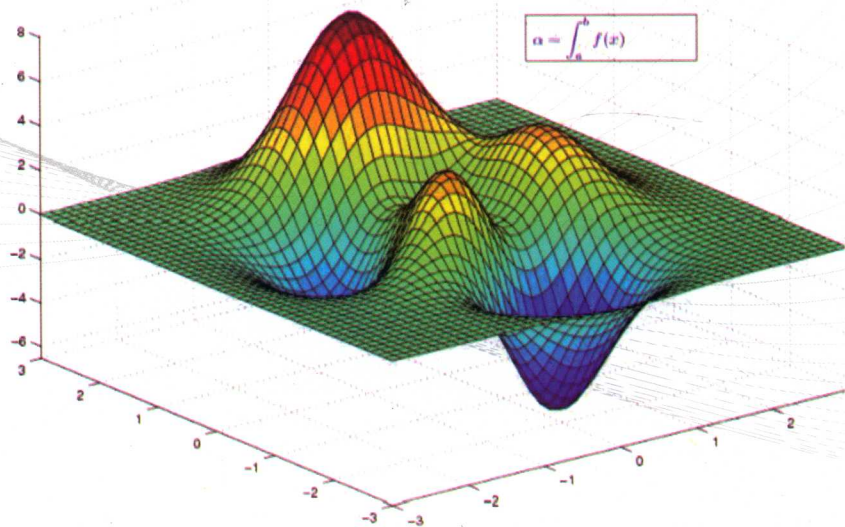


数学建模系列丛书



王积建 著

# 全国大学生

# 数学建模竞赛试题研究

## (上册)



国防工业出版社  
National Defense Industry Press

# 全国大学生数学建模 竞赛试题研究

(上册)

王积建 著

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

从1999年至2013年,全国大学生数学建模竞赛专科组试题一共有30个,每年有C、D两题.本书针对每个赛题,按照竞赛要求完成了研究,以竞赛论文的形式体现,包含题目、摘要、关键词、问题重述、问题分析、模型假设、符号说明、模型的建立与求解、灵敏度分析、稳健性分析、模型优化或拓展、模型的评价和推广、参考文献等内容.

本书可供高等学校从事数学建模工作的教师与学生阅读,也可作为全国大学生数学建模竞赛培训教程使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

全国大学生数学建模竞赛试题研究:全2册/王积建著. —北京:国防工业出版社,2015.5

ISBN 978-7-118-10214-7

I. ①全... II. ①王... III. ①高等数学—数学模型—竞赛题—研究 IV. ①O141.4-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第125775号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 16 $\frac{3}{4}$  字数 416千字

2015年5月第1版第1次印刷 印数 1—3000册 总定价 68.00元  $\frac{35.00}{33.00}$ 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

## 前 言

全国大学生数学建模竞赛是由教育部高教司主办的、目前已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛,也是世界上规模最大的数学建模竞赛,其宗旨是培养大学生的创新意识和团队精神:它创办于1992年,每年一届,截至2014年,已经举办了23届.以2014年来说,全国33个省/市/自治区(包括香港和澳门特区)及新加坡、美国的1338所院校、25347个队(其中本科组22233队,占总数的88%;专科组3114队,占总数的12%)、7万多名大学生报名参加了竞赛.

全国大学生数学建模竞赛组委会主任,中国科学院院士李大潜教授在数学建模竞赛20周年庆典上曾指出:“数学建模现已成为发展现代应用数学的重要突破口和核心内容.今天,应用数学正处于迅速地从传统的应用数学进入现代应用数学的发展阶段,数学的应用范围空前扩展,从传统的力学、物理等领域扩展到化学、生物、经济、金融、信息、材料、环境、能源……等各个学科及种种高科技甚至社会领域.由于很多新领域的规律还在探索之中,有关的数学建模并非轻而易举,而是具有实质性的困难,至今仍是 we 面临的严峻挑战.因此,数学建模不仅进一步凸现了它的重要性,而且已成为现代应用数学的一个重要组成部分,并为应用数学乃至整个数学科学的发展提供了进一步的机遇和广阔的前景.”他进一步指出“数学教育本质上是一种素质教育……学生通过参加数学建模的实践,亲自参加将数学应用于实际的尝试,亲自参加发现和创造的过程,可以取得在课堂里和书本上所无法获得的宝贵经验和亲身感受,必能启迪他们的数学心智,促使他们更好地应用数学、品味数学、理解数学和热爱数学.这样做,不仅融对知识、能力和素质之培养与考查三位于一体,而且面向所有专业的大学生,得到越来越多同学的参与和欢迎,是对素质教育的重要贡献,有力地促进了创新型优秀人才的培养.”

