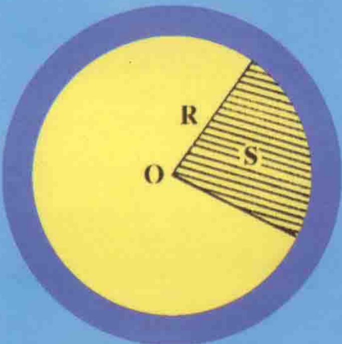
新题型新思路

高三数学

北京市海淀区
马海波　崔建一
主编

张法均　等编著



海洋出版社

新题型　新思路

高三数学

北京市海淀区　马海波　崔建一　主编

张法均等　编著

海洋出版社

1998年·北京

图书在版编目(CIP)数据

新题型新思路：高三数学/张法均等 编著．—北京：海洋出版社，1998．1

ISBN 7-5027-4365-0

Ⅰ．新…　Ⅱ．张…　Ⅲ．数学课-高中-习题

Ⅳ．G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（97）第 21728 号

海洋出版社　**出版发行**

（北京市海淀区大慧寺路 8 号　100081）

北京媛明印刷厂印刷　　新华书店发行所经销

1998 年 1 月第 1 版　　1998 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：787×1092　1/32　印张：9.375

字数：210 千字　　印数：1—6000 册

定价：10.40 元

编 写 说 明

为了帮助学生系统地复习初、高中各年级的各科知识，为了便于教师及家长辅导或指导学生复习，我们根据国家教委颁发的《全日制中学教学大纲》的要求和新教材的内容，组织有丰富教学经验的教师编写了这套《新题型新思路》丛书。本丛书共有二十八个分册（初一至高三年级语文六册、数学六册、英语六册；初二至高三年级物理五册；初三至高三年级化学四册；高中历史一册）。

本丛书系统地介绍了各科基础知识，全面地归纳了各类题型，突出地点明了知识的重点、难点，认真地分析了解题思路，规范地给出了解题格式，科学地配备了相应练习。

本丛书在内容安排上，既照顾了与教材内容同步，又突出了有别于其他丛书的整体特色。基本安排是"基础知识介绍"、"典型试题分析"、"练习题"、"练习题提示及答案"四个部分。这样做的目的是：有利于学生系统地复习各科知识，掌握每一知识点的重点、难点和考点，提高分析问题和解决问题的能力，拓宽解题思路，选择最佳解题方法。

尽管在编写过程中，我们本着对读者负责的态度，进行

了层层把关，但书中仍可能存有不足之处，特恳请广大读者批评指正。

本分册是由张法均、张穗明、梁林、关一鸣、史晓盛、关民乐、陈浦生、黄一超、陈刚老师编写的。

主编者

1997 年 10 月

目　　录

第一部分　代　　数

第一章　幂函数　指数函数和对数函数

函数是中学数学的重要内容,它贯穿于中学代数的始终。是历年高考数学测试的重点，其中集合，函数的概念、图象和性质，二次函数、指数函数和对数函数、指数方程和对数方程在高考试题中经常出现，复习时要引起高度重视．

本章的内容包括集合的有关概念与运算；函数的概念与性质；反函数的概念与图象；幂函数、指数函数、对数函数的定义、图象与性质;指数方程和对数方程共十一个知识点．

一、集　　合

集合是数学中一个基本概念，它渗透到中学数学的一切领域，无论在代数、三角、立体几何和解析几何都涉及到集合的知识．本节主要内容包括集合的基本概念（有限集、无限集、空集、集合中元素的特性、集合的表示法、元素与集合的关系、集合与集合之间的关系），集合的分类（子集、交集、并集、补集的概念）集合的性质（集合相等、传递性）等

知识，几乎在每年高考中属于必考的内容，一般常以选择题的形式出现，它主要考查集合的基本知识以及集合语言与集合思想的运用．

例 1 集合 $M=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in Z\right\}$，$N=\left\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}, k\in Z\right\}$，则（　　）(1993 年高考试题)

(A) $M=N$　　(B) $M\supset N$

(C) $M\subset N$　　(D) $M\cap N=\varnothing$

［分析］ 取 $k=1$，则 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\in M$，$\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\in N$，故 $M\cap N\neq\varnothing$，(D) 被排除．

取 $k=0$，那么 $\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\in N$，但如果 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 时，则 $k=\frac{1}{2}$，此时 k 不是整数，即 $\frac{\pi}{2}\notin M$，由此排除了 (A) 和 (B)，故选 (C) 正确．

例 2 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M\cup N}$ 等于（　　）(1990 年高考试题)

(A) $\varnothing$　　(B) $\{(2,3)\}$

(C) $(2,3)$　　(D) $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

［分析］ 由 $I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$ 表示在坐标平面上所有的点集．集合 $M=\left\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\right\}$ 表示在坐标平面上直线 $y-3=x-2$，即 $y=x+1$ 上除去点 $(2,3)$ 所有点集．而 $N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$ 表示除去直线 $y=x+1$ 上

的点外的所有点的集合.

