 } 1,2,3 \text{ 的排列}\end{cases} \tag{1.2.11}$$

式(1.2.11)可具体写为

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=+1\ (\text{偶“排列”}) \tag{1.2.12}$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{321}=\varepsilon_{213}=-1\ (\text{奇“排列”}) \tag{1.2.13}$$

$$\varepsilon_{111}=\varepsilon_{112}=\varepsilon_{122}=\cdots=0\ (\text{不构成“排列”}) \tag{1.2.14}$$

应用排列符号 ε_{ijk}，式(1.2.8)～式(1.2.10)可简洁地表示为

$$\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1.2.15}$$

因而，向量叉积可表示为

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=(u_i\boldsymbol{e}_i)\times(v_j\boldsymbol{e}_j)=u_iv_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)=u_iv_j\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_k \tag{1.2.16}$$

或写成

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix} \tag{1.2.17}$$

可以看到,叉积是这样一个算子,它作用在两个向量上得到一个向量。应注意的是,两个向量的叉积仅定义在三维空间中,且 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 三个向量构成一个右手系。在一些文献中,两个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 的叉积有时也被表示为 $\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}$。

1.2.3 混合积

对于三维空间中不共面的任意三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$,它们的**混合积**((scalar) triple product)定义为

$$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \tag{1.2.18}$$

可以看到,混合积$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]$为一标量,其物理意义为:当 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 构成右手系时,其值为正,反之为负;而它们的绝对值均表示以 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 为三个棱边所构成的平行六面体的体积。

说明 1.2.1:可以证明,由三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的两两点积所构造的行列式等于以它们为棱边所构成的平行六面体体积的的平方,即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix}=[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]^2 \tag{1.2.19}$$

说明 1.2.2:对于两个任意混合积$[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}]$和$[\boldsymbol{u}'\boldsymbol{v}'\boldsymbol{w}']$,同样可证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix}=[\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}'\ \boldsymbol{v}'\ \boldsymbol{w}'] \tag{1.2.20}$$

1.2.4 张量积(并矢)

在向量的点积计算中,若令一向量为 $\boldsymbol{u}$,另一向量为单位向量 $\boldsymbol{n}$($|\boldsymbol{n}|=1$),则 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$表示向量 $\boldsymbol{u}$ 在方向向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影。因$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})$为一标量,有

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}) \tag{1.2.21}$$

注意到式(1.2.21)右端项若采用向量-矩阵形式可表示为

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\Rightarrow\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \tag{1.2.22}$$

在张量分析中定义上式中两个向量 $\boldsymbol{nn}$(在矩阵分析中表示为 $\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}$)的并矢为张量积,即

$$\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\Rightarrow\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{u} \tag{1.2.23}$$

式(1.2.23)中的 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}$ 即为向量 $\boldsymbol{n}$ 与其自身的张量积(并矢)。与式(1.2.21)和式(1.2.22)相应的张量分量表示可写为

$$n_j(n_iu_i)=(n_jn_i)u_i=N_{ji}u_i=N_{ij}u_j \tag{1.2.24}$$

应说明的是，由于$N_{ij}=n_in_j=n_jn_i=N_{ji}$，即$N_{ij}$是对称的，这是式(1.2.24)最后一个等号的理由所在。

以上通过式(1.2.21)所描述的特例引入了张量积的概念。一般地，两个向量$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i$和$\boldsymbol{b}=b_j\boldsymbol{e}_j$的**张量积(并矢)**(tensor product, dyadic product)定义为如下一个二阶张量$\boldsymbol{C}$，表示为

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\otimes b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j=C_{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{1.2.25}$$

向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$可以具有不同维数，例如n维向量$\boldsymbol{a}$和m维向量$\boldsymbol{b}$，由此得到的张量积$\boldsymbol{C}$为一$n\times m$维的二阶张量。显然，张量积不满足交换律；即使向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$具有相同维数n，由于$a_ib_j\neq b_ia_j$，

$$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=a_ib_j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j\neq\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{a}=a_jb_i\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{1.2.26}$$

式(1.2.26)相当于在向量运算中众所周知的如下不等式

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \tag{1.2.27}$$

说明　1.2.3：张量积(并矢)的符号$\otimes$在某些著作或文献中被省略，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab} \tag{1.2.28}$$

因此对于在张量分析中的两个向量的点积表示，其点积符号不可省略。

1.3　二维空间中非正交直线坐标系下的向量表示

为便于描述物理问题，除前述笛卡儿坐标系外，非正交直线坐标系也常被用于特定问题及其客观规律的描述，如板壳问题等。如图 1.2(a)所示，$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$为二维空间中一非正交直线坐标系的参考向量，根据哑标求和约定，二维空间中任一向量$\boldsymbol{r}$可表示为该参考向量的线性组合

$$\boldsymbol{r}=\sum_{\alpha=1}^{2}r^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha}=r^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha} \tag{1.3.1}$$

