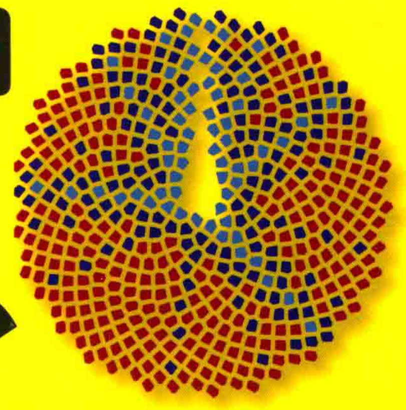
爱上科学
Science

推动世界发展的100个重大数学发现

# 奇妙数学的100个重大突破



maths in 100 key breakthroughs

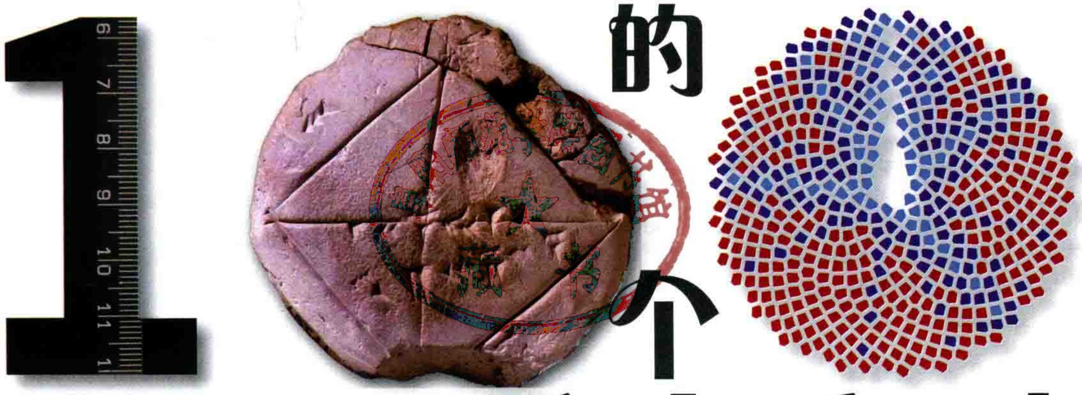
（下册）

[英] Richard Elwes 著
房超 于幻 译
李晓龙 审

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

爱上科学
Science

# 奇妙数学的100个重大突破



maths in 100
key breakthroughs

（下册）

[英] Richard Elwes 著
房超 于幻 译
李晓龙 审

人民邮电出版社
北京

**图书在版编目（CIP）数据**

奇妙数学的100个重大突破．下册 /（英）埃尔威斯（Elwes,R.）著；房超，于幻译．-- 北京：人民邮电出版社，2015.7
（爱上科学）
ISBN 978-7-115-38889-6

Ⅰ．①奇… Ⅱ．①埃… ②房… ③于… Ⅲ．①数学－普及读物 Ⅳ．①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第101139号



◆ 著　［英］Richard Elwes
译　房　超　于　幻
审　李晓龙
责任编辑　李　健
执行编辑　周　璇
责任印制　周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京方嘉彩色印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：889×1194　1/20
印张：10.6　2015 年 7 月第 1 版
字数：336 千字　2015 年 7 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2014-1610 号

定价：59.80 元

**读者服务热线：(010) 81055339　印装质量热线：(010) 81055316**
**反盗版热线：(010) 81055315**
**广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号**

# 内容提要

数学无所不在，它是日常生活中不可或缺的部分，并支撑着世界上所有的基本规律，从美丽的大自然到令人惊讶的对称性技术，无不推动着未来的发展。虽然数学的基本逻辑同宇宙一样古老，但人类在近代才理解这个复杂的学科。那我们是如何发现数学理论并飞跃发展的呢？

《奇妙数学的 100 个重大突破（下册）》继上册之后，将告诉读者数学领域的另外 50 个重大突破。书中以故事的形式，讲述你最需要知道的且最重要的数学基本概念。从数学最初的“生命火花”——计数来探索我们的进步，通过古老的几何形状、经典悖论、逻辑代数、虚数、分形、相对论和形态弯曲等难题，淋漓尽致地为大家展示奇妙的数学世界。图书分为上册和下册，方便读者们阅读。上百张精美的照片和富有启发性的图表，将为你展示数学这个极为重要的学科的 100 个里程碑，以及其如何深远地影响我们的生活。每个故事都是 4 页，其中 1 页全彩图，3 页文字内容，结构清晰明了。