好的赛题是竞赛成功的关键.每个赛题都要在全国范围内征集,再经过组委会的精心遴选和充分论证才能形成.竞赛只有3天时间,即使是获得全国一等奖的优秀论文,也存在很多不足和缺憾,有的甚至有明显的错误,使得赛题研究成果不能直接被利用.另外,从竞赛组织方来说,这种状况使得数学建模竞赛有虎头蛇尾之嫌,留下一些遗憾.为了解决这个问题,从2012年开始,竞赛组委会倡导广大竞赛指导教师开展“赛后继续研究”,于是《全国大学生数学建模竞赛试题研究》就成为作者的研究选题.

我国职业技术学院发展很快.从教育部网站可查得,截至2012年底,高职高专院校总数达到1297所,在校学生数335.56万人,占学生总数的58%,而本科院校为1145所,在校学生数247.55万人,占学生总数的42%.虽然高职高专院校的数量和学生数均已超过本科院校,但参赛学生数却远远低于本科院校(仅占参赛学生总数的12%).由于参赛学生是层层筛选来的,因此可以估计,参加数学建模普及教育的高职高专学生也占大学生总数的12%.换句话说,占学生总数58%的大学生,接受数学建模课程教育的学生仅有12%,比例严重失调!

可见,在数学建模课程受益面上,高职高专院校和本科院校的差距很大.造成这种状况的原因之一,是在数学建模教学中,高职高专院校普遍缺乏全国一等奖的优秀论文范本,即正确

无误的、完整无缺的、符合竞赛规范的研究论文。由于缺乏全国一等奖的优秀论文范本供教师或学生学习时使用,所以高职高专院校学生普遍欠缺驾驭大型问题的能力,即解决竞赛试题的能力。从2010年开始,全国组委会在每年竞赛结束后都要召开全国性赛题分析会议,在会议上经常听到高职高专院校指导教师提出,能否把获得全国一等奖的论文的原版提供给他们作为参考和培训材料。可见,广大教师对获奖优秀论文的需求是多么强烈!正因为数学建模普及教学中忽略了真实赛题的实战训练,使得当参赛学生面对真实赛题的时候屡屡失败而放弃比赛,严重挫伤了学生的自信心和积极性。因此,作者将专科组赛题作为研究对象。

从1999年开始,全国大学生数学建模竞赛将本科组和专科组分开进行,专科组试题每年有2个,截至2013年,一共30个。我们将30个赛题的研究论文结集出版,共分上、下册。本书具有以下特点:

(1) 系统而全面。包含了从1999年以来的所有专科组赛题,具有一定的收藏价值。

(2) 论文写作的范本。每篇论文都按照竞赛论文的写作要求,包含题目、摘要、关键词、问题重述、问题分析、模型假设、符号说明、模型的建立与求解、灵敏度分析、稳健性分析、模型优化或拓展、模型的评价和推广、参考文献、附录等内容。

(3) 研究过程和结果无差错。每一个赛题的研究水平高于全国获奖的优秀论文。事实上,全国获奖的优秀论文或多或少存在不足或错误之处。

(4) 博采众长。每一个赛题的研究过程参考借鉴了同一个题目的所有公开发表的论文。

(5) 方法简单。适合高职高专院校教师和学生数学建模培训中使用。

以上特点也是作者在研究过程中努力追求的目标。在赛题研究过程中,得到了组委会副主任陈叔平教授和组委会秘书长谢金星教授的鼓励和支持,也得到了组委会专家叶其孝教授、鲁习文教授、吴孟达教授和浙江省大学生数学建模竞赛组委会委员陈笑缘教授的鼓励和支持,特别是吴孟达教授亲自指导作者开展赛题研究,在此一并表示衷心的感谢。

没有最好,只有更好!在赛题研究过程中,作者深切感到,随着研究和思考的不断深入,需要进一步研究探索的问题越来越多,希望本研究能够起到抛砖引玉的作用,也希望越来越多的同行们加入到数学建模竞赛的后续研究队伍中来。由于作者水平和能力有限,书中难免存在不足甚至错误之处,欢迎广大读者不吝指正,作者的电子邮件地址是:wang-jijian@163.com。

作者

2015年3月



# 目 录

第1章	1999C 煤矸石堆积	1
第2章	1999D 钻井布局	17
第3章	2000C 飞越北极	28
第4章	2000D 空洞探测	40
第5章	2001C 基金使用计划	50
第6章	2001D 公交车调度	71
第7章	2002C 车灯线光源的计算	90
第8章	2002D 赛程安排	111
第9章	2003C SARS 的传播	125
第10章	2003D 抢渡长江	143
第11章	2004C 饮酒驾车	159
第12章	2004D 公务员招聘	176
第13章	2005C 雨量预报方法的评价	188
第14章	2005D DVD 在线租赁	198
第15章	2006C 易拉罐形状和尺寸的最优设计	214
第16章	2006D 煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制	229
附录	1999—2006 年专科组赛题	244

# 第 1 章 1999C 煤矸石堆积

## 摘要

本文建立了线性规划模型,对煤矸石堆积问题进行了研究.

