

物理学基础理论课程经典教材

数学物理方法

(修订版)

吴崇试

高等教育出版社

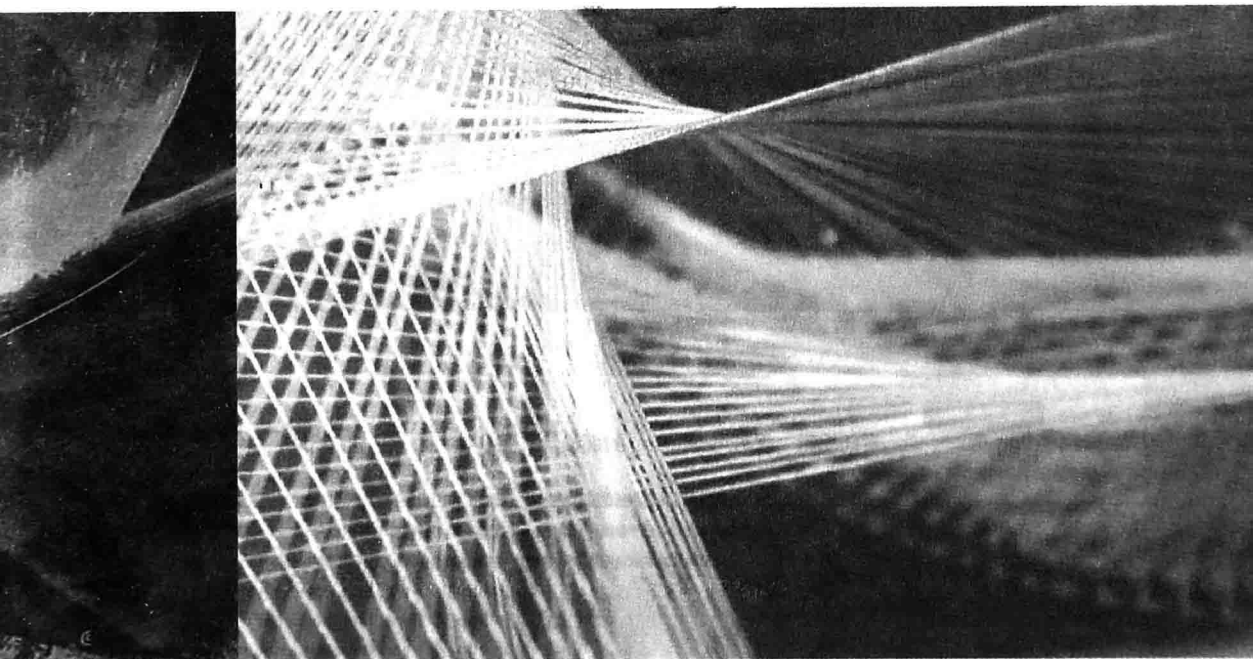
物理学基础理论课程经典教材

数学物理方法

SHUXUE WULI FANGFA

(修订版)

吴崇试



高等教育出版社·北京

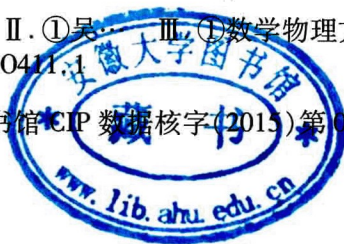
图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/吴崇试编著. --修订本. --北京:
高等教育出版社, 2015. 5

ISBN 978-7-04-042423-2

I. ①数… II. ①吴… III. ①数学物理方法-高等学
校-教材 IV. ①O411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第067545号



策划编辑 忻 蓓

责任编辑 缪可可

封面设计 张 楠

责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 高教社(天津)印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 33.25
字 数 630千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.com.cn>
版 次 2015年5月第1版
印 次 2015年5月第1次印刷
定 价 57.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 42423-00

数学物理方法

数字课程

吴崇试

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站,请登录网站后开始课程学习。

一、登录网站

1. 访问 <http://abook.hep.com.cn/1248211>, 点击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。

2. 课程充值: 登录后点击右上方“充值”图标, 正确输入教材封底标签上的明码和密码, 点击“确定”完成课程充值。

3. 在“我的课程”列表中选择已充值的数字课程, 点击“进入课程”即可开始课程学习。



数学物理方法

吴崇试

用户名

密码

验证码

进入课程

注册

重要通知

数字课程介绍

纸质教材

版权信息

联系方式

数学物理方法数字课程与纸质教材一体化设计, 紧密配合。数字课程涵盖教学要求、内容提要、重点与难点、主要知识点、拾遗补阙、证明详述、习题答案等内容。充分运用网络平台, 极大地丰富了知识的呈现形式, 拓展了教材内容。在提升课程教学效果同时, 为学生学习提供思维与探索的空间。

