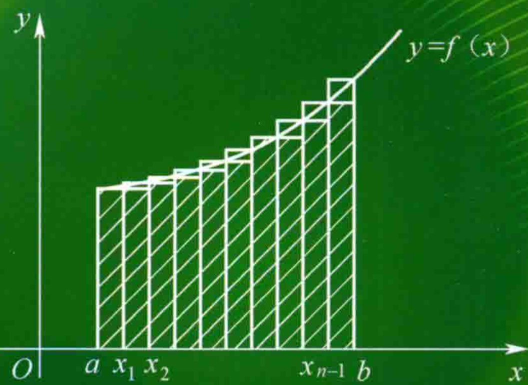
河南省“十二五”普通高等教育规划教材

应用数学

（第二版·下册）

主　编　孙振营　徐自立
副主编　焦慧平　梁银双



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

河南省“十二五”普通高等教育规划教材

应用数学（第二版·下册）

主　编　孙振营　徐自立

副主编　焦慧平　梁银双

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本套教材分为上、下两册。应用数学（第二版·上册）涵盖了函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、常微分方程等内容。应用数学（第二版·下册）涵盖了向量与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、数学软件包等内容。书后附有初等数学常用公式、节后练习题、章后总习题参考答案及提示供读者参考。

本套教材适用于高职高专院校、成人高校工科类及经管类各专业，也可作为相关技术人员和其他大专类学生学习的教材或参考书。

本书配有电子教案，读者可以从中国水利水电出版社网站和万水书苑上下载，网址为：http://www.waterpub.com.cn/softdown/和http://www.wsbookshow.com。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学．下册 / 孙振营，徐自立主编．-- 2版．-- 北京：中国水利水电出版社，2015.8
河南省"十二五"普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-5170-3621-0

Ⅰ．①应… Ⅱ．①孙… ②徐… Ⅲ．①应用数学－高等职业教育－教材 Ⅳ．①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第210782号

策划编辑：石永峰　向辉　责任编辑：张玉玲　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李佳

书　名	河南省"十二五"普通高等教育规划教材 **应用数学（第二版·下册）**
作　者	主　编　孙振营　徐自立 副主编　焦慧平　梁银双
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水）
经　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京正合鼎业印刷技术有限公司
规　格	170mm×227mm　16开本　10.25印张　200千字
版　次	2011年2月第1版　2011年2月第1次印刷 2015年8月第2版　2015年8月第1次印刷
印　数	0001—3000册
定　价	20.00元

前　言

数学能启迪人们思维、推进科学纵深发展。很少人能认识到当今被过多称颂的“高技术”本质上是数学技术，数学化是诸多领域和项目背后的推动力。但由于数学的深刻性、抽象性和严谨性等学科特点，造成学生在学习过程中有很多困难。

因此，为了更好更轻松地学习和应用数学，也为了更好地适应当前我国高等教育的发展、满足社会对高校应用型人才培养的各类要求、贯彻教育部组织制定的高职高专教育基础课程教育基本要求的核心思想，在认真总结高职高专高等数学教学改革经验的基础上，结合编者的教学实践经验和同类教材发展趋势编写了此书。本套教材在 2013 年入选了第一批河南省“十二五”普通高等教育规划教材，2015 年修订后通过评审委员会验收。

本书遵循高职高专教育的教学规律，本着重能力、重素质、求创新的总体思路，强化概念，淡化严格论证，注重应用，充分体现“以应用为目的，以必需够用为度”的原则。编写内容侧重对学生数学思维能力的培养，注意其中问题的提出、引入，具有结构严谨、逻辑清晰、叙述得当、题量适中、便于自学等特点，全书通俗易懂、简明扼要，具有科普特色。

本套书有以下特点：

（1）相对于传统的高等数学内容，在兼顾内容完整性的基础上本教材对各章内容进行了适当的增删与修改，突出直观性和应用性。对难度较大的部分基础理论，考虑到教学目标和学生学习的特点，一般不做论证和推导，只叙述定理，做简单说明。

（2）为了更贴近社会、贴近生活、贴近应用，本书精选了社会活动、物理工程和经济管理方面的典型例题或案例，进一步强调本学科的实际应用，激发学生的学习兴趣。

（3）加强对基本概念、理论的理解和应用，借助几何图形和实际问题强化了概念和定理的直观性，将常用公式及方法汇总成表格的形式，以便对照记忆和查阅，注重与中学知识的衔接，培养学生的逻辑思维能力。

（4）注重基本运算技能的训练，但不过分追求复杂的计算和变换技巧。每节都配有针对性较强但难度不大的练习题，每章最后又都配有比较综合的复习题，以提高读者对所学知识的综合运用能力和解决实际问题的能力。