# 引言

数学是一门永恒的学科。历史学因时代不同或地域差别而千变万化，艺术品位因文化差别和个人喜好而千差万别，但是数学不会因朝代更迭或个人喜好而有任何变化。无论你是古巴比伦的一位牧羊人还是21世纪的计算机高级编程师，一加一永远等于二。当然，科学的许多分支都具有这样不变性。毕竟，在过去的几千年里，人体结构变化甚微；在地球表面各处，同一物体所受的引力也几乎是相同的。但是，数学理论的稳固性则是更深层次的。设想若有外星物种的存在，它们的生物学一定与我们不同。我们甚至可以设想它们所遵循的物理定律与地球上所遵循的物理规律大相径庭，可机理是一致的。但是，我们很难想象一个1+1=3的世界！数学不仅是正确的，而且还是必然的。

当然，我们的祖先不是从沼泽地爬出来就天生掌握了数学。数学发现是在某些特定的历史时刻才有所突破；新的技术是由某个特定的人物发明。对于这整个学科的开端——计数更是如此，这种计数能力出现在人类进化史上的一个特定的阶段。

## 发展历程

数学是怎样发展的呢？如果将数学的发展看作一张常规的图腾，那图腾的作者定是一位孤独又睿智的学者。他以与时俱进的笔法把各门学科融会贯通，并发现一些隐藏其中的出乎意料的科学真理。正如著名数学物理学家艾萨克·牛顿所言：“如果说我看得更远，那是因为我站在巨人的肩膀上。”

本书中描绘的许多数学上的重要突破当然离不开几位耀眼的数学家所做出的努力和他们的敏锐洞察力。而且，所有的这些突破性成就不是凭空而出的，而是建立在早期思想家的想法之上。我认为把每一个突破看成是数学发展道路上的一座里程碑，这是一个很好的想法。为此，我努力把每个突破放在合适的背景中，讲述问题的原始出处以及研究者为解决问题所付出的努力，还有对后世的影响。

## 数学的黄金期

数学的发展可分为以下几个阶段：古希腊的毕达哥拉斯时期，这时的数学被注以神秘的宗教色彩；印度天文时期，它为我们如今所熟知的数值系统奠定了基础；阿拉伯翻译时期，

阿拉伯人收集了几乎此前所有的数学知识。欧洲的启蒙运动开启了学术界的新纪元，它开创了一些新的研究方法，将各个领域都推向了一个新的阶段，尤其是数学的发展，更是进入了一个黄金时期，我们至今深受其益。

由于世界各地的学校与大学的普及，特别是计算机的发明和广泛应用，使互联网在整个科学技术革命中起着不容小觑的作用。如今的数学家们都在运用高科技进行科学研究、教学及推广工作。这使得数学日趋全球化，数学的发展也达到空前的高度，人们的交流与合作比以往任何时候都更加有效。

与此同时，人类对数学的需求也日益增加。20 世纪初，随着相对论与量子力学的发展，使得更高级的数学研究能力及更深层次的科研能力成为对天体力学深入研究所必不可少的先决要求。同样的要求，在生活的其他领域也有。例如，政治和经济领域都蕴含着大量的数据，这就需要大量的概率专家、统计人员和风险评估专家等；另外，计算机科学的飞速发展，也是由于 20 世纪初，数学的另一个科学分支——数理逻辑的出现。艾伦·图灵以及其他的研究者一直致力于此。就连最令人深思的问题：计算机的终极能力是什么？什么是计算机无法逾越的？都将归为数学问题。

## 数学的未来

当今是数学发展的黄金时期。本书将会告诉读者，我们是如何逐步到达这一高峰的。然而，数学的明天又会是怎样？这里，我们将给出一些预测：数学将会对更多的科学观点和社会现象作出合理的解释，数学将会有越来越多的学科分支，而一些分支将会得到意想不到的应用；数学、物理、计算机科学与其他科学领域间的界线越来越模糊，与此同时，大量先前被人们认为不可能解决的难题将会被难以预料的技术方法轻易地解决。当然，所有的这些都会吸引新一代的思想家来处理。

# 目录

# 51 若尔当曲线定理

突破：每一个平面上的非自交环路（又称为若尔当曲线），都把平面分成一个“内部”区域和一个“外部”区域，且从一个区域到另一个区域的任何道路都必然在某处与环路相交。尽管这种说法看似简单，但却很难证明。