因系统升级, 所有用户都需要先注册 (不能用书后的明码暗码直接登录)。注册后的用户登录后, 请先点击页面右上方“充值”, 正确输入教材封底标签上的明码和密码完成课程选择。

注册

登录

充值

账号自登录之日起一年内有效, 过期作废。

使用本账号如有任何问题, 请发邮件至: ecourse@pub.hep.cn。

二、使用资源

与本书配套的易课程数字课程资源均放置在相应的章目录内，每章配有学习指导、证明详述、拾遗补阙及习题答案等资源，特定图标如下。



学习指导:包含每章的教学要求、内容提要、重点与难点、主要知识点。



证明详述:书中全部定理的详细证明。



拾遗补阙:正文内容的补充。



习题答案:书中习题的答案。

内 容 简 介

本书由复变函数与数学物理方程两大部分组成,包括复变函数的基本理论与应用、二阶线性偏微分方程定解问题的主要解法(分离变量法、积分变换方法、格林函数方法和变分法)以及与之密切相关的特殊函数(球函数与柱函数),紧密结合综合大学物理类专业及相关专业的教学需要,兼顾知识体系的完整性与解题方法的实用性,有较高的广度与深度。

除了物理类数学物理方法教材的传统内容外,书中增加了正十七边形的规尺作图原理、计算三角函数无穷解法的新方法、发散级数与渐近级数、莫比乌斯反演、常微分方程幂级数解法中的弗罗贝尼乌斯方法、拉普拉斯变换理论、线性偏微分方程的通解、三种解基本类型偏微分方程的定性知识、拉普拉斯算符的不变性、勒让德多项式的克里斯托费尔型和式以及非厄米算符等内容。书中删去全部定理和重要公式的详细证明,代之以尽可能简练的“证明梗概”,给出证明的思路与步骤,而将详细证明过程列入配套的数字课程中。本书提供了相当篇幅的阅读材料,包括复变函数部分和数学物理方程部分的两章综合阅读材料。

与本书配套的数字资源有内容提要、教学要求、主要知识点、重点与难点、证明详述、拾遗补阙及习题答案等。

前 言

本书原由北京大学出版社出版,前后已历十五载.为适应当前教育发展需要,在保持基本结构不变的基础上,对全书作了较大幅度的增订,由高等教育出版社出版.

高校物理类专业的数学物理方法课程,处于基础课程(普通物理、高等数学)与专业课程(理论物理)的中介地位,起着承上启下的作用,课程内容相对比较稳定.这次增订,笔者希望在介绍基本内容的同时,尽可能增加有关解题思路的分析,适当提高灵活性与深度,而最大的变化则是改变了传统教材的单一纸质形式,增加了数字课程这个新载体.书中全部定理的详细证明,均收录在本书配套数字课程中,在纸质教材上则以“证明梗概”的形式列出证明的思路与步骤,这或许更有助于对定理内容的理解与把握.读者在数字课程中,还可以看到许多拾遗补阙的内容,或详或略,它们作为正文的补充,希望或许能帮助读者开拓视野.数字课程中,还列出了各章的教学要求、内容提要、重点与难点以及基本知识点等内容,希望能对读者的学习起一点指导作用.

本书的另一个变化是将部分非基本要求的内容明确改称阅读材料,并且增加了若干新章节,包括散见于各章的阅读材料以及独立成章的综合阅读材料(即第十章与第二十三章).这些阅读材料,既有基本内容的拓展,也有笔者多年教学的积累,它们为本书所独有,具有原创性,笔者乐于与读者分享这些成果.通过这些阅读材料,笔者希望能改变“千书一面”的状况.而浏览这些内容,或许能激发读者对于本课程的兴趣.读者会得看到,即使就经典性的课程而言,仍然有丰富的内容有待我们去认识,仍然有广袤的土地有待开发.笔者的愿望是,通过本书的学习,有助于读者逐步建立起研究性地学习课程的习惯.

本书共二十三章,分为两部分.第一章至第十章为第一部分,内容为复变函数理论与应用.和原书相比,删去了有关 Mathematica 的介绍,并将 δ 函数一章后移到数学物理方程部分,使得总体结构更为紧凑.在基本教学内容方面,改写了拉普拉斯变换的部分内容(见 8.1 节与 8.2 节),介绍了常微分方程幂级数解法中的弗罗贝尼乌斯方法(见 9.3 节);而在阅读材料方面,则增加了“计算含三角函数无穷积分的新方法”(见 6.7 节)和“拉普拉斯变换的理论补充”(见 8.6 节),以及独立的第十章“综合阅读材料”.

