

优等生数学

习题集

高中第二册

上海十大名牌高中联编
直击名牌大学



主编 ■ 熊斌 徐斌艳

本册核心作者

刘寅（复兴高级中学）

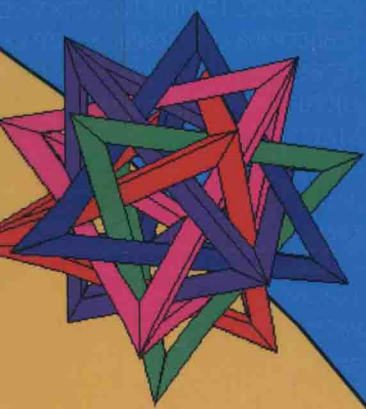
张雄（延安中学）

刘云（复旦附中）

杨岚清（大同中学）

曹建华（交大附中）

陈双双（华东师大二附中）



优等生数学

习题集

高中第二册

主编 ■ 熊 斌 徐斌艳

本册核心作者

刘 寅(复兴高级中学)

张 雄(延安中学)

刘 云(复旦附中)

杨岚清(大同中学)

曹建华(交大附中)

陈双双(华东师大二附中)

图书在版编目(CIP)数据

优等生数学习题集. 高中. 第2册/熊斌, 徐斌艳主
编. —上海: 华东师范大学出版社, 2008
(优等生数学)
ISBN 978-7-5617-6565-4

I. 优… II. ①熊…②徐… III. 数学课—高中—
习题 IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 197701 号

优等生数学习题集

高中第二册

主 编 熊 斌 徐斌艳
策 划 倪 明(数学工作室)
组 稿 倪 明 任念兵
审读编辑 陈信漪 任念兵
装帧设计 卢晓红

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 江苏句容市排印厂
开 本 787×1092 16 开
印 张 4.5
字 数 84 千字
版 次 2009 年 1 月第一版
印 次 2010 年 1 月第三次
印 数 13 101-21 100
书 号 ISBN 978-7-5617-6565-4/G·3823
定 价 8.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

目录_Contents

第5章 三角比 / 001

- 5.1 任意角及其度量 / 001
- 5.2 任意角的三角比 / 001
- 5.3 同角三角比的关系 / 002
- 5.4 诱导公式 / 002
- 5.5 两角和与差的正弦、余弦 / 003
- 5.6 两角和与差的正切 / 003
- 5.7 二倍角的正弦、余弦和正切 / 004
- 5.8 半角的正弦、余弦和正切 / 004
- 5.9 正弦定理 / 005
- 5.10 余弦定理 / 005
- 5.11 解三角形 / 006
- 5.12 解三角形应用 / 006
- 5.13 三角恒等式 / 007
- 5.14 三角比的积化和差 / 007
- 5.15 三角比的和差化积 / 008

第6章 三角函数 / 009

- 6.1 正弦函数和余弦函数的图象与性质 / 009
- 6.2 正切函数和余切函数的图象与性质 / 010
- 6.3 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质 / 011
- 6.4 反三角函数 / 013
- 6.5 最简三角方程 / 014
- 6.6 综合问题 / 014

第7章 数列、极限与数学归纳法 / 017

- 7.1 数列 / 017
 - 7.2 等差数列 / 018
 - 7.3 等比数列 / 022
 - 7.4 递推数列 / 026
 - 7.5 数列求和 / 027
 - 7.6 数列的综合应用举例 / 027
 - 7.7 数学归纳法 / 030
 - 7.8 数列的极限 / 033
-

第8章 平面向量 / 037

- 8.1 向量的概念 / 037
 - 8.2 向量的线性运算 / 037
 - 8.3 平面向量基本定理 / 038
 - 8.4 向量的数量积 / 040
 - 8.5 向量的直角坐标运算及基本公式 / 041
 - 8.6 向量的应用 / 044
-

第9章 矩阵和行列式 / 046

- 9.1 矩阵的概念 / 046
 - 9.2 矩阵的运算 / 046
 - 9.3 平面图形的矩阵变换——探究
与实践 / 048
 - 9.4 二阶行列式 / 049
 - 9.5 三阶行列式 / 050
-

第10章 算法初步 / 052

- 10.1 算法的概念 / 052
 - 10.2 算法程序框图 / 052
 - 10.3 计算机语句和算法程序 / 053
-

参考答案 / 054

第5章 三角比

5.1 任意角及其度量

001 已知集合 $A = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, 则().