首先,将矸石山假设为由一个四棱锥与不完全圆锥嵌合而成的几何体,推导出轨道长度与体积的关系式,占地面积与体积、安息角的关系式等.根据占地面积与安息角的关系式,利用数值方法得出占地面积与安息角是减函数关系,因此安息角取最大值  $55^\circ$  时占地面积最小.

其次,针对问题(1),建立了每年土地需求量预测公式、每年地价预测公式、每年电费预测公式、每年计划征地经费预测公式,并对以上指标进行了预测,为征地规划模型的求解奠定了基础.接着,建立征地规划模型,对每年征地方案进行决策.包括:当年是否征地及其囤地数量;是否贷款及其贷款额;是否使用计划征地经费及其额度;计划经费累计余额;等等.要求保证每年的用地需求,还要保证 20 年末的经费余额最大.结果显示,当出矸率分别为 7%、8%、9%、10% 时,经费够用.但当出矸率为 11% 时,经费不够用.

第三,针对问题(2),建立最低经费规划模型,要求在保证每年用地需求和计划期末的经费余额为 0 的条件下,得到每年最低经费.结果显示,当出矸率分别为 7%、8%、9%、10%、11% 时,最低经费分别是 64.17、72.97、82.05、91.47、101.25(万元).

第四,针对地价涨幅、矸石容重、机械效率初始值进行了灵敏度分析,结果显示,征地规划模型对它们的灵敏度很小.

第五,针对电费按照线性趋势增长的情况进行了稳健性分析,结果显示,征地规划模型的结论不变.针对贷款利率大于存款利率的情况进行了稳健性分析,结果显示,当出矸率为 7% 及以上时,经费都不够用.

第六,为了分析轨道仰角的最优值,引入运矸车装载效率指标,对运矸车机械效率进行了修正,使用征地规划模型,得到了出矸率分别为 7%、8%、9%、10% 时,最优仰角分别为  $30^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $29^\circ$ 、 $29^\circ$ .

第七,为了分析堆数的最优值,假设每堆矸石数量相等,在征地规划模型中,重新建立每年土地需求量向量、每年电费向量、每年的计划征地经费向量,就可以得到某个堆数对应的经费余额.通过比较余额大小,就可以确定最优堆数.考查结果是 20 年堆放 1 堆最划算.

最后对模型进行了评价和推广.

本文使用 MATLAB 软件和 LINGO 软件计算.

**关键词:**煤矸石堆积;离散方法;规划模型;轨道仰角;最优堆数

## 1.1 问题重述

煤矿采煤时,会产出无用废料——煤矸石.在平原地区,煤矿不得不征用土地堆放矸石.通

常矸石的堆积方法是:架设一段与地面角度约为  $25^\circ$  的直线形上升轨道(角度过大,运矸车无法装满),用在轨道上行驶的运矸车将矸石运到轨道顶端后向两侧倾倒,待矸石堆高后,再借助矸石堆延长轨道,这样逐渐堆起一座矸石山.

现给出每年用于处理矸石的经费,需要解决的问题:

- (1) 制订合理的年度征地计划.
- (2) 对不同的出矸率预测处理矸石的最低费用.

## 1.2 问题分析

### 1.2.1 研究现状综述

钟小勇等<sup>[1]</sup>建立了三种征地方式(第1年一次性征地、每年征地一次、2年征地一次)下的数学模型,在建立电费关系式时使用了微元法.不足之处是所给出矸石堆的体积和面积表达式过于复杂,也未给出最主要的数值计算结果.

赵易蓉等<sup>[2]</sup>对不同的征地方式和煤矸石堆数进行了讨论,得出了最优征地方案是第1年一次性征地和最优堆放方式是只堆1堆的结论.通过建立微分方程求得运矸车的机械效率,使用微元法建立了电费关系式,得出了合理的结论.不足之处是公式中使用了较多的近似,使得电费和征地费的数值不够准确.

王如云等<sup>[3]</sup>讨论了合理征地方式和煤矸石堆数问题,得出了第1年一次性征地和只堆1堆的结论.在建立机械能、电费和征地费关系式时均使用了微元法.不足之处是对题目里需要解决的问题没有给出数值结果.

贾晓峰等<sup>[4]</sup>给出了煤矸石堆积问题的参考答案,介绍了学生答卷中由于对出矸率及征地方式的理解不同而导出的不同解答.

总之,现有文献在最优征地方式选择上都是以一次性征地为最优方式.在建立电费和征地费关系式时均使用了微元法.对轨道仰角的最优值都没有进行讨论,也缺乏对一些容易变动的参数的灵敏度分析,还缺乏对贷款利率大于存款利率的讨论.

### 1.2.2 本文研究思路

本文在建立机械能、电费和征地费表达式时均使用离散方法,这样做,思路简单,易于理解.在讨论最优征地方式时使用线性规划模型来决策,使得征地方式具有一般性,即任何一年征地都有可能,每年征地多少,以及计划征地经费和银行贷款各使用多少,都取决于20年末的经费余额最大.在讨论最优分堆问题上,通过比较不同堆数下的经费余额来确定最优的分堆数.还要对轨道仰角的最优值进行讨论,对一些容易变动的参数进行灵敏度分析,对贷款利率大于存款利率的情况也进行讨论.

