高等学校教材 19

# 实变函数论

THEORY OF REAL VARIABLE FUNCTION

陈丽丽　张敬信　赵岩峰　主编

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高 等 学 校 教

# 实变函数论

THEORY OF REAL VARIABLE FUNCTION

陈丽丽　张敬信　赵岩峰　主编

哈爾濱工業大學出版社
HITP HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

全书共分六章，前两章是全书的基础，介绍了集合论的有关知识以及勒贝格测度理论；第三、四、五章是本书的核心部分，着重介绍了可测函数、可测函数列的收敛性定理、勒贝格积分理论，并将黎曼积分的微积分学基本结果推广到更一般的函数类；第六章简要介绍 $L^p$ 空间，讨论了勒贝格可积函数类的整体结构及其相互关系.

本书可作为高等院校数学系本科生实变函数课程的教材或教学参考书，也可作为自学用书.


**图书在版编目(CIP)数据**

实变函数论/陈丽丽，张敬信，赵岩峰主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.5

ISBN 978-7-5603-5385-2

Ⅰ.①实… Ⅱ.①陈…②张…③赵… Ⅲ.①实变函数论 Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 102465 号

策划编辑　刘培杰　马静怡
责任编辑　张永芹　杜莹雪　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 14.75　字数 258 千字
版　　次　2015 年 5 月第 1 版　2015 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5385-2
定　　价　28.00 元


---

# 前 言

实变函数是为数学系本科高年级学生开设的一门重要的基础课程, 它是在实数理论和测度理论上建立起来的现代分析, 讲述了一般空间上测度论的基础知识和 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格积分理论, 为现代数学的许多分支如概率论、泛函分析、群上调和分析等提供了坚实的理论基础.

本书是由我们在哈尔滨理工大学和哈尔滨商业大学数学系讲授实变函数课程的讲义合并、修改而成的. 全书共分六章: 第一章为集合与点集, 主要介绍了集合论的一些基本内容; 第二章为勒贝格测度, 利用内、外测度的概念引入了可测集的定义; 第三章为可测函数, 介绍了可测函数的定义及相关性质, 以及著名的叶戈洛夫定理、卢津定理、里斯定理等; 第四章为勒贝格积分, 从简单函数的勒贝格积分入手, 引入一般可测函数的勒贝格积分的定义, 讨论了勒贝格积分的性质, 并进一步发掘黎曼积分和勒贝格积分内在联系; 第五章为微分与不定积分, 着重介绍了勒贝格积分中微积分的基本定理, 并给出牛顿-莱布尼茨公式成立的充分必要条件; 第六章为 $L^p$ 空间, 介绍了此空间的基本概念、不等式及相关性质.

本书的第一章和第四章由陈丽丽编写, 第二章和第三章由张敬信编写, 第五章、第六章及附录等由赵岩峰编写. 由于这门课程的思想和方法较之数学分析更为活跃, 不易掌握, 学生学习难度较大, 因此我们在编写过程中特别注意由浅入深, 图文并茂, 加强了导引性论述, 并插入了一些数学家的传记, 以提高学生的学习兴趣. 本书的出版得到了国家自然科学基金(11401141)、黑龙江省青年科学基金(QC2013C001)、黑龙江省教育厅科技基金(12541187)、哈尔滨商业大学博士科研启动基金(13DL002)的资助, 特致谢意.

由于我们的学识和经验有限, 本书难免有错误和不妥之处, 敬请读者批评指正.

**编 者**

**2015 年 1 月**

# 目 录

# 序 章

## 一、黎曼积分理论的缺陷

1. 可积函数对连续性要求太强

设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a, b]$ 上的有界实值函数, 对 $[a, b]$ 做分割

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

称为 $[a, b]$ 的一个分划. 记 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - x_{i-1}|$.

对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 令

$$m_i = \inf \left\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}$$

$$M_i = \sup \left\{ f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}$$

则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积的充要条件是

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = 0 \tag{0.0.1}$$

其几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形（曲边梯形）的外接阶梯形与内接阶梯形面积之差趋于零（图 0.1）. 因此为保证 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的不连续点不能太多.