(A) $A = B$

(B) $A \supsetneq B$

(C) $A \subsetneq B$

(D) $A \cap B = \emptyset$

002 设角 α 的终边与角 β 的终边关于原点对称, 求 α 与 β 的关系.

003 写出终边在 x 轴与 y 轴的夹角平分线上的角的集合(分别用角度制与弧度制表示).

004 在平面坐标系中, 用阴影部分表示集合:

$$\{\alpha \mid 30^\circ + k \cdot 360^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}.$$

005 已知角 α 与 $-\alpha$ 的终边重合, 求角 α 的集合.

006 一条长度等于半径的弦所对的圆心角是多少度? 长度分别等于半径的 $\sqrt{2}$ 倍和 $\sqrt{3}$ 倍的弦所对的圆心角分别是多少弧度?

007 已知一个直径为 30 厘米的轮子, 每秒旋转 25 度, 求轮周上一点在半分钟内所转过的弧长(精确到 0.01 厘米)和周数(精确到 0.1 周).

5.2 任意角的三角比

008 根据下列条件, 确定角 θ 所在的象限:

(1) $\sin \theta < 0$ 且 $\cos \theta > 0$;

(2) $\sin \theta \cdot \tan \theta > 0$.

009 求满足下列条件的角 α :

(1) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

010 求下列不等式的解集:

$$(1) \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (2) \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad (3) \tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

011 求不等式组 $\begin{cases} \tan x > -1, \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 的解集.

012 求满足 $\sin \alpha > \cos \alpha$ 的角 α 的集合.

5.3 同角三角比的关系

013 已知 $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{25}{12}$, 求 $\tan \alpha - \cot \alpha$.

014 已知 $\tan \theta = 2$, 求下列各式的值:

$$(1) \frac{3\sin \theta - 2\cos \theta}{2\sin \theta + \cos \theta}; \quad (2) \frac{1}{1 - \sin \theta \cos \theta};$$

$$(3) 4\sin^2 \theta - 3\sin \theta \cos \theta; \quad (4) \frac{2\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta}.$$

015 已知: $\cos A = \cos \theta \sin C$, $\cos B = \sin \theta \sin C$, ($C \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$), 求 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ 的值.

016 已知: $1 + \cos \alpha - \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$, $1 - \cos \alpha - \cos \beta + \sin \alpha \cos \beta = 0$, 求: $\sin \alpha$.

017 已知: $3\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \beta = 2\sin \alpha$, 求 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$ 的取值范围.

018 已知 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且 $\sin \alpha = \frac{7}{8} \sin \beta$, $\tan \alpha = \frac{1}{4} \tan \beta$, 求 α 的值.

019 $\sin \alpha$, $\sin \beta$ 是方程 $x^2 - (\sqrt{2} \cos 20^\circ)x + \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} = 0$ 的两根, 其中 α, β 都是锐角, 且 $\alpha > \beta$, 求 α, β 的度数.

5.4 诱导公式

020 计算 $\sin(-\alpha - 5\pi) \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) - \tan(\alpha - \frac{3}{2}\pi) \tan(2\pi - \alpha)$.

021 求 $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ$.

022 已知三角形 ABC 的两个内角 A, B 满足 $\sin 2A = \sin 2B$, 判断该三角形的形状.

023 已知 α 是钝角, $\sin \alpha = \sin(\pi - 2)$, 求 α .

024 若 $f(\cos \alpha) = \cos 17\alpha$, 求 $f(\sin \alpha)$.

5.5 两角和与差的正弦、余弦

025 求证: $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$.

026 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos(\alpha - \beta) = -\frac{5}{13}$, 求 $\sin \beta$ 的值.

027 已知 $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, 求 $\frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$ 的值.

028 已知 $8\cos(2\alpha + \beta) + 5\cos \beta = 0$, 求 $\tan(\alpha + \beta)\tan \alpha$ 的值.

029 已知 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, 且 $5\sqrt{3}\sin x + 5\cos x = 8$, 求 $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

030 若 $\sin x - \sqrt{3}\cos x = \frac{4m-6}{4-m}$ 有意义, 求 m 的取值范围.

031 若 $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, 求 $\cos(\alpha - \beta)$.

032 已知 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$, 且 $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$, 求 $\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$.

033 已知 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2}$, 角 α, β 满足条件: $\sin \beta = \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$.

(1) 用 $\tan \alpha$ 表示 $\tan \beta$; (2) 求 $\tan \beta$ 的最大值.