本文解题路径如图1-1所示.



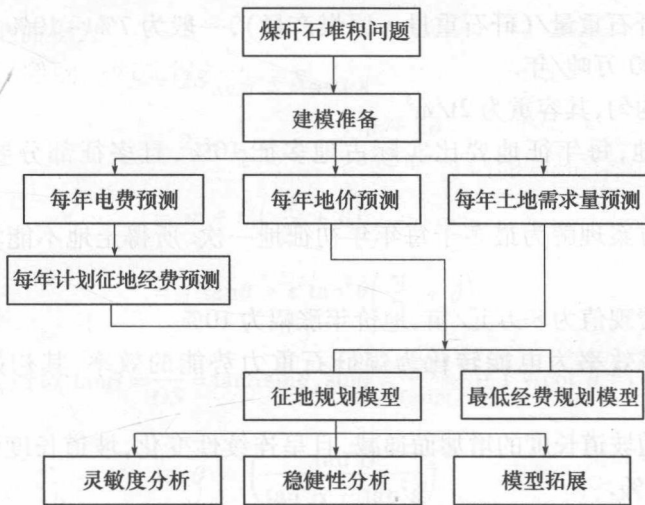


图 1-1 本文解题路径

### 1.3 符号说明

$n$ : 煤矿设计寿命(年)	$x$ : 轨道长度(m)
$\alpha$ : 安息角( $^{\circ}$ )	$b$ : 堆矸土地多征比例(%)
$\beta$ : 轨道仰角( $^{\circ}$ )	$p$ : 机械效率每延长 10m 下降的百分比(%)
$\rho$ : 煤矸石的容重( $t/m^3$ )	$q$ : 处理矸石的总经费, 包括电费和征地费(万元/年)
$S$ : 矸石山的占地面积( $m^2$ )	$g_i$ : 第 $i$ 年从计划征地经费累计余额里的支出额(万元), $i=1, 2, \dots, n$
$V$ : 矸石山的体积( $m^3$ )	$w_i$ : 第 $i$ 年征地总费用, $i=1, 2, \dots, n$
$d$ : 原煤年产量(万吨/年)	$p_i$ : 第 $i$ 年年末计划经费累计余额(万元), $i=1, 2, \dots, n$
$c_0$ : 土地价格现值(万元/亩 <sup>①</sup> )	$S'_i$ : 第 $i$ 年土地需求量(亩), $i=1, 2, \dots, n$
$\lambda$ : 地价年涨幅(%)	$S_i^*$ : 第 $i$ 年年末囤地数量(亩), $i=1, 2, \dots, n$
$\eta_0$ : 机械效率初始值(%)	$u_i$ : 第 $i$ 年贷款(万元), $i=1, 2, \dots, n$
$R_1, R_2$ : 银行存、贷款利率(%)	$c_{1i}$ : 第 $i$ 年的土地价格(万元/亩), $i=1, 2, \dots, n$
$c_2$ : 电费[元/( $^{\circ}$ )]	$f_{1i}$ : 第 $i$ 年的计划征地经费(万元), $i=1, 2, \dots, n$
$e$ : 出矸率(%)	$f_{2i}$ : 第 $i$ 年的电费(万元), $i=1, 2, \dots, n$

### 1.4 模型假设

为了简化问题, 作如下假设:

(1) 所征土地处于同一平面上. 矸石山由四棱锥  $D-OASB$  与不完全圆锥  $D-OACB$  嵌合而成.

① 1 亩 = 666.67  $m^2$ .

(2) 出矸率 = 矸石重量 / (矸石重量 + 原煤产量), 一般为 7% ~ 10%, 出矸率在计划期内不变, 原煤产量为 300 万吨/年.

(3) 矸石堆积均匀, 其容重为  $2t/m^3$ .

(4) 为保护耕地, 每年征地要比实际占地多征 10%, 且多征部分要作为空地, 不能堆矸石.

(5) 年度征地方案理解为最多于每年年初征地一次. 所得土地不能卖出. 征地费在年初缴纳.

(6) 土地征用费现值为 8 万元/亩, 地价年涨幅为 10%.

(7) 运矸车机械效率为电能转化为煤矸石重力势能的效率, 其初始值(在地平面上)约 30%.

(8) 机械效率随坡道长度的增加而递减, 且呈连续性变化, 坡道长度每延长 10m, 效率在原有基础上约下降 2%.

(9) 运矸车总是在矸石山的山顶向两侧倾倒, 中途无矸石掉落.

(10) 电费价格在计划期内不变, 为 0.50 元/kW · h.

(11) 100 万元经费每年年初一次到位.

(12) 电费在年初预留, 在年底缴纳.

(13) 贷款自由, 额度无限制, 每年征地时贷款一次, 期限 1 年, 利率 5%, 不能提前偿还.

