高級中学課本

代　数

DAISHU

第一册（第一分册）

（試用本）

浙江省中小学教材編輯委員会編

浙　江　人　民　出　版　社

目录

緒　論

同学們学过了初中代数，已經懂得：正負数的意义、一次方程和簡單的二次方程等等知識；并初步具有运用这些知識解决工农业生产与日常生活中实际問題的能力．但是，为了使同学們今后从事工农业生产貢献更大的力量，仅有初中代数知識还是很不够的．譬如就参加工农业生产方面的需要来說，在劳动中遇到計算某一时期之内产品平均增長的百分率，計算以最节約的材料制作一定体积的容器等等問題，就必須进一步学习代数知識，才能得到解决，从而满足生产的需要．因而，我們必須在初中代数学習的基础上，繼續努力学習高中代数．

高中代数学習內容，是从初中代数学習基础上逐步加深、扩大的．第一，繼續扩大数的概念，学習实数与复数的知識．有了这些知識，我們便能比較透徹地理解到实际生活中所存在的量．其次，繼續学習二次方程和高次方程的初步知識．掌握这些知識，我們就能更好地計算工农业生产与日常生活中較为复杂的实际問題．第三、研究函数的相关性，学習二次函数和自变量为自然数的函数，以及以幂为自变量的函数的初步知識．懂得这些函数的性質，便能解决很多計算問題，知道圖表算尺的应用，并且能为进一步学習数学、物理等科打好基础．第四、学習排列組合与概率的基础知識．这些知識能帮助我們解决計划分配、运輸和檢查等問題．另外，在学習以上这些知識的过程中，我們还同时繼續学習一些关于恒等变換的知識．等等．

由此可見，高中代数这一門課程，是为了使同学們在掌握初中

代数知識的基础上，进一步有系統地掌握代数知識，以便为将来研究現代科学技术，为工农业生产更大的发展服务．也卽是使同学們成为有社会主义觉悟的、有文化的、身体健康的劳动者，掌握建設社会主义社会与共产主义社会的实际本領，在党和毛主席的英明領导下，参与祖国各項事业的建設，与全国人民一起，使我們国家从根本上摆脱貧困和落后的状态，把我国建設成为一个具有現代工业、現代农业和現代科学文化的社会主义国家．

同学們，你們是生活在偉大的历史时代的年青一代，你們是社会主义和共产主义的建設者．为了建設社会主义，为了創造条件向共产主义过渡，在学习中首要的应該是，明确学习的目的和有学好这一門課程的决心，使自己掌握代数知識，将来能更好地参加祖国建設；而且，也应当专心听老师的講授，并善于独立思考，使获得的代数科学知識成为活的有用的知識；同时还要随时关心我們工农业的飞速发展，使理論学习联系实际，将所学得的代数科学知識和生产实际密切結合起来，創造性地运用于实际．

同学們，努力吧，让我們在总路綫的光輝照耀下，跟全国人民一起，認真学习，积极劳动，加速使自己成为有社会主义觉悟的、有文化的、身体健康的劳动者吧！

第一章　幂与方根

§1. **引言**　东風人民公社想挖一个面积为2平方丈的正方形积肥坑，問每边該挖多少長？

設 x 为每边的丈数，则从正方形的面积与边長的关系，可知：

$$x^2=2.$$

要求 x，就是要求这样一个数使它的平方等于2。

怎样去求它？它是什么数？

关于以上这一类的問題，我們学習这一章以后将可迎刃而解。乘方是学習本章的基础，因此我們先从复習乘方开始。

I　乘方

§2. **乘方**　我們已經知道，乘方就是求相同因数的积的运算。乘方的結果叫做幂，例如：

$$2\times2\times2=2^3=8;$$

$$a\cdot a\cdot a=a^3.$$

一般地說：　$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n.$

a^n 是 a 的 n 次幂或者 a 的 n 次方，a 是幂的底数，n 是幂的指数。

負数的偶次幂是一个正数，負数的奇次幂是一个負数。

例如：

$$(-2)^2=4;\qquad (-2)^3=-8;$$

$$(-2)^4=16;\qquad (-2)^5=-32;$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}\qquad \left(-\frac{1}{3}\right)^5=-\frac{1}{243}\text{ 等等}$$