034 已知表达式 $3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 4\cos^2 x + k$ 可化成 $\sin(2x + \varphi)$ 的形式, 其中 $0 < \varphi < \pi$, 求 k 和 φ 的值.

5.6 两角和与差的正切

035 已知 $\alpha, \beta, \gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = \frac{2}{3}$, $\tan \gamma = \frac{1}{8}$, 求 $\alpha + \beta - \gamma$.

036 已知 $\tan \alpha$ 与 $\tan \beta$ 是方程 $x^2 - \sqrt{11}x - 4 = 0$ 的两个实根, 且 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 求证: $\alpha - \beta = -\frac{2\pi}{3}$.

037 已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 求 $2\alpha - \beta$ 的值.

038 设方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根是 $\tan \theta$ 和 $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, 且方程的这两个根之比为 $3:2$, 求 p 和 q 的值.

039 已知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{12}$, 求 $\frac{1 - \tan \alpha - \tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 + \tan \alpha + \tan \beta - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$.

040 在 $\triangle ABC$ 中, 已知: $\tan A + \tan B + \tan C = -\frac{1}{6}$, $\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C = -\frac{181}{216}$, $A < B < C$, 求 A, B, C 的正切值.

041 证明: $\tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan \alpha \tan 2\alpha \tan 3\alpha$.

042 证明: $\tan(A - B) + \tan(B - C) + \tan(C - A) = \tan(A - B)\tan(B - C)\tan(C - A)$.

5.7 二倍角的正弦、余弦和正切

043 若 $x = \frac{\pi}{12}$, 求 $\cos^4 x - \sin^4 x$ 的值.

044 已知 $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$, 求 $\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1 - \tan x}$ 的值.

045 已知 α 是第一象限角, 且 $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, 求 $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos(2\alpha + 4\pi)}$ 的值.

046 设 $0 < \alpha < \pi$, $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$, 求 $\cos 2\alpha$ 的值.

047 已知 $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{3}$ ($\frac{3\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$), 求 $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的值.

048 求值: $\cos \frac{\pi}{17} \cos \frac{2\pi}{17} \cos \frac{4\pi}{17} \cos \frac{8\pi}{17}$.

049 求值: $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8}$.

050 已知 $\tan \alpha = 2$, 求 $\tan 3\alpha$ 的值.

051 已知 $\tan^2 \alpha = 2 \tan^2 \beta + 1$, 求 $\cos 2\beta - 2\cos 2\alpha$ 的值.

5.8 半角的正弦、余弦和正切

052 已知 $\cos \varphi = \frac{1}{3}$, 并且 $270^\circ < \varphi < 360^\circ$, 求 $\sin \frac{\varphi}{2}$ 、 $\cos \frac{\varphi}{2}$ 、 $\tan \frac{\varphi}{2}$ 的值.

053 已知圆心角的正弦等于 $\frac{3}{5}$,求所对圆弧的圆周角的正弦、余弦及正切.

054 化简: $\frac{\tan(45^\circ - \alpha)}{1 - \tan^2(45^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

055 求证:(1) $\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right]$;

(2) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$.

056 已知 $\tan \alpha = \frac{m}{n}$,求 $m \cos 2\alpha + n \sin 2\alpha$ 的值.

057 若 $\sin \alpha$ 与 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 的比为 $8:5$,求 $\cos \alpha$ 、 $\cot \frac{\alpha}{4}$ 的值.

058 已知 $2 - \sqrt{3}$ 是方程 $x^2 - (\tan \alpha + \cot \alpha)x + 1 = 0$ 的一个根,求 $\sin 2\alpha$ 、 $\cos 2\alpha$ 的值.

059 已知 $4\sin^2 x - 6\sin x - \cos^2 x + 3\cos x = 0$,求 $\frac{\cos 2x - \sin 2x}{(1 - \cos 2x)(1 - \tan 2x)}$ 的值.

5.9 正弦定理

060 $\triangle ABC$ 中,已知 $A = 40^\circ$, $B = 80^\circ$, $a = 5$,求 b 、 c 与 $\triangle ABC$ 的面积(精确到 0.01).

061 $\triangle ABC$ 中, $a = 80$, $b = 100$, $A = 30^\circ$,则 B 的解的个数是_____.

062 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 7$, $B = 30^\circ$, $C = 85^\circ$,求 c (精确到 0.01).

063 满足 $a = x$, $b = 2$, $B = 45^\circ$ 的三角形有两个,则 x 的范围是_____.