（5）为了突出重点、解释难点，在相应的地方给出了相应的注释。

（6）每章前列有学习目标，及时指出知识的要点和大纲要求，使读者提前了解各章内容，便于自学和把握本章的重点和难点。

（7）为了培养学生运用计算机进行数学运算的兴趣和能力，在本套书的最后

一章特别编写了数学软件包 Matlab 这部分知识。

本套书分为上、下两册，参考学时为 144 学时，教师在使用本套书时可根据教学实际需求灵活掌握。

下册书由孙振营、徐自立任主编，焦慧平、梁银双任副主编。编写分工如下：第八章、附录及参考答案由孙振营编写；第九、十章由徐自立编写；第十一章的第 3～5 节、第十二章由焦慧平编写。第十一章的第 1～2 节由梁银双编写。全书框架结构安排、统稿和定稿由孙振营承担。

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编 者

2015 年 5 月

目　　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何

【学习目标】

- 理解空间直角坐标系的概念，掌握两点间距离公式，理解向量的概念及其坐标表示式，会求向量的模、方向余弦及单位向量.
- 会用向量坐标进行向量的线性运算、数量积与向量积运算，会求两向量的夹角，掌握两向量平行、垂直的充要条件.
- 掌握平面的方程与直线的方程，会用简单的条件求平面与直线的方程，理解平面与平面、直线与直线、平面与直线的关系，会求点到平面的距离.
- 了解空间曲面、曲线及其方程的概念，知道空间曲线的一般方程及参数方程，会求简单的空间曲线在坐标面上的投影.

在初等数学中我们学过了平面解析几何，在平面解析几何中，通过坐标法将平面上的点与有序的二元数组一一对应，将平面几何图形与二元方程一一对应，从而可以用代数方法研究平面几何图形的问题. 与此类似，对于空间几何图形，可以建立空间直角坐标系，使空间的点与三元数组对应起来，从而使空间几何图形与三元方程一一对应起来，即用代数方法研究空间几何图形问题.

本章先建立空间直角坐标系，介绍向量及其基本运算，然后以向量知识为基础，介绍空间几何图形——平面、直线、曲面和曲线的方程及其相关知识.

8.1　向量及其线性运算

8.1.1　空间直角坐标系

自空间一定点 O，作三条两两垂直的数轴 Ox、Oy、Oz，通常把 Ox 轴和 Oy 轴配置在水平面上，而 Oz 轴与水平面垂直. 各轴正向按右手法则确定，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴正向. 这就构成了一个空间直角坐标系 $O-xyz$，如图 8-1 所示. 称 O 点为坐标原点，数轴 Ox、Oy、Oz 为坐标轴，简称 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）. 任意两条坐标轴所确定的平面统称为坐标平面，它们是 xOy 面、yOz 面、zOx 面，三个坐标平面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，如图 8-2 所示.

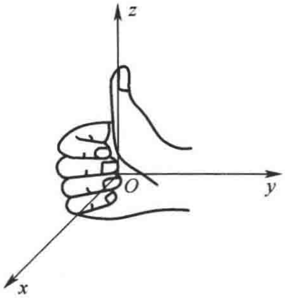


图 8-1

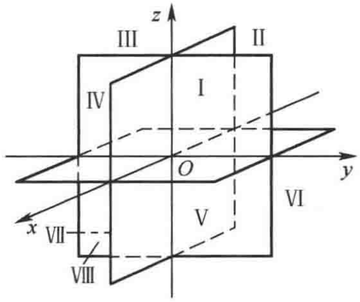


图 8-2

在平面直角坐标系中，平面上的点与有序实数组一一对应，以下讨论在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，空间中的点与有序实数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过点 M 分别作垂直于坐标轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于点 P 、Q 、R . 点 P 、Q 、R 叫做点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，如图 8-3 所示，设 P 、Q 、R 在相应坐标轴上的坐标依次为 x 、y 、z ，这样，空间中的一个点 M 唯一确定了一个有序实数组 (x,y,z) .

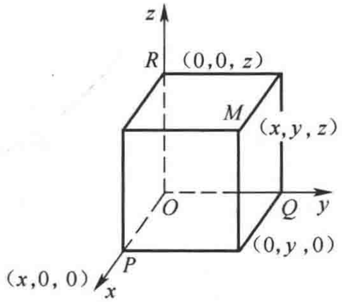


图 8-3

反之，任意给定一个有序实数组 (x,y,z) ，可以在坐标轴上确定与它们相对应的点 P、Q、R，即过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这 3 个平面必然交于空间一点 M . 这样一个有序实数组 (x,y,z) 唯一地确定了空间中的一个点 M . 由此可见，空间中的一点 M 与有序实数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，这一数组称为点 M 的坐标，x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，这时点 M 记作 $M(x,y,z)$.