(14) 每年年初征地后将剩余征地经费立即存款, 定期 1 年, 利率 5%, 不能提前支取.

(15) 由于地价涨幅较大, 而电价不变, 所以在计划期内只堆积一个矸石山比较省钱.

## 1.5 模型的建立与求解

### 1.5.1 建模准备

#### 1. 轨道长度与体积的关系

根据假设(1), 矸石山如图 1-2 所示.

设  $SD = x$ ,  $OB = r$ ,  $OD = h$ ,  $SB = s$ ,  $\angle OSB = \theta$ ,  $\angle OSD = \beta$ ,  $\angle OBD = \alpha$ . 下面推导  $x$  与  $V$  的函数关系式  $x = f(V)$ .

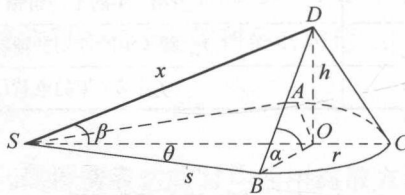


图 1-2 矸石山示意图

由几何知识可知,  $\triangle OSD$ ,  $\triangle OSB$ ,  $\triangle SBD$ ,  $\triangle OBD$  都是直角三角形, 所以

$$h = x \sin \beta, h = r \tan \alpha, r = s \tan \theta$$

由此得

$$s = \frac{\sin \beta}{\tan \alpha \tan \theta} x$$

于是矸石山的占地面积为

$$\begin{aligned} S &= 2S_{\triangle OSB} + S_{\text{扇形}ACB} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}sr + \pi r^2 \frac{\pi + 2\theta}{2\pi} \\ &= sr + r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \\ &= s^2 \tan\theta + s^2 \tan^2\theta \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \end{aligned}$$

又因为  $OS = \frac{r}{\sin\theta}$ , 所以  $\tan\beta = \frac{h}{OS} = \tan\alpha \sin\theta$ ,  $\sin\theta = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$ . 由  $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$ , 得

$$\tan\theta = \left( \frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

令  $a = \frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}$ , 则当  $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$  时,  $a > 0$ ,  $\tan\theta = \sqrt{a}$ , 于是矸石山占地面积为

$$S = \frac{\sin^2\beta}{\sqrt{a} \tan^2\alpha} \left[ 1 + \left( \frac{\pi}{2} + \arctan\sqrt{a} \right) \sqrt{a} \right] x^2$$

令  $a_1 = 1 + \left( \frac{\pi}{2} + \arctan\sqrt{a} \right) \sqrt{a}$ , 则矸石山占地面积为

$$S = \frac{a_1 \sin^2\beta}{\sqrt{a} \tan^2\alpha} x^2 \quad (1-1)$$

矸石山体积为

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{a_1 \sin^3\beta}{3\sqrt{a} \tan^2\alpha} x^3 \quad (1-2)$$

轨道长度与体积的关系为

$$x = \left( \frac{3V\sqrt{a} \tan^2\alpha}{a_1 \sin^3\beta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1-3)$$

## 2. 矸石山占地面积与体积的关系

将式(1-3)代入式(1-1), 得

$$S = \left( \frac{9a_1 V^2}{\sqrt{a} \tan^2\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1-4)$$

## 3. 占地面积与安息角的关系

由于  $h = OS \tan\beta$ ,  $h = r \tan\alpha$  得  $OS \tan\beta = r \tan\alpha$ , 又因为  $OS > r$ , 故  $\tan\beta < \tan\alpha$ , 所以  $\beta < \alpha$ . 在本题中,  $\alpha \in (25^\circ, 55^\circ]$ .

安息角  $\alpha$  越大, 占地面积越小, 所以占地面积是安息角的减函数. 占地面积与安息角的关系如图 1-3 所示(在图中, 取  $\beta = 1^\circ$ ,  $V = 1000$ ,  $\alpha \in (1^\circ, 55^\circ]$ ).

因此, 在堆放煤矸石的时候要尽可能使得安息角最大.

## 4. 函数的平均值

当  $x \in [x_1, x_2]$  时, 函数  $y = f(x)$  的平均值为

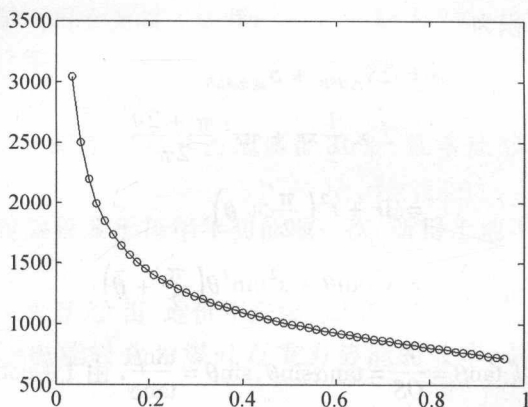


图 1-3 矸石山占地面积与安息角的关系

$$\bar{y} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (1-5)$$

特别地, 当  $y = kx$  时, 有

$$\bar{y} = k(x_2 + x_1)/2 \quad (1-6)$$

当  $y = \eta_0 (1-p)^{x/10}$  时, 有

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \eta_0 (1-p)^{x/10} dx \\ &= \frac{10\eta_0}{(x_2 - x_1) \ln(1-p)} [(1-p)^{0.1x_2} - (1-p)^{0.1x_1}] \end{aligned} \quad (1-7)$$