奠基者：卡米尔·若尔当（1838 年—1922 年）、亨利·勒贝格（1875 年—1941 年）、L.E.G. 布劳威尔（1881 年—1966 年）、詹姆斯·韦德尔·亚历山大（1888 年—1971 年）。

影响：将若尔当曲线定理应用到更高的维度，并不是那么简单，这将导致很多奇怪的形状产生，这其中就包括亚历山大带角球的发现。

卡米尔·若尔当在 1887 年提出的这个定理似乎很不起眼。这个定理是：在一张纸上画出一个环路，这个环路会把页面分成两个区域：一个“内部”和一个“外部”，每个区域都自成一块。但在数学方面，直到现在对此也没有严谨和精确的认知。这是个难以证明的命题。更重要的是，当数学家将这一结果应用到更高的维度时，使他们更加震惊。

虽然卡米尔·若尔当的身份是工程师，但他在纯数学领域进行了几项重要的研究。他在早期研究群论（见第 181 页）的数学家中是一个重要的角色，最出名的成就是提出了关于二维平面上环的定理。若尔当意识到这样一个看似显而易见的现象也需要证明，展现了他的数学天赋。

**左图：**在法国沙特尔大教堂的地板上的迷宫，不像其他类型的迷宫，它包括一个单一的从一开始到中心的路径，使人们不可能迷路。若尔当曲线定理保证，这条路是拓扑系统的一个简单的直线或圆形。

## 连续性和拓扑

为了得到一个环的概念，若尔当需要知道怎样从点或线的序列中区分一个弯曲的线。在数学方面，连续性意味着没有跳跃或断点。在这上面，一个回路不能触及或越过其本身，而应最终循环到它开始的地方，这听起来似乎是一种合理的定义。但如今我们意识到对

环还是比较陌生的。

由于分形曲线的发现（见第 45 页），数学家已经鉴定出了许多奇异和不自然的，但却能满足连续性的形状。如果环是无限长的，或无穷的左右摇摆的，这就意味着，无论我们怎样放大图形，却永远不会找到一段完美的平滑曲线。（光滑性是比单纯的连续性更严格的条件。）

正如环可以进行拓扑变形，二维曲面只不过是一个球体，同样可能会变形。

近年来，这个想法已经在拓扑角度进行了表示：有两个形状，如果可以在没有切割或粘合的情况下，将其中一个变成另外一个的形状，那么我们就可以说这两个是相同的形状。从这个角度来看，每个环都是一个圆，这个说法甚至包括尖角的形状，如三角形，或复杂的分形图案，如科赫雪花曲线等。

但是，这些环，或者拓扑圆的形状能有多怪异呢？是否还有一个意想不到的环，可以将一个平面分成多个区域，而不是只有两个？是否可能会有一个是不知何故竟不能分开平面的环？若尔当在 1887 年解决了这个问题，在大量的研究共作之后，他给出了一个可靠的答案。