§3. 幂的运算法则 在初中代数里，我們还知道下面一些关于幂的运算法则：

(1)同底数的幂相乘，只要把各因数的指数的和做指数，底数不变．

即 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ （m 和 n 都是正整数）；

$a^m\cdot a^n\cdot a^p=a^{m+n+p}$ 等等 （m、n 和 p 都是正整数）．

(2)同底数的幂相除，在被除数的指数大于除数的指数时，只要把被除数的指数减去除数的指数所得的差做指数，底数不变．

即 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ （m 和 n 都是正整数，$m>n$，$a\neq 0$）．

(3)幂的乘方，只要把这个幂的指数乘以乘方的次数，底数不变．

即 $(a^m)^n=a^{mn}$ （m 和 n 都是正整数）．

(4)积的乘方，只要把每个因数分别乘方．

即 $(ab)^n=a^nb^n$ （n 是正整数）；

$(abc)^n=a^nb^nc^n$ 等等 （n 是正整数）．

現在来講幂的第五个运算法則：

(5)把一个分式乘方，只要把分子和分母分别乘方．

例如：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3}\quad(b\neq 0).$$

一般地，$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ （n 是正整数，$b\neq 0$）．

例1 計算：$\frac{a^5\cdot a^3}{a^6}$．

解 $\frac{a^5\cdot a^3}{a^6}=\frac{a^8}{a^6}=a^2$ 或 $\frac{a^5\cdot a^3}{a^6}=\frac{a^3}{a}=a^2$．

例2 計算：$\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$．

解 $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3=-\frac{(3ab^3)^3}{(2c^2)^3}=-\frac{27a^3b^9}{8c^6}$.

例 3　計算: $\left(-\frac{ax^m}{b^2y^3}\right)^n$.

解 $\left(-\frac{ax^m}{b^2y^3}\right)^n=(-1)^n\cdot\frac{(ax^m)^n}{(b^2y^3)^n}=(-1)^n\cdot\frac{a^nx^{mn}}{b^{2n}y^{3n}}$.

§4. 多項式的平方　我們知道,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+b^2+2ab.$$

这就是說，二項式的平方等于这两項平方的和加上这两項乘积的2倍.

上面的公式,我們可以用来求多項式的平方. 例如,求三項式 $a+b+c$ 的平方,只要把 $a+b$ 看做一項,就得:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+c^2+2(a+b)c\\&=a^2+2ab+b^2+c^2+2ac+2bc\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

这个結果也可以直接由乘法得到:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b+c)(a+b+c)\\&=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

我們可以看出来,在所得的結果里，相同字母的乘积(就是各項的平方)的系数都是1，而不同字母的乘积的系数都是2. 这是因为，a^2 只能从 a 乘以 a 得到，b^2 只能从 b 乘以 b 得到，c^2 只能从 c 乘以 c 得到；而 ab 可以从 a 乘以 b 得到，还可以从 b 乘以 a 得到，ac 和 bc 也是这样.

同样,我們可以求得:

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc\\+2bd+2cd.\end{aligned}$$

一般地說：

多項式的平方等于各項平方的和加上每两項乘积的2倍。

例1 計算：$\left(a-2b+\frac{1}{2}c\right)^2$.

解 $\left(a-2b+\frac{1}{2}c\right)^2=a^2+(-2b)^2+\left(\frac{1}{2}c\right)^2+2a(-2b)$

$$+2a\left(\frac{1}{2}c\right)+2(-2b)\left(\frac{1}{2}c\right)$$

$$=a^2+4b^2+\frac{1}{4}c^2-4ab+ac-2bc.$$

例2 計算：$(x^3-3x^2-2x+1)^2$.

解 $(x^3-3x^2-2x+1)^2=(x^3)^2+(-3x^2)^2+(-2x)^2+1^2$

$$+2x^3(-3x^2)+2x^3(-2x)+2x^3\cdot 1+2(-3x^2)(-2x)$$

$$+2(-3x^2)\cdot 1+2(-2x)\cdot 1$$

$$=x^6+9x^4+4x^2+1-6x^5-4x^4+2x^3+12x^3-6x^2-4x$$

$$=x^6-6x^5+5x^4+14x^3-2x^2-4x+1.$$

習　題

1. 計算(口答)：

(1) $(-3)^3$;　　(2) $(-3)^4$;

(3) $(-1)^5$;　　(4) $(-1)^6$;

(5) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^2$;　　(6) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$;

(7) $(-0.2)^3$;　　(8) $(-0.1)^4$.

2. 計算(口答)：

(1) $(-1)^{2n}$;　　(2) $(-1)^{2n+1}$;　　(3) $-(-1)^{2n}$;

(4) $-(-1)^{2n+1}$; 这里的 n 都是正整数.