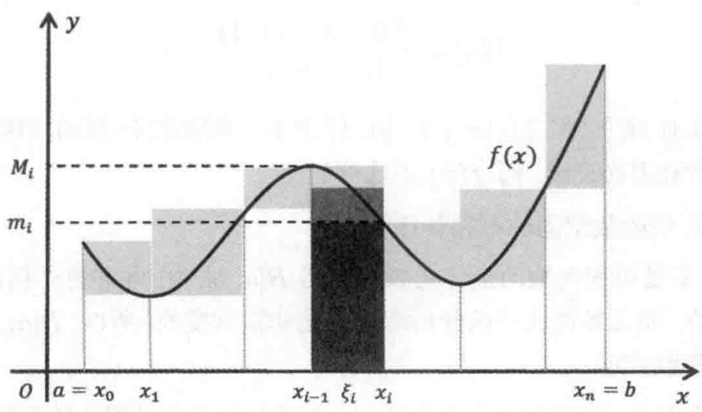


图 0.1 黎曼可积的判别

若条件 (0.0.1) 满足, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 的黎曼积分可表示为

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{0.0.2}$$

其中, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 注意, 这里的极限只是具有极限的形式, 不是一般意义上的极限.

由于黎曼积分对被积函数的连续性要求太强, 这样就限制了黎曼积分的应用.

例如, 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 上的有理数}\\ 0, & x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 上的无理数}\end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上不满足条件 (0.0.1). 因此, $D(x)$ 不是黎曼可积的.

2. 积分与极限顺序不可交换

设 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数列, 且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x),\quad \forall\, x\in[a, b]$$

一般情况下, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上未必可积. 即使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 也未必成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{0.0.3}$$

为使 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积并且式 (0.0.3) 成立, 充分条件是 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 这不是必要条件（太强且不易验证）.

例如, 考虑 $[0, 1]$ 上的连续函数列 $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \cdots$, 其极限为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0, 1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

易知, 式 (0.0.3) 成立, 但 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛于 $f(x)$（因为连续函数列的一致收敛极限必连续, 而 $f(x)$ 不连续）.

3. 黎曼可积函数空间的不完备性

$[a, b]$ 上黎曼可积函数的全体构成的空间 $R[a, b]$ 中, 并非每个柯西列都收敛, 即是不完备的. 而完备性在泛函分析理论中是非常重要的, 所以, $R[a, b]$ 不是作为研究对象的理想空间.

以上几点表明, 黎曼积分有不少缺陷, 这就限制了黎曼积分的应用, 因此有必要加以改进. 20 世纪初, 法国数学家勒贝格 (1875–1941) 创建了一种新的勒贝格积分理论. 勒贝格积分理论是黎曼积分理论的推广和发展, 并且克服了黎曼积分理论的上述缺陷.

## 二、勒贝格积分的大体思路

为了使得很多连续性不好的函数也可积, 勒贝格提出了一种新的积分思想. 主要想法就是不从分割区间 $[a, b]$ 着手, 而是从分割函数的值域出发.

为简单记, 这里只考虑 $f(x) \geqslant 0$ 的情况. 注意到勒贝格积分的几何意义就是曲线 $y = f(x)$ 的下方图形 $G(f) = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ 的面积. 因此可以用下面的方式计算 $G(f)$ 的面积.

令

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

对 $[m, M]$ 做分割

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = M$$

记 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i - y_{i-1}|$. 令

$$E_i = \{x \in [a, b] : y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则 $E_i$ 是 $[a, b]$ 的子集, 用 $|E_i|$ 表示 $E_i$ 的"长度". 取 $\xi_i \in [y_{i-1}, y_i]$, 则和式

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i |E_i|$$

是 $G(f)$ 的近似值（图 0.2）. 于是定义 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的勒贝格积分为（若下面极限存在）

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i |E_i| \tag{0.0.4}$$

对上述积分思想, 勒贝格自己曾作过一个比喻, 他说:

- 假如我欠人家一笔钱, 现在要还, 此时按钞票的面值的大小分类, 然后计算每一类的面额总值, 再相加, 这就是勒贝格积分思想;
- 如不按面额大小分类, 而是按从钱袋取出的先后次序来计算总数, 那就是黎曼积分思想.

按照勒贝格的方式定义积分的好处在于: 由于在每个 $E_i$ 上, $f(x)$ 的振幅都小于 $\lambda$, 因此很多连续性不好的函数也可积了. 但这产生了另一个困难: 要给出 $|E_i|$ 的意义以及如何计算.