特殊地，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$ ，x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$ ，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$ ，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 坐标平面上点的坐标为 $(x,y,0)$ ，yOz 坐标平面上点的坐标为 $(0,y,z)$ ，zOx 坐标平面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

接下来我们推导空间两点的距离公式. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间

中的两点，过点M_1,M_2分别作垂直于x轴、y轴、z轴的平面，这6个平面构成一个长方体，如图8-4所示，$|M_1M_2|$为该长方体对角线的长.

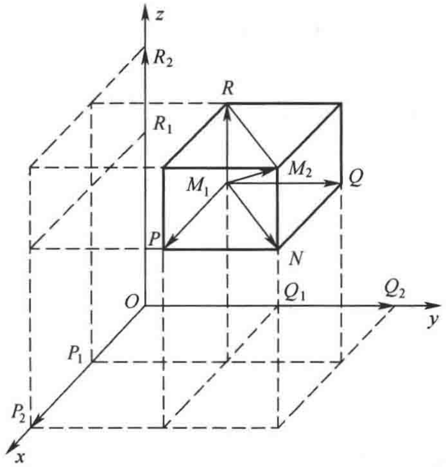


图 8-4

由长方体对角线计算公式知

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2}.$$

由于

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|，\quad |PN| = |y_2 - y_1|，\quad |NM_2| = |z_2 - z_1|，$$

所以点M_1、M_2间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

特殊地，点$M(x,y,z)$到原点O的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 8.1 求点$M(1,-1,2)$到x轴的距离.

解 设$M(1,-1,2)$在x轴的投影为P，则点P的坐标为$P(1,0,0)$，且线段MP的长就是点M到x轴的距离，于是

$$|MP| = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}.$$

8.1.2 向量的概念及其线性运算

1. 向量的概念

在日常生活中，我们常会遇到这样两种不同类型的量：一类是数量，如时间、长度、体积等，它们是只有大小的量；另一类是向量（又称矢量），如速度、加速度、位移、力等，它们不仅有大小还有方向.

几何上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．向量常记为 $\vec{F},\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 或 $\boldsymbol{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$．起点为 A、终点为 B 的有向线段所表示的向量常记为 $\overrightarrow{AB}$，如图 8-5 所示．起点为 O、终点为 M 的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 对于起点 O 的**向径**，常用 $\boldsymbol{r}$ 表示，如图 8-6 所示．于是，空间每一点 M，对应一个向径 $\overrightarrow{OM}$；反之，每一个向径 $\overrightarrow{OM}$，对应着空间中一个确定的点 M．

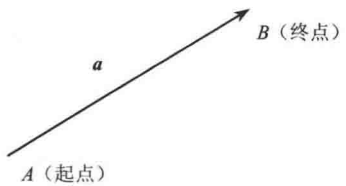


图 8-5

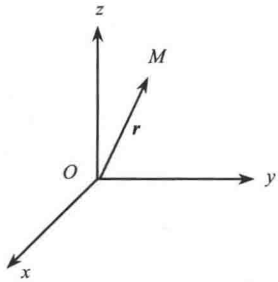


图 8-6

表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小的数称为向量的模（或向量的长度），记为 $|\boldsymbol{a}|$．模等于零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$．零向量的方向可以看作是任意的，它表示空间中一点．模等于 1 的向量称为单位向量．

当两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同、模相等时，称它们为相等的向量，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，如果向量只取决于大小和方向，与起点位置无关，称这样的向量为自由向量．于是，任意一个向量经过平移后与原向量相等．本书除特别指明外，都是指自由向量．当两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$．由于平行的向量经平移后，可放在同一条直线上，所以平行向量又称为共线向量．与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反的向量，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$．

将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移，使它们的起点重合，它们所在射线的夹角 $\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，如图 8-7 所示，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$．当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

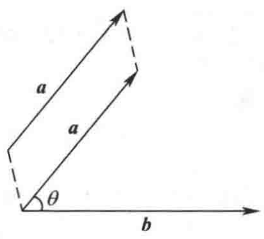


图 8-7

特别地，因为零向量的方向可以是任意的，所以可认为零向量与任意向量平行，零向量与任意向量垂直，并且，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时，规定它们的夹角可以在 $[0,\pi]$ 中任意取值.

2. 向量的线性运算

向量的加、减法，数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

设有两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，空间中任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8-8 所示，这种方法称为向量加法的平行四边形法则.

由图 8-8 知，向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的加法也可规定如下：将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量便是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，如图 8-9 所示. 这种方法叫做向量加法的三角形法则. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，三角形法则也适用.