3. 比較下列各数的大小(口答)：

(1) 1.4^2 和 1.5^2;　　(2) $(-1.4)^2$ 和 $(-1.5)^2$;

(3) 3.2^3 和 3.1^3;　　(4) $(-3.2)^3$ 和 $(-3.1)^3$;

(5) $(-7)^4$ 和 7^4;　　　　(6) $(-2)^3$ 和 2^3。

4. 利用平方表,求下列各数的平方:(見四位数学用表)

(1) 8.92;　　(2) 7.36;　　(3) 2.58;

(4) −6.78;　　(5) −3.4。

5. 利用立方表,求下列各数的立方:

(1) 3.71;　　(2) 6.4;　　(3) −9.08。

6. 化簡下列各式(口答):

(1) $(-a)^4\cdot(-a)^2\cdot(-a)$;　　(2) $(-x)^9\div x^7$;

(3) $[-(-a)^3]^2$;　　(4) $[-(-a)^2]^3$;

(5) $(-3ab)^2$;　　(6) $\left(-\frac{2}{3}p^2q^4\right)^3$;

(7) $\left(-\frac{4a}{5b}\right)^3$;　　(8) $\left(-\frac{6a^3}{7b^2c}\right)^2$。

7. 利用平方表和立方表,求下列各数:

(1) 67.4^2;　　(2) 305^2;　　(3) 0.746^2;

(4) $(-0.058)^2$;　　(5) 13.2^3;　　(6) 0.25^3;

(7) $(-0.074)^3$;

8. 計算:

(1) $(3a^2b)^3\cdot(-2a^3b^4)^3\cdot(-5a^4b^2c)^4$;

(2) $(-9x^3y^2)^2\cdot(-4x^2y^3)^3\div(-6x^4y^4)^3$;

(3) $\left(\frac{3ab}{5cd}\right)^4\cdot\left(-\frac{5c}{6a}\right)^3\cdot\left(\frac{4b}{3d}\right)^2$;

(4) $\left[\left(\frac{m^2n^2}{a^3b^2}\right)^2\div\left(\frac{mnp}{a^2b}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{a^3b^4c}{mp^3}\right)^6\div\left(\frac{a^5b^8c^2}{m^2p^5}\right)^3\right]$;

(5) $(-2a)^{10}-(-13a^5)^2-[-(2a)^2]^5-[2(-a^5)]^2$;

(6) $(a^2b)^n\cdot(ab^2)^{n+1}\div(a^3b^3)^{n-1}$。

9. 求边長为 216 寸的正方形的面积。

10. 求边長为 2.6 米的立方体的体积。

11. 在公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 中,已知:

$$g=9.8,\quad t=21.\quad 求 S。$$

計算下列各題(12—15)：

12．(口答)

(1) $(a+x)^2$；　(2) $(2a-3b)^2$；

(3) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^2$；　(4) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

13．(1) $(p+q+r)^2$；　(2) $(2x-3y+1)^2$；

(3) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b-\frac{1}{4}c\right)^2$；　(4) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)^2$.

14．(1) $(a+b-c-d)^2$；　(2) $(1-2x-3x^2+4x^3)^2$.

15．(1) $(2a+3b)^3$；　(2) $(5x-3y)^3$；

(3) $(a+b+c)^3$；　(4) $(1+2x-x^2)^3$.

16．証明恒等式：

(1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$；

(2) $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$
$=4(a^2+b^2+c^2)$.

II　方根

§5．方根　上面我們講过了乘方就是求相同因数的积的运算．比如，$b^n=a$，乘方就是已知 b 和 n，求 a 的运算．但是，在另一些問題中，我們往往遇到和乘方相反的运算，就是在 $b^n=a$ 中，已知 a 和 n，求 b 的运算．例如，知道正方形的面积是 a 平方厘米，要求这个正方形的边長是多少厘米，就是一个和乘方相反的运算．

如果一个数的 n 次乘方等于 a，那末这个数就叫做数 a 的 n 次**方根**．这就是說，如果 $x^n=a$，那末，x 就是 a 的 n 次方根．例如，$4^2=16$，那末，4 就是 16 的二次方根；$(-2)^3=-8$，-2 就是 -8 的三次方根．a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示．

二次方根又叫做**平方根**，三次方根又叫做**立方根**．

求一个数的方根的运算叫做**开方**。求 a 的 n 次方根，叫做把 a 开 n 次方，a 叫做**被开方数**，n 叫做**根指数**。开二次方又叫做**开平方**，开三次方又叫做**开立方**。