从而可以看出 $M\cup N=M$, $\therefore \overline{M\cup N}=\{(2,3)\}$，因此选（B）正确.

例 3 若 $A=\{x||x-1|<2\}$, $B=\left\{x|\dfrac{x-2}{x}>0\right\}$，则 $A\cap B=$（ ）

（A） $\{x|-1<x<3\}$

（B） $\{x|x<0$ 或 $x>2\}$

（C） $\{x|-1<x<0\}$

（D） $\{x|-1<x<0$ 或 $2<x<3\}$

［分析］ 由 $A=\{x||x-1|<2\}=\{x|-1<x<3\}$,

$$B=\left\{\frac{x-2}{x}>0\right\}=\{x|x<0\text{ 或 }x>2\}$$

$\therefore A\cap B=\{x|-1<x<3\}\cap\{x|x<0$ 或 $x>2\}$

$=\{x|-1<x<0$ 或 $2<x<3\}$，故选（D）

例 4 若全集 $I=R$, $A=\left\{x|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right\}$，$B=\{x|\log_3(x-a)<2\}$，问 a 取什么值时，下列各式分别成立

（1） $A\subset B$; （2） $A\cap B\neq\varnothing$;

（3） $A\cap B=\varnothing$; （4） $\overline{A}\cup B=\overline{A}$;

解：由 $A=\left\{x|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{(x+2)(x-3)}>1\right\}=\{x|-2<x<3\}$,

由 $B=\{x|\log_3(x-a)<2\}=\{x|a<x<9+a\}$

（1） 要使 $A\subseteq B$，必须 $a\leqslant-2<x<3\leqslant 9+a$，此时 a 的取值范围是 $-6\leqslant a\leqslant-2$.

（2） 要使 $A\cap B\neq\varnothing$，必须 $a<3$ 且 $9+a>-2$，得 a 的取值范围是 $-11<a<3\}$.

（3） 要使 $A\cap B=\varnothing$，必须 $a\geqslant 3$ 或 $9+a\leqslant-2$ 得 a

的取值范围是 $a \leqslant -11$ 或 $a \geqslant 3$.

(4) 要使 $\overline{A} \cup B = \overline{A}$,即要 $B \subseteq \overline{A}$,此时有 $A \cap B = \varnothing$,所以 a 的取值范围是 $a \leqslant -11$ 或 $a \geqslant 3$.

说明：本题主要考查的是集合对应思想，因为集合具有某种共同属性的全体，用集合语言表述的题目中，首先要弄懂题意，在运用集合的概念和运算进行推理判断时，还要注意“或”与“且”的区别.

二、映射与函数

本节主要内容包括映射与函数，函数的三要素（定义域、值域及对应法则）、函数的三种表示法（解析法、列表法、图象法）、反函数和函数的性质（单调性、奇偶性）等五个知识点.在高考试题中占有重要的位置，在选择、填空、解答三种题型都有出现，以选择题、填空题占多数，复习时应充分注意.

（一） 函数的定义域和值域

1. 函数的定义域是指自变量 x 的取值范围.

例 1 求函数 $y=\dfrac{\arccos(x-2)+\sqrt{9-x^2}}{\log_2(5-2x)}$ 的定义域

解:自变量 x 的取值应满足

$$\begin{cases} |x-2| \leqslant 1 \\ 9-x^2 \geqslant 0 \\ 5-2x > 0 \\ \log_2(5-2x) \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -3 \leqslant x \leqslant 3 \\ x < \dfrac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

$\therefore$函数的定义域为 $\left\{x \mid 1 \leqslant x < 2 \text{ 或 } 2 < x < \frac{5}{2}\right\}$.

说明：给出函数的解析式，求函数的定义域的方法可归纳如下：

(1) 用整式表示的函数关系式 $y = p(x)$,定义域为全体实数,即 $x \in R$.

(2) 用分式表示的函数关系式 $y = \frac{Q(x)}{p(x)}$,自变量 x 的取值范围是使分母的值不等于零的一切值,即 $p(x) \neq 0$.

(3) 用偶次根式表示的函数关系式 $y = \sqrt[2n]{p(x)}$ $(n \geqslant 1$ 且 $n \in N)$,自变量 x 的取值范围是使根号内的值非负,即 $p(x) \geqslant 0$.

(4) 用对数式表示的函数关系式 $y = \log_a p(x)$ $(a > 0$ 且 $a \neq 1)$,自变量 x 的取值范围使对数符号后面的真数为正,即 $p(x) > 0$.