$|E_i|$ 应该是一种类似区间长度的东西. 但是一般情况下, $E_i$ 不是区间, 甚至也不是有限个不相交区间的并, 因此必须对直线上比区间更一般的集合给出一种类似于区间长度的度量. 为此, 勒贝格建立了测度理论, 并且在测度理论的基础上建立了勒贝格积分理论. 勒贝格积分理论为建立近代分析理论打下了坚实的基础.

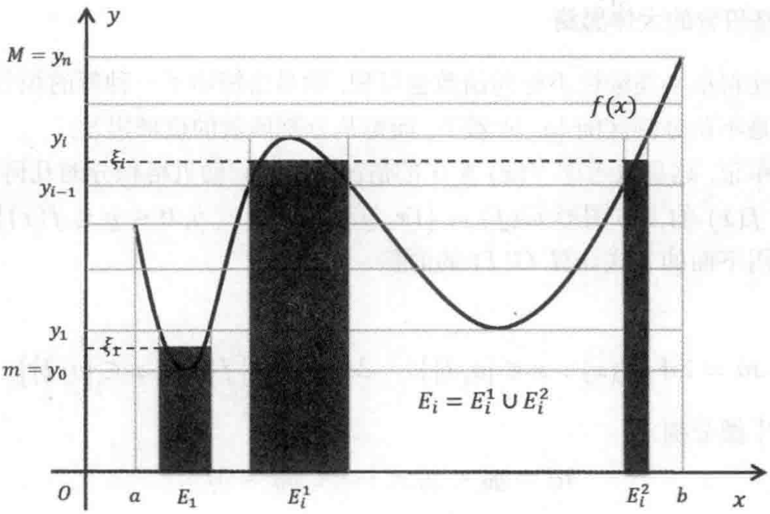


图 0.2 勒贝格积分思想

## 三、本书的基本内容

本书的主要内容是紧紧围绕勒贝格积分理论的建立而展开的, 因此本书花了很大篇幅来介绍勒贝格测度理论. 由于测度理论要经常地遇到集的运算和 $\mathbb{R}^n$ 中的各种点集, 因此本书第一章先介绍了集合论和 $\mathbb{R}^n$ 上点集的知识, 然后再介绍第二章勒贝格测度理论.

由于勒贝格测度理论并不能给直线上的每个集定义测度, 只能对一部分集合即所谓"可测集"给出测度, 因此要定义 $f(x)$ 的勒贝格积分, 必须要求由 $f(x)$ 产生的形如

$$E_i = \left\{x :\ y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\right\}$$

的集是可测集, 这样的函数称为可测函数.

只有对可测函数才能定义新的积分, 因此在定义勒贝格积分之前, 需要定义可测函数并讨论可测函数的性质, 这就是本书的第三章. 作了这些准备后, 就可以定义勒贝格积分, 并讨论勒贝格积分的性质以及与黎曼积分的关系, 构成本书的第四章.

进一步, 本书第五章利用勒贝格积分理论, 将黎曼积分的微积分学基本结果推广到更一般的函数类, 得到了勒贝格积分的微积分学基本定理、牛顿–莱布尼茨公式等, 使得勒贝格积分理论更加完善.

最后, 为了弥补黎曼可积函数空间不完备性缺陷, 本书在第六章介绍了所有 $p$ 次幂 L-可积函数的全体构成的空间——$L^p$ 空间理论, 讨论了勒贝格可积函数类的整体结构及其相互关系. $L^p$ 空间的完备性和可分性为人们解决一些具体数学问题

带来了极大的便利, 为我们在其上建立分析学奠定了基础. $L^p$ 空间本身就是泛函分析课程中巴拿赫空间的一类重要例子, 其理论也广泛地应用于微分方程、积分方程、傅里叶分析、有限元分析等许多领域.

# 第一章 集合与点集

集合论自 19 世纪 80 年代由德国数学家康托尔创立以来, 已发展成为一个独立的数学分支, 其基本概念与方法已渗入到 20 世纪的各个数学领域. 集合与集合的运算是测度与勒贝格积分理论的基础. 本章先介绍集合论的一些基本内容, 包括集与集的运算、可列集和基数、$\mathbb{R}^n$ 中开集、闭集及其性质、一维开集的构造、康托尔集.

## §1.1 集合及其运算

本节将引入集合的概念与集合的运算; 德·摩根公式是今后常用的公式; 证明两个集合相等是经常要遇到的论证; 集列的极限是一种新型的极限, 利用上限集或下限集可以描述一些特殊的点集.