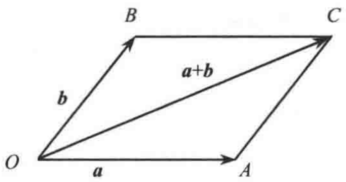


图 8-8

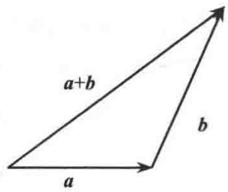


图 8-9

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可按图 8-10 的方法作出. 即将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量，为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

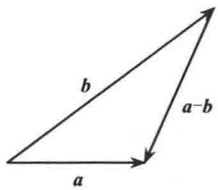


图 8-10

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘运算，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|.$$

它的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意.

若 $\boldsymbol{a}$ 是任意非零向量，$\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则由向量的数乘运算知

$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，于是 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$．

一般地，向量的加法、数乘有以下运算性质：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　（λ,μ 是实数）；

（3）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　（λ,μ 是实数）；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　（λ 是实数）．

由数与向量的乘法，可得下面的定理．

定理 8.1　向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\ .$$

证　充分性是显然的，下面证明必要性．

设 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

因此

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\ .$$

再证数 λ 的唯一性．设另有数 μ 使 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}，\text{即}\ (\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ .$$

因 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$．

8.1.3　向量的坐标表示式

1．向径的坐标表示式

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，分别在 x 轴、y 轴、z 轴上有一个与坐标轴同向的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称它们为直角坐标系 $O-xyz$ 的基本单位向量．如图 8-11 所示，设向径 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 M 的坐标为 (x,y,z)，过点 M 分别作垂直于坐标轴的平面，它们在 x 轴、y 轴、z 轴上的交点分别为 P,Q,R，其坐标分别为 $(x,0,0),(0,y,0),(0,0,z)$，于是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}，\ \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PN}=y\boldsymbol{j}，\ \overrightarrow{OR}=\overrightarrow{NM}=z\boldsymbol{k}，$$

由向量的加法知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}，$$

即

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\ .$$

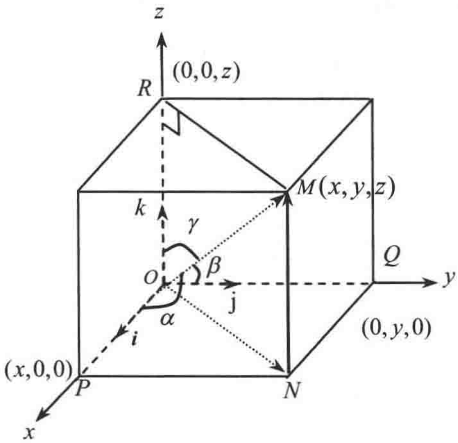


图 8-11

上式称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的基本单位向量的分解表示式，其中 $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$ 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分向量， x , y , z 称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影，并称这个有序的数组 (x,y,z) 为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标，记作

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z).$$

上式称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式．显然向径 $\overrightarrow{OM}$ 与它的三个坐标是一一对应的，因此它的基本单位向量的分解表示式及坐标表示式是唯一的．

向径 $\overrightarrow{OM}$ 的模 $|\overrightarrow{OM}|$ 表示点 O 、 M 间的距离，即

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

向径 $\overrightarrow{OM}$ 的方向可由 $\overrightarrow{OM}$ 与三个坐标轴不超过 π 的夹角唯一确定．称向径 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的夹角 α,β,γ 为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的方向角（ $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$ ），称 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦．如图 8-11 所示，$\triangle ORM$ 为直角三角形，于是

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

同理得

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

2. 向量的坐标表示式

设任一向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点、终点分别为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ，点 M_1 、M_2

对应的向径分别为 $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ ，如图 8-12 所示，则

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$
$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

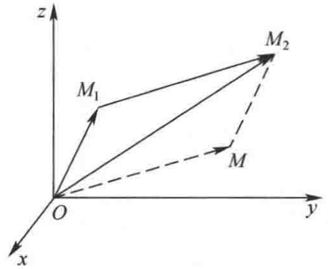


图 8-12

从而

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

上式称为任意向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的基本单位向量的分解表示式，其中 $(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$, $(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$, $(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分向量，三个数 x_2-x_1 , y_2-y_1 , z_2-z_1 称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影，并称这个有序的数组 $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ 为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标，记作

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

上式称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式.

由于任意向量可平移成向径，设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平移后为向径 $\overrightarrow{OM}$ ，于是

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

且 M 点的坐标为 $M(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ ，于是

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

上式即为两点间的距离公式.

若向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的夹角分别为 α,β,γ ，则它们分别等于向径 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的夹角，于是有

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}},$$