(5) 用三角函数表示的函数关系式,对于

$y = \operatorname{tg} p(x)$,那么 x 取值使 $p(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$;

$y = \operatorname{ctg} p(x)$,那么 x 取值使 $p(x) \neq k\pi, k \in Z$.

(6) 用反三角函数表示的函数关系式，对于 $y = \arcsin p(x)$ 和 $y = \arccos p(x)$，自变量 x 的取值范围使 $|p(x)| \leqslant 1$.

在一个已知函数式中,常常是上述问题的综合,那么在考虑它的定义域时,只需求出使函数的解析式有意义的自变量的取值范围就可以了. 由此可见,求函数定义域的问题实际上归结为解一元不等式或一元不等式组的问题.

请读者练习：

(1)　函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}+\lg(4x+3)$ 的定义域是__________．　　　答：$\left\{x \mid -\dfrac{3}{4}<x<2 \text{ 且 } x\neq 1\right\}$

(2)　设函数 $y=\lg(x^2-x-2)$ 的定义域为 A，函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{1-x}}$ 的定义域为 B，则 $A\cap B=$ __________．

(1986 年全国高考广东试题)　　　答：$x\in[-2,-1)$．

例 2　设 $f(x)$ 的定义域是$[2,3]$，求函数 $f(x^2)$ 的定义域．

［分析］　题中的 $f(x)$ 和 $f(x^2)$ 是表示有同一对应法则 f 的函数，如果令 $x^2=t$，则 $f(x)$ 与 $f(t)$ 表示同一函数，它们的定义域是一致的．

解：令 $x^2=t$，那么 $f(x^2)$ 为 $f(t)$

$\because f(x)$ 的定义域是$[2,3]$，　$\therefore f(t)$ 的定义域也是$[2,3]$，即 $2\leqslant t\leqslant 3$，　$\therefore 2\leqslant x^2\leqslant 3$

解这个不等式得函数 $f(x^2)$ 的定义域是 $x\in[-\sqrt{3},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{3}]$．

说明：这是求函数定义域的第二类问题，不给出函数的解析式，由函数 $f(x)$ 的定义域 M，确定复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域问题，只需令 $g(x)=t$ 把 $f[g(x)]$ 转化为 $f(t)$．而 $f(x)$ 与 $f(t)$ 表示自变量不同而函数的对应法则或结构形式相同的两个函数，一般这两个函数的定义域是相同的．这样就可以通过 $f(t)$ 的定义域 M 去求 $f[g(x)]$ 的定义域．

例 3　如(图 1-1)，在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的边上有一动点，从 B 点开始，沿折线 $BCDA$ 向 A 运动，设 P 点移动的距离为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 y，求函数 $y=f(x)$ 的解析式及其

定义域.

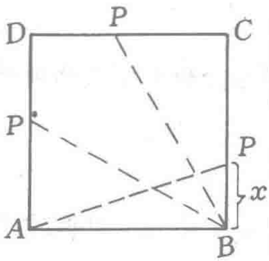


图 1-1

解：当 P 点在线段 BC 上时，则 $0\leqslant x<4$，此时 $y=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x=2x$，

当 P 点在线段 CD 上时，则 $4\leqslant x<8$，此时 $y=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$

当 P 点在 DA 上时，则 $8\leqslant x\leqslant 12$，此时 $y=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot(12-x)=24-2x$，那么函数 $y=f(x)$ 的解析式为

$$y=f(x)=\begin{cases}2x & (0\leqslant x<4)\\ 8 & (4\leqslant x<8)\\ 24-2x & (8\leqslant x\leqslant 12)\end{cases}$$ 其定义域为 $[0,12]$.

说明：这是求函数定义域的第三类问题，即实际问题或几何问题，求函数的定义域时，除了考虑解析式本身有意义外，还要考虑实际问题或几何问题有意义．本题解析式是一个分段函数，求它的定义域时是各段定义域的并集．

2. 函数的值域

函数的值域是指因变量的可取值范围，因此要分析因变量的约束条件去寻找函数的值域，常用的有下列几种途径．

(1)　分析法：从函数式中逐步分析确定函数的值域

例 4　求下列函数的值域

(1) $y=3+\sqrt{4x-1}$　　(2) $y=\frac{3}{x^2}(1\leqslant x\leqslant 2)$

解(1) 方法一：利用逐步分析取值情况

由 $4x-1\geqslant 0$，$\therefore x\geqslant\frac{1}{4}$，$\therefore$ 函数的定义域为

$x \geqslant \frac{1}{4}$，于是 $\sqrt{4x-1} \geqslant 0$，$\therefore 3+\sqrt{4x-1} \geqslant 3$

所求函数的值域为 $[3,+\infty)$.