本书的第二部分(第十一章到第二十三章)为数学物理方程,包括偏微分方程定解问题的主要求解方法(分离变量法、积分变换方法、格林函数方法、变分法等)

以及与之密切相关的特殊函数(球函数与柱函数). 在这一部分中, 增加了“勒让德多项式的积分表示”(见 15.3 节)和“希尔伯特空间中的线性微分算符”(见 17.3 节), 以及若干阅读材料, 例如“勒让德多项式的克里斯托费尔型和式”(见 15.9 节)、“非厄米算符”(见 17.7 节)和“广义函数理论简介”(见 19.6 节), 以及第二十三章的综合阅读材料. 在这一部分中, 删去了有关小波变换的介绍, 原因是笔者在这方面毫无实际经验与体会, 自感无法写出令人满意的文字.

书中还增加和改写了部分例题, 恕不一一列出.

在本书的构思、编写和出版过程中, 一直得到高等教育出版社物理分社的大力支持. 笔者感谢高建、忻蓓和缪可可三位编辑的辛勤劳动. 对于笔者来说, 本书的成书过程, 就是和他们诸位的愉快合作过程.

对于笔者来说, 本书的改版工作是首次尝试. 仓促而就, 自感有诸多不完善之处; 数字课程的内容, 也有待充实. 至于书中的错误, 敬请读者不吝指出.

吴崇试

2014 年于蓝旗营

数 学 符 号

$\forall$	任何; 凡	$\mathbb{N}$	非负整数 (自然数)
$\exists$	有; 存在	$\mathbb{Z}$	整数
$\exists!$	存在唯一的	$\mathbb{R}$	实数
$\nexists$	不存在	$\mathbb{R}^+$	正数
$\wedge$	并且; 与	$\mathbb{R}^-$	负数
$\vee$	或	$\mathbb{C}$	复数; 复平面
$a \in A$	(元素) a 属于 (集合) A	$\overline{\mathbb{C}}$	复数 (包括 ∞) 扩充的复平面
$a \notin A$	a 不属于 A		
$\cup$	并集	$\overline{\lim}$	上极限
$\cap$	交集	$\underline{\lim}$	下极限
$\supset$	包含	$\Rightarrow$	一致收敛
$\subset$	子集	$\ \cdot \ $	范数
$A \setminus B$	$\{a : a \in A, a \notin B\}$	$(\alpha)_n$	$\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)$
$\mathcal{F}\{f\}$	f 的傅里叶变换	$\mathcal{F}^{-1}\{f\}$	f 的傅里叶逆变换
$\mathcal{M}\{f\}$	f 的梅林变换	$\mathcal{M}^{-1}\{f\}$	f 的梅林逆变换
$\mathcal{L}\{f\}$	f 的拉普拉斯变换	$\mathcal{L}^{-1}\{f\}$	f 的拉普拉斯逆变换
$F(p) \equiv f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) \equiv F(p)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$

目 录

第一部分 复 变 函 数

第一章 复数与复变函数	(1)
1.1 预备知识: 复数与复数运算	(1)
1.2 复数序列	(5)
1.3 复变函数	(6)
1.4 复变函数的极限和连续	(8)
1.5 无穷远点	(8)
1.6 阅读材料: 正十七边形的规尺作图原理	(9)
习题	(10)
第二章 解析函数	(12)
2.1 可导与可微	(12)
2.2 解析函数	(13)
2.3 初等函数	(16)
2.4 多值函数	(19)
2.5 阅读材料: 解析函数的保角性	(25)
习题	(27)
第三章 复变积分	(30)
3.1 复变积分	(30)
3.2 柯西定理	(31)
3.3 两个有用的引理	(35)
3.4 柯西积分公式	(36)
3.5 高阶导数公式及柯西积分公式的其他推论	(39)
3.6 阅读材料: 泊松公式	(41)
习题	(44)
第四章 无穷级数	(45)
4.1 复数级数	(45)
4.2 二重级数	(47)
4.3 函数级数	(49)
4.4 幂级数	(50)
4.5 阅读材料: 发散级数与渐近级数	(52)