## 1.5.2 问题(1)的解决

### 1. 建立土地需求量公式

根据假设(2), 每年产生的煤矸石质量为(t)

$$G_0 = 10000de/(1-e) \quad (1-8)$$

根据假设(3), 每年产生的煤矸石的体积为( $m^3$ )

$$V_0 = G_0/\rho \quad (1-9)$$

第  $i$  年末累计产生的煤矸石的体积为( $m^3$ )

$$V_i = iV_0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-10)$$

第  $i$  年末矸石山的占地面积为(亩)

$$S_i = 0.0015 \left( \frac{9a_1 i^2 V_0^2}{\sqrt{a} \tan^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{3}}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-11)$$

第  $i$  年末增加的占地面积为(亩)

$$\begin{cases} \Delta S_i = S_i - S_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \\ S_0 = 0 \end{cases} \quad (1-12)$$

根据假设(4)和(5), 第  $i$  年土地需求量为(亩)

$$S'_i = (1+b)\Delta S_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-13)$$

## 2. 建立地价公式

根据假设(6),第*i*年的地价为(万元/亩)

$$c_{1i} = c_0 (1 + \lambda)^{i-1}, i = 1, 2, \dots, n; \quad (1-14)$$

## 3. 建立电费公式

根据假设(7)和(8),运矸车机械效率为

$$\eta = \eta_0 (1 - p)^{x/10} \quad (1-15)$$

由式(1-7),得第*i*年产生的煤矸石的平均机械效率为

$$\begin{cases} \bar{\eta}_i = \frac{10\eta_0}{(x_i - x_{i-1}) \ln(1-p)} [(1-p)^{0.1x_i} - (1-p)^{0.1x_{i-1}}], i = 1, 2, \dots, n \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (1-16)$$

式中  $x_i$ ——第*i*年末的轨道长度(m).

根据假设(9)和式(1-6),第*i*年产生的煤矸石上升的平均高度为(m)

$$\begin{cases} \bar{h}_i = \frac{(x_{i-1} + x_i) \sin \beta}{2}, i = 1, 2, \dots, n \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (1-17)$$

第*i*年煤矸石的势能为  $Gg \bar{h}_i$  (kJ), 其中,  $g = 9.8$  (N/kg).

第*i*年运输煤矸石所消耗的电能为(kW·h)

$$E_i = \frac{Gg \bar{h}_i}{3600 \bar{\eta}_i} \quad (1-18)$$

根据假设(10),第*i*年的电费为(万元)

$$f_{2i} = \frac{c_2 Gg \bar{h}_i}{3.6 \times 10^7 \bar{\eta}_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-19)$$

## 4. 建立每年计划征地经费公式

根据假设(11)、(12)和(14),第*i*年的计划征地经费(总经费除去电费的部分)为(万元)

$$f_{1i} = q - f_{2i} / (1 + R_1), i = 1, 2, \dots, n \quad (1-20)$$

## 5. 建立征地规划模型

建模思路:如何征地更划算?是尽可能通过多贷款提前买地更划算,还是尽可能少贷款只买当年用地更划算?或者每隔几年买一次地更划算?不管如何征地,每年的剩余土地要么是0,要么非0.如果提前囤地划算,那么前几年的剩余土地非0;如果提前囤地不划算,那么前几年的剩余土地是0.而当年是否买地,是否贷款,不但要保证当年的用地需求,还要保证20年末的计划经费累计余额最大.因此可以建立规划模型来解决征地问题.

根据假设(5)和(13),征地方式满足的关系式为

$$\begin{aligned} & \text{上年囤地面积} + \frac{\text{当年计划经费使用额} - \text{上年贷款及利息} + \text{当年贷款}}{\text{当年地价}} - \text{当年土地需求量} \\ & = \text{当年囤地面积} \end{aligned}$$

下面开始建立规划模型.首先分析约束条件.

第*i*年征地总费用为

$$w_i = g_i - u_{i-1} (1 + R_2) + u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-21)$$



规定:最后一年不贷款,  $u_n = 0$ , 另外,  $u_0 = 0$ .

囤地数量递推关系为

$$S_{i-1}^* + w_i/c_{1i} - S'_i = S_i^*, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-22)$$

规定:最后一年的囤地面积为0, 即  $S_n^* = 0$ . 另外  $S_0^* = 0$ .