方法二：寻找 y 的约束条件逐步分析由原式移项得 $\sqrt{4x-1}=y-3$，由于 $\sqrt{4x-1} \geqslant 0$，$\therefore y-3 \geqslant 0$，$\therefore y \geqslant 3$，故函数的值域为 $[3,+\infty)$

解(2) 因为在 $[1,2]$ 上，函数 $y=\frac{3}{x^2}$ 是一个单调减函数，$\because x=1$ 时，则 $y=3$；当 $x=2$ 时 $y=\frac{3}{4}$，故函数的值域为 $[\frac{3}{4},3]$.

(2) 利用函数的最大值与最小值来确定函数的值域

例 5 求函数 $y=x+\frac{1}{x}+1(x \neq 0)$ 的值域

解法一：利用平均值不等式求值域

当 $x>0$ 时，有 $y=x+\frac{1}{x}+1 \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}+1=3$，

$\therefore y \geqslant 3$，当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x=1$ 时，有 $y=3$.

当 $x<0$ 时，那么 $-x$ 和 $-\frac{1}{x}$ 都是正数，所以有 $(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right) \geqslant 2\sqrt{(-x)\left(-\frac{1}{x}\right)}=2$，即 $-x-\frac{1}{x} \geqslant 2$.

$\therefore\ x+\frac{1}{x} \leqslant -2$，$\therefore x+\frac{1}{x}+1 \leqslant -1$ 即 $y \leqslant -1$，当且仅当 $-x=-\frac{1}{x}$，即 $x=-1$ 时，有 $y=-1$.

综上所知，函数的值域为 $y \in(-\infty,-1] \cup[3,+\infty)$.

解法二：利用配方法求函数的值域

当 $x>0$ 时，$y=x+\frac{1}{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+3$，可知当 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ 即 $x=1$ 时，y 有最小值为 3

当 $x<0$ 时，$y=x+\frac{1}{x}+1=-\left(-x-\frac{1}{x}\right)+1=-\left(\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\right)^2-1$ 当 $\sqrt{-x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}=0$，即 $x=-1$ 时，y 有最大值为 -1

综上可知，函数的值域为 $y\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

解法三：利用判别式法

由 $y=x+\frac{1}{x}+1$ 得　$x^2+(1-y)x+1=0$

要使方程有实根，则判别式 $\Delta=(1-y)^2-4\geqslant 0$，解之，得 $y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 3$. 仅当 $x=-1$ 时，则 $y=-1$，当 $x=1$ 时，则 $y=3$.　$\therefore$ 函数的值域为 $y\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

说明：利用求函数的最大值与最小值来确定函数的值域时，一般有下列几种途径：对于二次式可以利用配方法，也可以用判别式法求函数的值域；有时也可以用平均值不等式来求函数的值域．但必须注意：利用判别式法或平均值法求函数的值域时，要审查等号是否成立．也就是说，能否在定义域内找到 x 的值，使函数达到最大值和最小值．

例 6　求函数 $y=\frac{x^2-x+1}{1+x-x^2}$ 的值域

解：采用判别式法　整理得

$(y+1)x^2-(y+1)x+1-y=0.$

要使 x 有实数，方程有实根．

$\therefore \Delta x = (y+1)^2 - 4(y+1)(1-y) \geqslant 0$,

即 $5y^2 + 2y - 3 \geqslant 0$,解之,得 $y \leqslant -1$ 或 $y \geqslant \frac{3}{5}$.

当 $y = \frac{3}{5}$ 时,代入原式,解得 $x = \frac{1}{2}$;当 $y = -1$ 代入原式,没有相应的 x 值.

所求函数的值域为 $y \in (-\infty, -1) \cup [\frac{3}{5}, +\infty)$.

(3) 利用求函数的反函数的定义域去求原函数的值域

例 7 求函数 $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ 的值域

解:把原函数变形得 $(y-1)e^x = -(y+1)$,

当 $y \neq 1$ 时,得 $e^x = \frac{y+1}{1-y}$, $\therefore x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$

由于 $\frac{y+1}{1-y} > 0$,解之,得 $-1 < y < 1$

故函数的值域为 $y \in (-1, 1)$.

说明:这种方法实质上是对函数的解析式中解出 x,并由此寻找因变量 y 的可取值范围,这就是所求函数的值域. 除此以外,也可以利用基本初等函数的图象与性质来帮助确定函数的值域,使求函数值域的方法将更多样,更准确. 求函数的值域是一个较为复杂的问题,因此在选题上要注意"分寸",不可过难.

3. 反函数

例 8 求函数 $y = x^3 - 9x^2 + 27x (x < 0)$ 的反函数

解 $\because$ $y = x^3 - 9x^2 + 27x = (x-3)^3 + 27$

$\therefore$ $x = \sqrt[3]{y - 27} + 3$

反函数的解析式为 $y = \sqrt[3]{y - 27} + 3$

又 $y = x(x^2 + 9x + 27) = x\left[(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{27}{4}\right]$,由于