064 已知 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle} = 15$, $ab = 60$, $\sin A = \cos B$,求三个角的大小.

5.10 余弦定理

065 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin A \cos B = 1 + \cos A \sin B$,这个三角形一定是().

(A) 锐角三角形 (B) 直角三角形
(C) 钝角三角形 (D) 等腰三角形

066 $\triangle ABC$ 中,若 $\cos A \cos B + \sin A \sin B + \cos A \sin B + \sin A \cos B = 2$,则这个三角形是().

(A) 直角三角形

(B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形

(D) 钝角三角形

067 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 2 : 4$, 则 $\cos C$ 的值为().

(A) $-\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{2}{3}$

(D) $\frac{2}{3}$

068 已知三角形三边长为三个连续正整数, 且最大角为钝角, 则三边长分别为_____.

069 已知 $\triangle ABC$ 中, $a = \sqrt{21}$, $b = 4$, $A = 60^\circ$, 求边 c .

070 已知 $\triangle ABC$ 中, $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$, 求 C .

5.11 解三角形

071 根据条件判断 $\triangle ABC$ 的形状:

(1) $\tan A \tan B > 1$;

(2) $\tan B = \frac{\cos(C-B)}{\sin A + \sin(C-B)}$;

(3) $\frac{\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C} = \frac{1 + \cos 2C}{1 + \cos 2B}$.

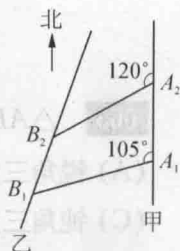
072 $\triangle ABC$ 中, 求证: 对任意实数 θ , 恒有 $a \cos(\theta - B) + b \cos(\theta + A) = c \cos \theta$.

073 $\triangle ABC$ 中, $a = 5$, $b = 4$, $\cos(A - B) = \frac{31}{32}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

074 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A = \frac{1}{2}$, $\tan B = \frac{1}{3}$, 最长边的边长为 1, 求最短边的边长.

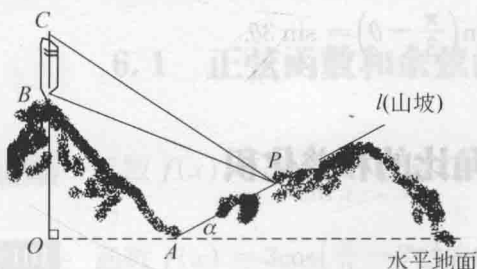
5.12 解三角形应用

075 如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 乙船沿某一方向匀速直线航行, 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 的方向 B_1 处, 此时两船相距 20 海里. 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里, 问乙船每小时航行多少海里?

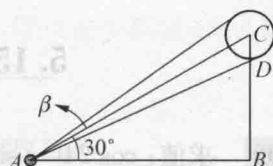


第 075 题

076 如图所示,某人在一山坡 P 处观看对面山顶上的一座铁塔. 已知,塔高 $BC = 80$ 米,塔所在的山高 $OB = 220$ 米, $OA = 200$ 米,图中所示的山坡可视为直线 l 且点 P 在直线 l 上, l 与水平地面的夹角为 α , $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 试问此人距水平地面多高时,观看塔的视角 $\angle BPC$ 最大(不计此人的身高).



第 076 题



第 077 题

077 有一广告气球直径为 6 米,放在公司大楼上空(如图),当某行人在 A 地观测气球时,其中心仰角为 $\angle BAC = 30^\circ$,并测得气球的视角 $\beta = 2^\circ$,若 θ (弧度)很小时,可取 $\sin \theta = \theta$,试估计气球的高 BC 的值约为_____米.

5.13 三角恒等式

078 求证: $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cot \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$.

079 若 α, β 是方程 $a \cos x + b \sin x = c$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) 在区间 $(0, \pi)$ 内的两个相异根,求证: $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$.

080 求证: $\frac{1 - \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha}{1 - \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = \frac{3}{2}$.

081 求证: $\frac{1 + \sec \alpha + \tan \alpha}{1 + \sec \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$.

082 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $a(\cos B + \cos C) = 2(b + c) \sin^2 \frac{A}{2}$.

083 在锐角三角形 ABC 中,求证:

$$\sin A + \sin B + \sin C > \cos A + \cos B + \cos C.$$

5.14 三角比的积化和差

084 $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = m$, 则 $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) =$ _____.

085 求值: $\cos^2 \alpha - \cos(\alpha + 60^\circ)\cos(\alpha - 60^\circ)$.