不能卖地赚钱, 即

$$w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-23)$$

不能超额囤地, 囤地数量应该受到限制. 囤地数量的上限应该是下一年直至最后一年的需求量总和, 即

$$S_i^* \leq \sum_{k=i+1}^n S'_k, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1-24)$$

根据假设(14), 第  $i$  年年末计划经费累计余额为

$$p_i = (p_{i-1} + f_{1i} - g_i)(1 + R_1), i = 1, 2, \dots, n \quad (1-25)$$

规定:  $p_0 = 0$ .

当年从计划经费累计余额里的支出额不超过总余额, 即

$$g_i \leq p_{i-1} + f_{1i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-26)$$

变量约束为

$$g_i, u_i, S_i^* \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-27)$$

再分析目标函数. 目标函数为第  $n$  年年末计划经费累计余额最大, 即

$$\max f = p_n \quad (1-28)$$

汇总, 得

$$\begin{aligned} \max \quad & f = p_n \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} w_i = g_i - u_{i-1}(1 + R_2) + u_i, i = 1, 2, \dots, n \\ S_{i-1}^* + w_i/c_{1i} - S'_i = S_i^*, i = 1, 2, \dots, n \\ S_i^* \leq \sum_{k=i+1}^n S'_k, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ p_i = (p_{i-1} + f_{1i} - g_i)(1 + R_1), i = 1, 2, \dots, n \\ g_i \leq p_{i-1} + f_{1i}, i = 1, 2, \dots, n \\ p_0 = 0 \\ S_0^* = S_n^* = 0; u_0 = u_n = 0 \\ g_i, u_i, S_i^*, p_i, w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (1-29)$$

求解模型后, 就可以确定  $g_i, u_i, S_i^*, p_i, w_i$ , 即可以确定年度征地方案, 包括每年贷款多少、每年实际使用经费多少、每年囤地数量多少、每年计划经费累计余额多少、每年征地总费用多少等.

## 6. 经费是否够用的判断条件

由于第  $n$  年不能贷款, 所以第  $n$  年只能使用计划征地经费累计余额  $p_n$ , 于是经费够用的条件为

$$S_{n-1}^* + w_n/c_{1n} \geq S'_n \quad (1-30)$$

若式(1-30)成立,则模型式(1-29)有解;否则无解. 所以经费是否够用的条件也可以表述为模型(1-29)有解.

### 7. 模型求解

根据假设(15),矸石山只堆放1堆. 以出矸率7%为例. 取安息角的最大值 $\alpha = 55^\circ$ ,其余变量的取值为题目给定数据. 根据电费公式、土地需求量公式、地价公式、计划征地经费公式计算,得到每年的相关费用,如表1-1第2~5列所示.

根据征地规划模型计算,得到每年的征地方案及其相关费用,如表1-1第6~10列所示.

表1-1 相关指标的计算结果(出矸率7%)

年序	电费 /万元	土地需求 量/亩	地价 /万元	计划征地 经费/万元	经费 支出额 /万元	贷款额 /万元	囤地数量 /亩	累计余额 /万元	征地款 总额 /万元
	$f_{2i}$	$S'_i$	$c_{1i}$	$f_{1i}$	$g_i$	$u_i$	$S_i^*$	$p_n$	$w_i$
1	2.89	10.66	8	97.11	97.11	531.37	67.9	0	628.48
2	7.67	6.26	8.8	92.33	0	557.94	61.64	96.95	0
3	9.69	5.25	9.68	90.31	0	585.84	56.39	196.62	0
4	11.32	4.69	10.65	88.68	0	615.13	51.7	299.56	0
5	12.74	4.31	11.71	87.26	0	645.88	47.39	406.17	0
6	14.03	4.03	12.88	85.97	0	678.18	43.36	516.74	0
7	15.22	3.81	14.17	84.78	0	712.09	39.55	631.6	0
8	16.33	3.63	15.59	83.67	0	747.69	35.92	751.03	0
9	17.39	3.48	17.15	82.61	0	785.08	32.44	875.32	0
10	18.40	3.36	18.86	81.60	0	824.33	29.08	1004.77	0
11	19.38	3.25	20.75	80.62	0	865.55	25.83	1139.66	0
12	20.31	3.15	22.82	79.69	0	908.82	22.68	1280.32	0
13	21.22	3.06	25.11	78.78	0	954.26	19.62	1427.05	0
14	22.11	2.99	27.62	77.89	0	1001.98	16.63	1580.19	0
15	22.97	2.92	30.38	77.03	0	1052.08	13.71	1740.08	0
16	23.81	2.85	33.42	76.19	0	1104.68	10.86	1907.08	0
17	24.63	2.79	36.76	75.37	0	1159.91	8.07	2081.58	0
18	25.44	2.74	40.44	74.56	0	1217.91	5.33	2263.94	0
19	26.23	2.69	44.48	73.77	0	1278.81	2.64	2454.6	0
20	27.01	2.64	48.93	72.99	1342.75	0	0	1244.09	0
合计	358.81	—	—	—	—	—	—	—	—

### 8. 结果分析

由表1-1可知,20年的总电费为358.81万元. 征地方式为第1年一次性征地,然后每年贷款还贷而把计划经费作为储蓄,直到第20年从计划征地经费余额里面拿出1342.75万元用于偿还上一年的贷款及利息. 第20年末计划征地经费余额为1244.09万元,它是目标函数的

最大值.