定义沿$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$方向的单位向量分别为$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，即

$$\boldsymbol{g}_{\alpha}=|\boldsymbol{g}_{\alpha}|\boldsymbol{i}_{\alpha} \tag{1.3.2}$$

且有

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_2=1,\quad \boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_1=\cos(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2)=\cos(\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_1)\neq0 \tag{1.3.3}$$

式(1.3.3)中的不等号是由于单位向量$\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$不正交。同样，对于参考向量$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$有

$$\boldsymbol{g}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_{\beta}=|\boldsymbol{g}_{\alpha}||\boldsymbol{g}_{\beta}|\cos(\boldsymbol{g}_{\alpha},\boldsymbol{g}_{\beta})\neq\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\0, & \alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.3.4}$$

这是由于参考向量$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$**既不正交，也不是单位向量**。

应着重指出的是，向量$\boldsymbol{r}$在参考向量$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$上的投影并不等于它相应的分量，这可由以下二式说明：

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i}_1=r^1\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{i}_1+r^2\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{i}_1=r^1|\boldsymbol{g}_1|+r^2|\boldsymbol{g}_2|\cos(\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_1)\neq r^1 \tag{1.3.5}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i}_2=r^1|\boldsymbol{g}_1|\cos(\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2)+r^2|\boldsymbol{g}_2|\neq r^2 \tag{1.3.6}$$

注意到即使参考向量$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$为单位向量，即$|\boldsymbol{g}_1|=1$，$|\boldsymbol{g}_2|=1$，仍然存在$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i}_1\neq r^1$，$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{i}_2\neq r^2$。

如图 1.2 所示，引入一对与参考向量$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$对偶的(reciprocal)参考向量$\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$，使其满足

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1=0 \tag{1.3.7}$$

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2=1 \tag{1.3.8}$$

以上二式表明：

(1)($\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$)和($\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$)构成两组互为正交的基；

(2) 若给定($\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$)，则式(1.3.7)确定了$\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$的方向，而式(1.3.8)确定了$\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$的模；反之亦然。

注意到不论参考向量$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$的夹角$\varphi=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2)$为锐角或钝角，夹角($\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}_1$)和($\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}_2$)分别为锐角($\pi/2-\varphi$)或锐角($\varphi-\pi/2$)，因此可由式(1.3.8)确定：

$$|\boldsymbol{g}^1|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi},\quad |\boldsymbol{g}^2|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.3.9}$$

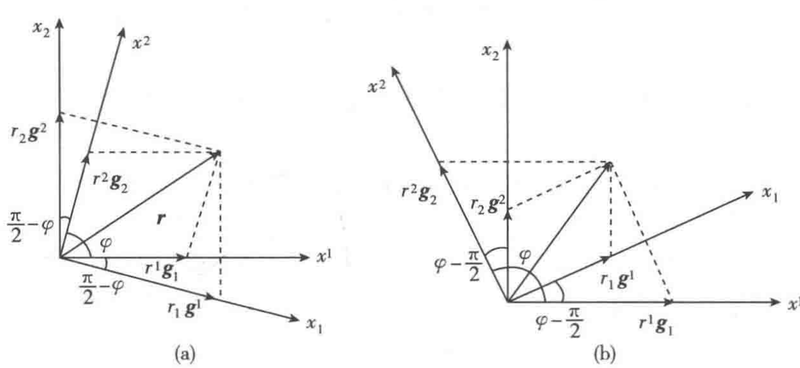


图 1.2　协变基向量与逆变基向量

在张量分析中，上述参考向量$\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2$通常被称为(定义为)**协变基向(矢)量**(covariant base vectors)，而与其对偶的参考向量$\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2$通常被称为**逆变基向(矢)量**(contravariant base vectors)。协变、逆变基向量之间的关系由式(1.3.7)和式(1.3.8)定义，该二式可统一表示为

$$\boldsymbol{g}^\beta\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=\delta_\alpha^\beta=\begin{cases}1, & \alpha=\beta\\ 0, & \alpha\neq\beta\end{cases}\qquad(\alpha,\beta=1,2) \tag{1.3.10}$$

式中δ_α^β是二维 Kronecker delta 符号。式(1.3.10)表明了协变基和逆变基之间的正交关系，δ_α^β在α,β的取值范围内构成了 2×2 的单位矩阵。定义 2×2 矩阵$\boldsymbol{G}^2=[\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2]$和$\boldsymbol{G}_2=[\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2]$，它们的乘积为

$$\boldsymbol{G}^2\cdot\boldsymbol{G}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2\\ \boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_2 \tag{1.3.11}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com