§6. **方根的性質** 因为根指数是奇数或偶数，方根的性質有很大的不同。因此，我們按根指数是奇数或偶数，分别来研究方根的性質。

(1)**奇次方根的性質** 因为正数的奇次冪是正数，負数的奇次冪是負数，零的奇次冪是零；所以我們知道：正数的奇次方根，必須是正数；負数的奇次方根，必須是負数；而零的奇次方根还是零。

我們还可以知道，正数的奇次方根不能多于一个。例如，$4^3=64$，4 就是 64 的立方根，而任何不等于 4 的正数，它們的立方都不等于 64，因而它們都不是 64 的立方根。

同样，我們也知道，負数的奇次方根不能多于一个。例如，$(-5)^3=-125$，-5 就是 -125 的立方根，而任何不等于 -5 的数，它們的立方都不等于 -125，因而它們都不是 -125 的立方根。

从上面所說的，可以知道，奇次方根有下面的性質：

正数的奇次方根，不能多于一个，并且必須是正数；負数的奇次方根不能多于一个，并且必須是負数；零的奇次方根只有唯一的值，就是零。

(2)**偶次方根的性質** 因为正数的偶次冪是正数，負数的偶次冪也是正数，零的偶次冪是零；所以我們知道：正数的偶次方根可以是正数，也可以是負数；負数的偶次方根沒有意义；而零的偶次方根还是零。

我們还可以知道，正数的偶次方根，有两个相反的数，并且不能多于两个，例如，7^2 和 $(-7)^2$ 都等于 49，7 和 -7 就都是 49 的平方根，而任何絕对值不等于 7 的数，它們的平方都不等于 49，因

而它們都不是 49 的平方根.

从上面所說的，可以知道，偶次方根有下面的性質:

正数的偶次方根，有两个相反的数，并且不能多于两个；負数的偶次方根沒有意义；零的偶次方根只有唯一的値，就是零.

因为正数的偶次方根有两个相反的数，所以我們还規定，在 a 是正数，n 是偶数时，符号 $\sqrt[n]{a}$ 只表示两个方根里正的一个，而負的一个用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示，例如，16 的二个四次方根中，正的一个用符号 $\sqrt[4]{16}$ 表示，負的一个用符号 $-\sqrt[4]{16}$ 表示.

正数的正的方根通常叫做**算术根**，所以上面的規定就是說，在 a 是正数，n 是偶数的时候，符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示的是算术根. 这样，$\sqrt[n]{a}$ 就能唯一确定.

有时我們把正数 a 的两个偶次方根合并写成 $\pm\sqrt[n]{a}$ 的形式. 例如，16 的两个四次方根可合并写成 $\pm\sqrt[4]{16}$.

用符号表示平方根的时候，根指数 2 通常略去不写. 例如，36 的二个平方根通常写成 $\pm\sqrt{36}$，而不写成 $\pm\sqrt[2]{36}$.

例 1 求下列各式的值;

(1) $\sqrt[3]{216}$; (2) $\sqrt[5]{-32}$;

(3) $\sqrt[4]{81}$; (4) $\sqrt{(-6.8)^2}$.

解 (1) $\because 6^3=216$, $\therefore \sqrt[3]{216}=6$;

(2) $\because (-2)^5=-32$, $\therefore \sqrt[5]{-32}=-2$;

(3) $\because 3^4=81$，并且 3 是正数，$\therefore \sqrt[4]{81}=3$;

(4) $\because 6.8^2=(-6.8)^2$，并且 6.8 是正数，

$\therefore \sqrt{(-6.8)^2}=6.8$.

例 2 在下列各种情况，求 $\sqrt{(a-2)^2}$ 的値:(1) $a>2$; (2) $a<2$; (3) $a=2$.