根据式(1-30),得  $S_{19}^* + w_{20}/c_{1,20} = 2.64 \geq S'_{20} = 2.64$ ,所以经费够用.

同理,可以求出不同出矸率所对应的经费余额,如表1-2所示.

表1-2 不同出矸率的经费余额(安息角  $55^\circ$ )

出矸率/%	7	8	9	10	11
总电费/万元	358.81	447.06	544.54	651.54	768.38
经费余额/万元	1243.93	938.60	623.13	296.21	无解
是否够用	是	是	是	是	否

由表1-2可知,当出矸率在7%~10%之间时,经费够用.当出矸率在11%时,经费就不够用了.

### 1.5.3 问题(2)的解决

#### 1. 建立最低经费规划模型

为了确定处理煤矸石的最低费用,需要给每年的总经费  $q$  添加一个增量  $\Delta q$ ,在保证电费和征地费够用的条件下确定  $q + \Delta q$  是多少.而  $q + \Delta q$  等价于  $f_i + \Delta q$ .模型建立过程如下.

计划征地经费余额为

$$\begin{cases} p_i = (p_{i-1} + f_{1i} - g_i + \Delta q)(1 + R_1), i = 1, 2, \dots, n \\ p_n = 0 \end{cases} \quad (1-31)$$

从计划征地经费累计余额里的支出额满足

$$g_i \leq p_{i-1} + f_{1i} + \Delta q, i = 1, 2, \dots, n \quad (1-32)$$

目标函数为  $\min f = \Delta q$ .

汇总,得

$$\begin{aligned} \min \quad & f = \Delta q \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} w_i = g_i - u_{i-1}(1 + R_2) + u_i, i = 1, 2, \dots, n \\ S_{i-1}^* + w_i/c_{1i} - S'_i = S_i^*, i = 1, 2, \dots, n \\ S_i^* \leq \sum_{k=i+1}^n S'_k, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ p_i = (p_{i-1} + f_{1i} - g_i + \Delta q)(1 + R_1), i = 1, 2, \dots, n \\ g_i \leq p_{i-1} + f_{1i} + \Delta q, i = 1, 2, \dots, n \\ p_0 = p_n = 0 \\ S_0^* = S_n^* = 0; u_0 = u_n = 0 \\ g_i, u_i, S_i^*, p_i, w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \\ \Delta q \in (-\infty, +\infty) \end{cases} \end{aligned} \quad (1-33)$$

#### 2. 模型求解

使用模型式(1-33)计算,得出不同出矸率所对应的经费增量及其最低经费,如表1-3所示.

表 1-3 不同出矸率的经费增量和最低经费(安息角 55°)

出矸率/%	7	8	9	10	11
经费增量/万元	-35.83	-27.03	-17.95	-8.53	1.25
最低经费/万元	64.17	72.97	82.05	91.47	101.25

由表 1-3 可知,当出矸率为 7% 时,每年经费至少需要 64.17 万元. 当出矸率为 11% 时,每年至少需要 101.25 万元才够用.

## 1.6 灵敏度分析

### 1.6.1 地价涨幅 $\lambda$ 的变化对经费是否够用的影响

地价涨幅  $\lambda$  是个极不稳定的参数,而且其对征地方案的影响很大. 因此需要考查当  $\lambda$  有微小变化  $\Delta\lambda$  时对结果的影响. 这里只考查当  $\Delta\lambda = -3, -2, \dots, 3(\%)$  时的结果. 分析结果如表 1-4 所示.

表 1-4 地价涨幅的灵敏度分析结果(安息角 55°)

$\Delta\lambda/\%$	出矸率/%	7	8	9	10	11
-3		是	是	是	是	否
-2		是	是	是	是	否
-1		是	是	是	是	否
0		是	是	是	是	否
1		是	是	是	是	否
2		是	是	是	是	否
3		是	是	是	是	否

从表 1-4 可知,当  $\Delta\lambda = -3, -2, \dots, 3(\%)$  时,对结论没有影响.

### 1.6.2 矸石容重的变化对经费是否够用的影响

考查当矸石容重  $\rho$  有  $\pm 1\%$  的变化时对结果的影响. 考查结果如表 1-5 所示.

表 1-5 矸石容重的灵敏度分析结果(安息角 55°)

$\Delta\rho/\%$	出矸率/%	7	8	9	10	11
1		是	是	是	是	否
-1		是	是	是	是	否

从表 1-5 可知,当矸石容重有  $\pm 1\%$  的变化时对结论没有影响.

### 1.6.3 机械效率初始值的变化对经费是否够用的影响

考查当机械效率初始值  $\eta_0$  有  $\pm 1\%$  的变化时对结果的影响. 考查结果如表 1-6 所示.