### 一、集合的基本概念

1. 具有确定内容或满足一定条件的事物的全体称为集合(或集), 通常用大写字母如 $A$, $B$, $C$ 等表示. 构成一个集合的那些事物称为集合的元素(或元), 通常用小写字母如 $a$, $b$, $c$ 等表示.

若 $a$ 是集合 $A$ 的元素, 则称 $a$ 属于 $A$, 记为 $a \in A$; 若 $a$ 不是集合 $A$ 的元素, 则称 $a$ 不属于 $A$, 记为 $a \notin A$. 对于给定的集合, 任一元素要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

不含任何元素的集合称为空集, 用 $\emptyset$ 表示; 只含有限个元素的集合称为有限集; 不是有限集的集合称为无限集.

我们用 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 分别表示整数集、自然数集、有理数集和实数集.

2. 集合的表示方法

(1) 列举法 —— 列出给定集合的全部元素. 例如

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{1, 3, \cdots, 2n-1\}$$

(2) 描述法 —— $A = \{x:\ x \text{ 具有性质 } P\}$. 例如

$$\ker f = \{x:\ f(x) = 0\}$$

3. 集合的相等与包含

若集合 $A$ 和 $B$ 具有完全相同的元素, 则称 $A$ 与 $B$ 相等, 记为 $A=B$.

若 $A$ 中的每个元素都是 $B$ 的元素, 则称 $A$ 为 $B$ 的子集, 记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$, 则称 $A$ 为 $B$ 的真子集, 记为 $A\subsetneq B$.

**注 1.1.1** $A=B \Longleftrightarrow A\subset B$ 且 $B\subset A$. (经常用于证明两个集合相等)

集合 $A$ 的所有子集的全体, 称为 $A$ 的幂集, 记为 $2^A$.

## 二、集合的运算

1. 交与并

设 $A, B$ 为两个集合, 由属于 $A$ 或属于 $B$ 的所有元素构成的集合, 称为 $A$ 与 $B$ 的并, 记为 $A\cup B$, 即

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

由既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素构成的集合, 称为 $A$ 与 $B$ 的交, 记为 $A\cap B$, 即

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

若 $A\cap B=\emptyset$, 则称 $A$ 与 $B$ 互不相交.

2. 集族

$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为集族, 其中 $\Gamma$ 为指标集(有限或无限), $\alpha$ 为指标. 特别地, 当 $\Gamma=\mathbb{N}$ 时, 集族称为集列, 记为 $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ 或 $\{A_n\}$.

集族的并

$$\bigcup_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x: \exists\ \alpha_0\in\Gamma \text{ 使得 } x\in A_{\alpha_0}\}$$

集族的交

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} A_\alpha=\{x: x\in A_\alpha, \forall\ \alpha\in\Gamma\}$$

3. 差与余

由属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素构成的集合, 称为 $A$ 与 $B$ 的差, 记为 $A-B$ 或 $A\setminus B$, 即

$$A-B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

通常所讨论的集合都是某一固定集 $X$ 的子集, $X$ 称为基本集或全集. 基本集 $X$ 与子集 $A$ 的差集 $X-A$, 称为 $A$ 的余集, 记为 $A^c$, 即

$$A^c=\{x: x\notin A\}$$

4. 笛卡儿积

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_i \in A_i, i = 1, \cdots, n\}$$

例如, $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n\text{ 个}}$.

5. 集合的运算具有如下性质

(1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(2) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;

(3) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$A \cap \left( \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} (A \cap B_\alpha)$, $A \cup \left( \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \right) = \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} (A \cup B_\alpha)$;

(6) $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$;

(7) $X^c = \emptyset$, $\emptyset^c = X$;

(8) $A - B = A \cap B^c$.

**定理 1.1.1 (德・摩根公式)** 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 为一集族, 则

(i) $\left( \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$;

(ii) $\left( \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$.