086 化简: $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + \sin^2 \beta$.

087 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{11}{20}$, 求 $\tan \theta$.

088 求证: $\cos 3A \sin 2A - \cos 4A \sin A = \cos 2A \sin A$.

089 求证: $4\sin \theta \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \sin 3\theta$.

5.15 三角比的和差化积

090 求值: $\cos 24^\circ - \sin 6^\circ - \cos 72^\circ$.

091 求值: $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ$.

092 求值: $\frac{2\sin 50^\circ + \sin 80^\circ(1 + \tan 60^\circ \tan 10^\circ)}{\sqrt{1 + \sin 100^\circ}}$.

093 求值: $\sec 50^\circ + \tan 10^\circ$.

094 $\triangle ABC$ 中, 证明:

(1) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$;

(2) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$.

095 求证:

(1) $\frac{\sin 4\theta + \sin 2\theta}{\cos 4\theta - \cos 2\theta} = -\cot \theta$;

(2) $\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta = 8\cos \theta \sin 2\theta \cos^2 2\theta$.

096 求 $y = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最值.

097 若 $x + y = \frac{2\pi}{3}$, 求 $\cos x - \cos y$ 的最大值.

098 求 $y = \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x}$ 的值域.

099 已知 $\sin(A + B) = \frac{3}{5}$, $\sin(A - B) = -\frac{4}{5}$, 求 $1 - \frac{1}{4}\sin^2 2A - \sin^2 B - \cos^4 A$ 的值.

第6章 三角函数

6.1 正弦函数和余弦函数的图象与性质

100 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ 的定义域为_____.

101 函数 $f(x) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$ 的单调递减区间为_____.

102 已知函数 $f(x) = ax + b\sin x + 2$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 若 $f(10) = 5$, 则 $f(-10)$ 的值为_____.

103 函数 $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ 的最小正周期为_____.

104 下列函数中, 既在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数, 又是以 π 为最小正周期的偶函数是().

(A) $y = \sin 2x$

(B) $y = \cos 2x$

(C) $y = |\sin x|$

(D) $y = |\sin 2x|$

105 若函数 $f(x) = x^2 \sin \theta - 4x \cos \theta + 6$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒正, 则 θ 的取值范围是_____.

106 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ 2\cos x, & 0 < x < \pi \end{cases}$, 若 $f(f(x_0)) = 2$, 则 $x_0 =$ _____.

107 函数 $y = \sqrt{\sin(\cos x)}$ 的定义域为_____.

108 设 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 、最小正周期为 $\frac{3\pi}{2}$ 的函数, 若 $f(x) = \begin{cases} -\cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ \sin x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi, \end{cases}$ 则 $f(-\frac{15\pi}{4}) =$ _____.

109 函数 $f(x) = \frac{\cos 4x}{(\sin x + \cos x)^2}$ 的最大值是_____.

110 函数 $y = \cos(2\sin x)$ ($x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$) 的值域为_____.

111 函数 $y = \sin 2x + \sin 3x$ 的最小正周期是_____.

112 函数 $y = 3\cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 和函数 $y = 3$ 的图象围成一个封闭的平面图形, 则这个封闭图形的面积是_____.

113 设函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[-1, \frac{1}{2}]$, 则以下结论中, 错误的是().

(A) $b - a$ 的最小值为 $\frac{2\pi}{3}$

(B) $b - a$ 的最大值为 $\frac{4\pi}{3}$

(C) a 不可能等于 $2k\pi - \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$

(D) b 不可能等于 $2k\pi + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$

114 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 若 $f(\frac{1}{2}) = 0$, 三角形的内角 A 满足 $f(\cos A) \leq 0$, 则 A 的取值范围是_____.

115 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $BC = 2$, 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

116 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}a \sin 2x + a \cos 2x - 2a - b$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. 问: 是否存在实数 a, b , 使得函数 $f(x)$ 的值域为 $[-5, 1]$? 证明你的结论.

117 已知定义在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时, 函数的解析式为 $f(x) = \sin x$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的函数表达式;

(2) 如果关于 x 的方程 $f(x) = a$ 有解, 那么将方程在 a 取某一确定值时所求得的所有解的和记为 M_a , 求 M_a 的所有可能取值及相对应的 a 的取值范围.

6.2 正切函数和余切函数的图象与性质

118 有下列函数: $y = \sin x + \tan x$, $y = x \cot x$, $y = \sqrt{\sin x}$, $y = \tan^2 x + 2 \tan x$, 其中偶函数的个数是().