解 (1) 如果 $a>2$，那末 $a-2$ 是正数，

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2}=a-2;$$

（2）如果 $a<2$，那末 $2-a$ 是正数，

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2}=\sqrt{(2-a)^2}=2-a;$$

（3）如果 $a=2$，那末 $a-2=0$，

$$\therefore \sqrt{(a-2)^2}=\sqrt{0}=0.$$

習　題

1．檢驗(口答)：

（1）3 和 -3 是不是 9 的平方根？

（2）2 是不是 8 的立方根，-2 是不是 -8 的立方根？

（3）0.2 和 -0.2 是不是 0.0016 的四次方根？

（4）$-\dfrac{2}{3}$ 是不是 $-\dfrac{8}{27}$ 的立方根？

2．下面的一些方根里，哪些有意义？哪些沒有意义？有意义的要求出方根的值，沒有意义的要說明为什么沒有意义。

（1）27 的立方根；　　（2）-27 的立方根；

（3）$\dfrac{1}{4}$ 的平方根；　　（4）-4 的平方根；

（5）0.0081 的四次方根；　　（6）0 的四次方根；

（7）-1 的四次方根；　　（8）32 的五次方根。

3．解下列各方程：

（1）$x^3=125$；　　（2）$x^3=-125$；

（3）$x^2=9$；　　（4）$x^2=-9$；

（5）$x^4=1$；　　（6）$x^5=-1$。

4．求下列各式的值：

（1）$\sqrt[3]{64}$；　　（2）$\sqrt[3]{-64}$；

（3）$\sqrt{81}$；　　（4）$\sqrt[4]{81}$；

（5）$\sqrt[n]{1}$（n 是大于 1 的整数）；　　（6）$\sqrt[n]{0}$（n 是大于 1 的整数）；

（7）$\sqrt[n]{-1}$（n 是大于 1 的奇数）。

5．解下列方程(口答)：

（1）$\sqrt{x}=5$；　　（2）$\sqrt[5]{x}=2$；

(3) $\sqrt[3]{x}=-3$;　　(4) $\sqrt[4]{x}=2$;

(5) $3+\sqrt{x}=5$;　　(6) $\sqrt[3]{x}+2=6$;

(7) $7-\sqrt{x}=4$;　　(8) $3-\sqrt[3]{x}=8$.

6. 求下列各式的值:

(1) $\sqrt{4.78^2}$;　　(2) $\sqrt{(-4.78)^2}$;

(3) $\sqrt{a^2}$; $(a>0)$　　(4) $\sqrt{a^2}$; $(a<0)$

(5) $\sqrt{(m-n)^2}$; $(m>n)$　　(6) $\sqrt{(m-n)^2}$. $(m<n)$

7. (1) 設m和n是两个不相等的数,指出由于下列推算的哪一步的錯誤,因而得出錯誤的結論:

$$m^2-2mn+n^2=n^2-2nm+m^2,$$

$$(m-n)^2=(n-m)^2,$$

$$\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(n-m)^2},$$

$$m-n=n-m,$$

$$2m=2n,$$

$$m=n.$$

(2) 在$a=5$的时候,甲和乙計算$a+\sqrt{1-2a+a^2}$的值,得到不同的答案.甲的解答是:

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1;$$

乙的解答是:

$$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(a-1)^2}=a+a-1$$
$$=2a-1=2\times5-1=9.$$

哪一个答案是正确的?錯誤的解答,錯在什么地方?为什么錯?

8. 求$\sqrt{(a-3)^2}$的值.

[提示] 对$a>3$, $a<3$, $a=3$分别討論.

9. 求$\sqrt[3]{(a-4)^3}$的值.

10. 当x等于什么值时,下列各式的值最小?这个最小值是多少?

(1) $\sqrt{1+x^2}$;　　(2) $\sqrt{4+x}$.

III　开平方

§7. 完全平方数的开平方　如果一个有理数a等于另一个

有理数 b 的平方，那末这个有理数 a 就叫做完全平方数．例如，$9=3^2$，那末，9 就是一个完全平方数．

很明显，負数都不是完全平方数，因为沒有一个有理数的平方是負数．

求一个数的平方根的运算叫做开平方．

現在我們来研究完全平方数开平方的一般方法．为了研究这个一般方法，首先要研究完全平方数与它的平方根之間的位数关系．

我們知道：$1^2=1$，$2^2=4$，$3^2=9$，……，$9^2=81$，所以，一位和两位数的平方根是一位数；又 $10^2=100$，$11^2=121$，……，$99^2=9{,}801$，所以，三位和四位数的平方根是两位数；同样，五位和六位的数的平方根是三位数；等等．由此，我們可以把一个整数从右向左，每隔两位用一个撇号“，”分开．例如，把 54756 分开后写成 5′47′56；它所分成的段数就是它的平方根的位数．在确定了 54756 的平方根是三位后，就可以用 100^2，200^2，……，900^2 来試，确定它的平方根的最高位数字．事实上，因为 $100^2=10{,}000$，$200^2=40{,}000$，……，$900^2=810{,}000$，它們右边的四位数字都是零，所以只要把这个整数的左边第一段里的数字所組成的数依次和 1，2，……，9，九个数的平方 1，4，9，16，25，36，49，64，81 比較就可以了．例如，5′47′56 的左边第一段是 5，因为 $4<5<9$，所以 $200<\sqrt{54786}<300$．