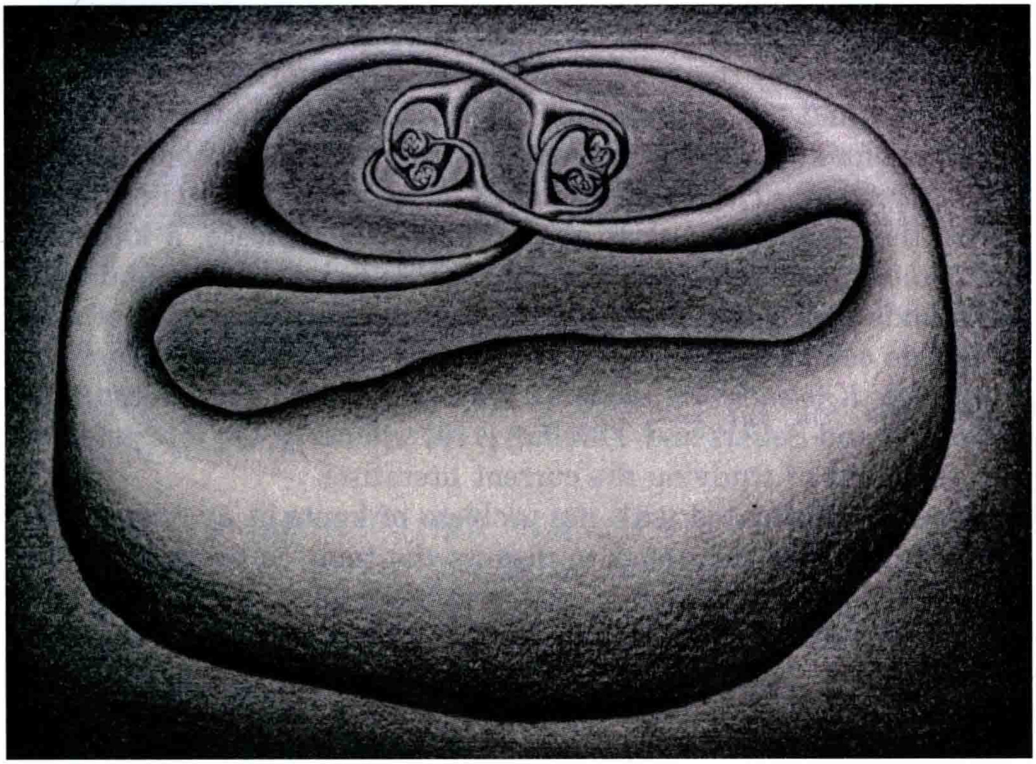
## 若尔当 – 布劳威尔分离定理

若尔当曲线定理表明，任何环都可以将二维空间分为两个区域。我们可以很容易地将其推广到三维空间，在空间自由浮动的环不能将空间分隔为两个区域。但将一维的环改为二维的曲面，就可以将周围的空间划分为“内部”和“外部”。正如环可以进行拓扑变形，二维曲面只不过是一个球体，同样可能会变形。

这是把若尔当曲线定理推广到更高的维度的方法。在 1911 年，亨利 • 勒贝格和 L.E.G. 布劳威尔提出了分离定理：每一个二维的曲面都可以将周围的空间划分为“内部”和“外部”两个区域。事实上，分离定理可以推广到所有更高维度：任何 $n$-1 维曲面都会将 $n$ 维空间分割成“内部”与“外部”两个部分。

## 亚历山大带角球

若尔当 – 布劳威尔分离定理表明，它在所有维度的行为都是适用的。但经过仔细分析



**左图：**亚力山大带角球，它可以将环境空间分成为“内部”和“外部”两个区域，而无限分裂和缠绕角可以确保在拓扑学上，内部就像其他曲面分离的内部一样；但是它分离的外部，却不用于其他的曲面。

却揭示了一个戏剧性的转折。1924年，詹姆斯·韦德尔·亚历山大发明了一种从来没有人见过的非凡形状。在拓扑的定义上，可以分割和细分成更小的角，更重要的是，有无限多的角交织在一起。

上述结果令人震惊，亚历山大带角球是一个拓扑球面，所以，它可以将环境空间分为“内部”和“外部”两个区域。在拓扑学上，内部就像其他曲面分离的内部一样；但是它分离的外部，比其他的外部更复杂。

在拓扑学上，这个空间的复杂性，可以用环来测量。在这些方面，一个普通球体的外面是最简单的一种空间，在这里任何环可以自由变身成任何其他形式。但是在角形球面，环可以用无限多的不同方式显示，这表明亚力山大带角球分离出的“外部”区域是一个极为复杂空间。

# 52 曲面的分类

突破：在拓扑这一新领域，瓦尔特·冯·戴克得出了一个完整的二维曲面的定义。

奠基者：约翰·李斯丁（1808 年—1882 年）、奥古斯特·费迪南德·莫比乌斯（1790 年—1868 年）、菲利克斯·克莱因（1849 年—1925 年）、瓦尔特·冯·戴克（1856 年—1934 年）。

影响：这种定义是拓扑学的一个里程碑，改变了 20 世纪数学的面貌。

正如一个一维的形状被称为曲线，一个二维形状被称为曲面，最常见的一个例子是球面。但也有许多其他形状的曲面，如百吉饼状的圆环。1882 年，菲利克斯·克莱因发现了一个新的曲面——克莱因瓶，这促使他得出了拓扑学科的第一定理：存在一个能描述全部二维曲面的定义。