(A) 1 个

(B) 2 个

(C) 3 个

(D) 4 个

119 下列函数中, 最小正周期为 π 的奇函数是().

(A) $y = |\cot x| \sin x$

(B) $y = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$

(C) $y = \sin 2x + \cos 2x$ (D) $y = \tan x - \cot x$

120 函数 $y = \tan \frac{x}{2} - \csc x$ 的最小正周期为_____.

121 函数 $y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的对称中心为_____.

122 函数 $y = \tan x + \cot x \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$ 的值域为_____.

123 已知正切函数 $y = A \tan(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象与 x 轴相交的两相邻点的坐标为 $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$, 且过点 $(0, -3)$, 则该正切函数的解析式为_____.

124 设 α, β 是一个钝角三角形的两个锐角, 有下列结论:

① $\tan \alpha \cdot \tan \beta < 1$; ② $\sin \alpha + \sin \beta < \sqrt{2}$;

③ $\cos \alpha + \cos \beta > 1$; ④ $\frac{1}{2} \tan(\alpha + \beta) < \tan \frac{\alpha + \beta}{2}$.

其中所有正确结论的序号为_____.

125 已知三个函数: ① $f(x) = \sin x$; ② $f(x) = \cos x$; ③ $f(x) = \tan x$, 其中满足命题“若 $f\left(\frac{\pi}{2} - m\right) = 1$, 则 $f(2m) = 2f(m)$ ”的函数共有().

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个

126 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 求证: $\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C > 1$.

6.3 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质

127 函数 $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向_____方向平移_____个单位, 可以得到 $y = -2 \sin 2x$ 的图象.

128 函数 $y = \sin x \cos x - 2 \sin 2x + 1$ 的最小正周期为_____.

129 若函数 $y = a \sin 2x + b \cos 2x$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称, 则实数 a, b 应该满足的条件是_____.

130 函数 $f(x) = \sin \frac{2}{5}x + \cos \frac{2}{5}x$ 的图象相邻两条对称轴之间的距离为().

(A) $\frac{2\pi}{5}$ (B) $\frac{5\pi}{2}$ (C) π (D) 5π

131 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}|\sin x - \cos x|$, 则 $f(x)$ 的值域是().

- (A) $[-1, 1]$ (B) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ (C) $\left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (D) $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

132 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5 cm, 秒针均匀地绕点 O 旋转, 当时间 $t=0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合, 将 A 、 B 两点的距离 d (cm) 表示成 t (s) 的函数, 则 $d =$ _____, 其中 $t \in [0, 60]$.

133 下面有四个命题:

- ① 函数 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ 的最小正周期是 π ;
 ② 函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 在 $(0, \pi)$ 上是减函数;
 ③ 在同一坐标系中, 函数 $y = \sin x$ 的图象和函数 $y = x$ 的图象有三个公共点;
 ④ 把函数 $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y = 3\sin 2x$ 的图象.

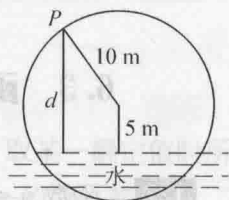
其中真命题的序号是 _____ (写出所有真命题的编号).

134 已知函数 $f(x) = A\sin(2x + \varphi)$ ($A > 0, 0 < \varphi < 2\pi$), 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) \geq f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ 成立, 则方程 $f(x) = 0$ 在 $[0, \pi]$ 上的解是 _____.

135 如图, 一个半径为 10 米的水轮按逆时针方向旋转, 每分钟转 4 圈. 记水轮上的点 P 到水面的距离为 d 米 (P 在水面下方时, d 为负数), 则 d (米) 与时间 t (秒) 之间满足关系式 $d = A\sin(\omega t + \varphi) + k$ ($A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$), 其中当点 P 从水面上浮现时开始计算时间.

有以下四个结论: ① $A = 10$, ② $\omega = \frac{2\pi}{15}$, ③ $\varphi = \frac{\pi}{6}$, ④ $k = 5$.

其中所有正确结论的序号是 _____.



第 135 题

136 已知函数 $f(x) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sqrt{3}\cos 2x$, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(1) 求 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 若不等式 $|f(x) - m| < 2$ 在 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 求实数 m 的取值范围.

137 已知函数 $f(x) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$, $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin 2x$.

(1) 设 $x = x_0$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, 求 $g(x_0)$ 的值;