确定一个整数的平方根的位数和最高位数字以后，可以用下面方法繼續求出平方根的其他各位数字．例如，求 625 的平方根．把 625 写成 6′25，可以知道它的平方根是两位数，并且最高位数字是 2．如果用 a 代表这个平方根的个位数字，那末就可以把这个平方根写成 $20+a$ 的形式．于是

$$625=(20+a)^2=20^2+2\cdot 20\cdot a+a^2.$$

从 625 减去 400 (就是 20^2),得.

$$\begin{array}{r}625\cdots\cdots(20+a)^2\\ -400\cdots\cdots 20^2\\ \hline 225\cdots\cdots 2\cdot 20a+a^2\end{array}$$

就是說,所得的 225 应該等于 $2\cdot 20a+a^2$. 由这个关系,我們可以求出这个平方根的个位数 a.

因为 a 是个位数,所以在 $2\cdot 20a+a^2$ 里的 $2\cdot 20a$ 要比 a^2 大得多,我們可以把 $2\cdot 20a+a^2$ 看作近似于 $2\cdot 20a$, 也就是說 225 近似等于 $2\cdot 20a$. 因此,可以用 $2\cdot 20$ (就是 40) 去除 225 求得 a, 所得的商的整数部分是 5, 所以 a 的值不会超过 5.

要确定 a 的值是不是 5, 只要計算 $2\cdot 20a+a^2$ 的值是不是 225 就可以了,但是 $2\cdot 20a+a^2=(40+a)a$,現在$(40+5)\cdot 5=45\cdot 5=225$, 所以 a 的值是 5, 因此, $\sqrt{625}=25$.

上面所說的計算过程,可以用下面的形式表示出来:

$$\begin{array}{r|l}
 & 6\,2\,5\cdots\cdots(20+a)^2\\
 & -4\,0\,0\cdots\cdots 20^2\\
\hline
2\cdot 20+a=40+5=45 & 2\,2\,5\cdots\cdots 2\cdot 20a+a^2\\
a\qquad\qquad=5 & 2\,2\,5\cdots\cdots(2\cdot 20+a)a=45\cdot 5\\
\hline
 & \quad 0
\end{array}$$

还可以簡写成下面的形式:

$$\begin{array}{r|l}
 & \;\;2\;\;5\\
 & \sqrt{6'2\,5}\\
 & \;\;4\\
\hline
45 & 2\,2\,5\\
 & 2\,2\,5\\
\hline
 & \quad\;\; 0
\end{array}$$

这里,在根号上面对着第一段 6 先写上十位数字 2 (实际表示

20)，$2^2=4$(实际表示 400)写在 6 的下面，$6-4=2$(实际表示200)，把第二段 25 移下得 225，在竪綫左边写上 2 的 2 倍 4 (实际表示 $2\cdot 20$，就是 40；所以在 4 右边要留出一位写个位数字)，用 40 去除 225 得試商 5，在根号上面对着第二段 25 写上 5，同时在竪綫左边 4 的右边也写上 5． 因为 $45\cdot 5=225$，$225-225=0$，就得到 $\sqrt{625}=25$.

再举几个例子如下：

例 1 求 $\sqrt{1,444}$.

解

```
      3  8
    √1 4'4 4
      9
68 | 5 4 4
   | 5 4 4
   |------
         0
```

$\therefore\ \sqrt{1,444}=38$.

例 2 求 $\sqrt{841}$.

解

```
      2  9
    √8'4 1
      4
49 | 4 41
   | 4 41
   |-----
        0
```

$\therefore\ \sqrt{841}=29$.

例 3 求 $\sqrt{54756}$.

解

```
        2  3  4
      √5'47'56
        4
43   | 1 47
     | 1 29
     |-------
464  | 18 56
     | 18 56
     |-------
           0
```

$\therefore\ \sqrt{54756}=234$.

例 4 求 $\sqrt{33721249}$.

解

```
          5  8  0  7
        √33'72'12'49
         25
108    | 8 72
       | 8 64
       |---------
11607  | 8 12 49
       | 8 12 49
       |---------
               0
```

$\therefore\ \sqrt{33721249}=5807$.

在例 1 里，544 除以 60 得試商 9，但是 $69\cdot 9$ 的积大于 544，所以改用 8．