找到所有可能的表面的想法似乎有些可笑，站在传统的几何角度来看，从茶杯到饼干，世界上有无数的形状（几何教科书里甚至包含更多）。但在 19 世纪中叶，当拓扑学作为一个新学科开始出现之后，许多形状被认为本质上是相同的：如果一个形状可以被改变形成另外一个形状，那么在拓扑学上，它们是一样的。这种变形可能包含极限的拉伸和扭曲，但是不能包括切割或粘合，所以意大利面条被认为和球面是一样的，但是茶杯就不行，因为手柄的孔不能消除。

## 带手柄的球面

然而，一个茶杯和一个圆环面在拓扑上是相同的。杯子的主要部分可以变形为一个球面，同时，手柄将保留原样。给一个球面添加手柄会产生一个新的形状：一个有两个手柄的球面（或双圆环），这是一种不同寻常的圆环。从这个角度来看，一个茶壶和双圆环在拓扑上也是相同的；与此类似，椒盐卷饼，在拓扑上和一个添加了三个手柄的球面或三重环面是相同的。

**左图：**一个玻璃瓶做的克莱因瓶，没有内部或外部的区别，因此不能装水。三维空间中的任何克莱因瓶必须有一个缺陷，表面穿过本身；在图中的克莱因瓶中这个缺陷出现在其顶端。

所有这些曲面都是闭合的，这意味着它们不像一张纸一样有边缘。它们圈定了一个有限的区域，而不是一个无限大的空间。1863 年，奥古斯特•费迪南德•莫比乌斯已经 71 岁了，他认为任何一个在三维宇宙存在的曲面，在拓扑学的意义上，一定等价于有 $n$ 个柄的球面。

## 莫比乌斯带

尽管这是一个伟大的成就，但是也有人认为这个认识曲面的方式可能有些缺陷。1847 年，约翰•李斯丁发现这样一个东西：一条扭转 180° 后再把两头粘接起来的纸带，这个纸带竟有魔术般的性质。与普通纸带具有两个面（双侧曲面）不同，这个纸带只有一个面（单侧曲面），你的手指可以摸遍整个曲面而不必跨过它的边缘！

与普通纸带具有两个面 ( 双侧曲面 ) 不同，这个纸带只有一个面 ( 单侧曲面 )，你的手指可以摸遍整个曲面而不必跨过它的边缘！

1858 年，莫比乌斯也发现了同样的东西，这就是著名的“莫比乌斯带”。这个东西有许多有趣的性质，例如，如果你沿着中心把它剪开，那么结果并不是两个莫比乌斯带，而是形成了一个把纸带的端头扭转了两次再结合的环。

## 克莱因瓶

在这些奇妙的性质之外，人们对莫比乌斯带也提出了疑问：怎样将这个东西推广到普通的曲面之中？当然，莫比乌斯环本身并不是一个封闭的曲面，它有边缘，所以它没有违反莫比乌斯定理。同样的，它引出了另一个问题，所有先前已知的曲面都有两个面。是否有一个封闭的曲面，没有边缘且只有一个面呢？

答案是肯定的，1882 年，菲利克斯 • 克莱因给出了答案。如果我们把两条莫比乌斯带沿着它们唯一的边粘合起来，就得到了漂亮的克莱因瓶。但是，如果你想在家自己动手就可以得到克莱因瓶，等待你的将是一个失败接着一个失败。尽管现代玻璃制造工业已经发展得非常先进，但是，所谓的“克莱因瓶”却始终是大数学家克莱因先生脑子里的“虚构物”，它根本制造不出来，在表面通过自身的地方会有缺陷。事实是：克莱因瓶是一个在四维空间中才可能真正表现出来的曲面，如果我们一定要把它表现在我们生活的三维空间中，我们只好将就点，把它表现得似乎是自己和自己相交一样。

## 冯·戴克定理

克莱因瓶不是唯一被发现的新曲面。就像莫比乌斯对球面的处理一样，我们也可以对莫比乌斯带进行切割孔形状的处理。这导致了一个全新系列的、在三维空间不能完美存在的非定向曲面的产生。

1888 年，克莱因的学生瓦尔特·戴克提出了一个美妙的定理，将莫比乌斯的原始定理提升到了新的高度，为拓扑学注入了新的活力。他表明：每一个封闭的二维曲面，在拓扑上都可以等价于一个球，或有若干个柄的球面，或有若干莫比乌斯带的球面。

**左图：**两个相互关联的莫比乌斯带的雕塑，由 3D 打印机制作。莫比乌斯带是理解像克莱因瓶一样特殊形状的拓扑结构的关键，长期吸引着艺术家们。