**证明** (i) 设 $x \in \left( \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$, 则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha$, 故对 $\forall\, \alpha \in \Gamma$, $x \notin A_\alpha$, 即 $\forall\, \alpha \in \Gamma$, $x \in A_\alpha^c$. 从而 $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$, 因此, $\left( \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c \subset \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$. 上述推理反过来也成立, 故 $\bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c \subset \left( \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c$. 因此, $\left( \bigcup\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha \right)^c = \bigcap\limits_{\alpha \in \Gamma} A_\alpha^c$. (ii) 类似可证. □

## 三、上限集与下限集

设 $\{A_n\}$ 为单调集列, 若 $\{A_n\}$ 单调递增, 即

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 若 $\{A_n\}$ 单调递减, 即

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

则 $\{A_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

**定义 1.1.1** 对于一般的集列 $\{A_n\}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} A_k \supset \cdots \supset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \supset \cdots$$

记 $C_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\{C_n\}$ 单调递减, 故 $\{C_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的上限集, 记为 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 又

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcap_{k=2}^{\infty} A_k \subset \cdots \subset \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subset \cdots$$

记 $D_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\{D_n\}$ 单调递增, 故 $\{D_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

称 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ 为 $\{A_n\}$ 的下限集, 记为 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 或 $\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n$. 显然有如下关系

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

若 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, 则称 $\{A_n\}$ 收敛, 其极限记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

**命题 1.1.1** 设 $\{A_n\}$ 为一集列, 则

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k &= \{x : x \text{ 属于无穷多个 } A_n\}\\ &= \{x : \text{对 } \forall\, k \in \mathbb{N}, \text{ 都存在 } n_k \text{ 使得 } x \in A_{n_k}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k &= \{x : \text{除有限个 } A_n \text{ 外, 都含有 } x\}\\ &= \{x : \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ 使得 } x \in A_n, \forall\, n \geqslant n_0\}\end{aligned}$$

**证明** (1) 设 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则对 $n=1$, 有 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in A_{n_1}$; 对 $n = n_1+1$, 有 $x \in \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 故 $\exists\, n_2 > n_1$, 使得 $x \in A_{n_2}$; 以此类推, 得到一列 $\{n_k\}$ 满足 $n_1 < n_2 < \cdots$, 且 $x \in A_{n_k}$, $\forall\, k$. 因此, $x$ 属于无穷多个 $A_n$.

反之, 若 $x$ 属于无穷多个 $A_n$, 不妨设 $x \in A_{n_k}$, $k = 1, 2, \cdots$, 且 $n_1 < n_2 < \cdots$, 则对 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 都存在 $n_k > n$. 从而 $x \in A_{n_k} \subset \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 因此, $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

(2) 设 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 则 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $x \in \bigcap\limits_{k=n_0}^{\infty} A_k$, 故 $x \in A_n, \forall\, n \geqslant n_0$. 反之, 若 $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in A_n, \forall\, n \geqslant n_0$, 则 $x \in \bigcap\limits_{k=n_0}^{\infty} A_k$, 故 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. □

**例 1** 设 $A_{2n+1} = [0, 2-1/(2n+1)]$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, $A_{2n} = [0, 1/2n]$, $n = 1, 2, \cdots$, 求 $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ 与 $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

**解** 注意到

$$[0, 1] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset [0, 2)$$

故只需考察 $(1, 2)$ 中的点. 对 $\forall\, x \in (1, 2)$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$(与 $x$ 有关), 使得

$$1 + \frac{1}{2n} < x < 2 - \frac{1}{2n+1}, \quad \forall\, n \geqslant n_0$$

即当 $n \geqslant n_0$ 时, 有 $x \notin A_{2n}$, $x \in A_{2n+1}$. 这说明: (i) $x$ 不能"除有限个 $A_n$ 外, 都含有 $x$", 即 $x \notin \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$; (ii) "$x$ 属于无穷多个 $A_n$", 故 $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. 因此, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 1]$, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0, 2]$.

**例 2** 设 $f_n(x)$, $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的实值函数, 则所有 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点 $x$ 构成的集合 $D$ 可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$$

**证明** 若 $x \in D$, 则 "$f_n(x) \nrightarrow f(x)$", 即 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_k \geqslant k$, 使得

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

记 $E_n(\varepsilon_0) = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0\}$, 则由命题 1.1.1 知, $x \in \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0)$, 故 $D \subset \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0)$.

反之, 若 $x \in \bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0)$, 则对 $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_N \geqslant N$ 使得 $x \in E_{n_N}(\varepsilon_0)$, 即 $|f_{n_N}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$, 故 $x \in D$. 从而 $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0) \subset D$. 综上

$$D = \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n(\varepsilon_0), \quad \exists\, \varepsilon_0 > 0$$

考虑到 $\varepsilon_0$ 的取法, 不妨设 $\varepsilon_0 = 1/k_0$, $k_0 \in \mathbb{N}$. 因此

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\} \end{aligned}$$

□