习题	(57)
第五章 解析函数的无穷级数展开	(59)
5.1 解析函数的泰勒展开	(59)
5.2 泰勒级数求法举例	(60)
5.3 解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性	(64)
5.4 解析函数的洛朗展开	(65)
5.5 洛朗级数求法举例	(67)
5.6 单值函数的孤立奇点	(70)
5.7 解析延拓	(73)
5.8 阅读材料: 伯努利数和欧拉数	(76)
5.9 阅读材料: 整函数与半纯函数	(77)
习题	(79)
第六章 留数定理及其应用	(81)
6.1 留数定理	(81)
6.2 有理三角函数的积分	(85)
6.3 无穷积分	(86)
6.4 含三角函数的无穷积分	(88)
6.5 实轴上有奇点的情形	(89)
6.6 多值函数的积分	(91)
6.7 阅读材料: 计算含三角函数无穷积分的新方法	(94)
6.8 阅读材料: 应用留数定理计算无穷级数的和	(100)
习题	(101)
第七章 Γ 函数	(104)
7.1 含参量积分的解析性	(104)
7.2 Γ 函数的定义	(106)
7.3 Γ 函数的基本性质	(108)
7.4 ψ 函数	(110)
7.5 B 函数	(114)
7.6 阅读材料: Γ 函数的普遍表达式	(118)
7.7 阅读材料: 黎曼 ζ 函数和乘性莫比乌斯变换	(121)
习题	(124)
第八章 拉普拉斯变换	(125)
8.1 拉普拉斯变换的定义与性质	(125)
8.2 拉普拉斯积分的收敛性与解析性	(128)
8.3 拉普拉斯变换的反演	(130)
8.4 普遍反演公式	(134)
*8.5 利用拉普拉斯变换计算级数和	(137)

8.6 阅读材料: 关于拉普拉斯变换的理论补充	(139)
习题	(142)
第九章 二阶线性常微分方程的幂级数解法	(144)
9.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点	(144)
9.2 方程常点邻域内的解	(145)
9.3 方程正则奇点邻域内的解	(148)
9.4 贝塞耳方程的解	(158)
9.5 阅读材料: 超几何函数	(163)
9.6 阅读材料: 合流超几何函数	(166)
9.7 阅读材料: 方程非正则奇点附近的解	(168)
习题	(172)
第十章 综合阅读材料 (一)	(173)
10.1 级数展开的加性莫比乌斯反演	(173)
10.2 某些无穷积分的变换公式	(178)
10.3 梅林变换	(187)
10.4 幂级数展开与常微分方程	(198)
10.5 二阶线性常微分方程的不变式	(206)

第二部分 数学物理方程

第十一章 数学物理方程和定解条件	(213)
11.1 弦的横振动方程	(213)
11.2 杆的纵振动方程	(215)
11.3 热传导方程	(217)
11.4 稳定问题	(219)
11.5 边界条件与初始条件	(220)
11.6 内部界面上的连接条件	(223)
11.7 定解问题的适定性	(224)
习题	(226)
*第十二章 线性偏微分方程的通解	(227)
*12.1 线性偏微分方程解的叠加性	(227)
*12.2 常系数线性齐次偏微分方程的通解	(228)
*12.3 常系数线性非齐次偏微分方程的通解	(231)
*12.4 特殊的变系数线性齐次偏微分方程	(235)
*12.5 波动方程的行波解	(235)
*12.6 波的耗散和色散	(238)
*12.7 热传导方程的定性讨论	(241)
*12.8 拉普拉斯方程的定性讨论	(243)

习题	(244)
第十三章 分离变量法	(245)
13.1 两端固定弦的自由振动	(245)
13.2 矩形区域内的稳定问题	(251)
13.3 多于两个自变量的定解问题	(253)
13.4 两端固定弦的受迫振动	(255)
13.5 非齐次边界条件的齐次化	(262)
习题	(267)
第十四章 正交曲面坐标系	(270)
14.1 正交曲面坐标系	(270)
*14.2 正交曲面坐标系中的拉普拉斯算符	(271)
*14.3 拉普拉斯算符的平移、转动和反射不变性	(275)
14.4 圆形区域	(277)
14.5 亥姆霍兹方程在柱坐标系下的分离变量	(282)
14.6 亥姆霍兹方程在球坐标系下的分离变量	(283)
14.7 阅读材料: 矢量波动方程和矢量亥姆霍兹方程	(285)
习题	(289)
第十五章 球函数	(290)
15.1 勒让德方程的解	(290)
15.2 勒让德多项式	(292)
15.3 勒让德多项式的微分表示与积分表示	(295)
15.4 勒让德多项式的正交完备性	(298)
15.5 勒让德多项式的生成函数与递推关系	(302)
15.6 勒让德多项式应用举例	(305)
15.7 连带勒让德函数	(309)
15.8 球面调和函数	(312)
15.9 阅读材料: 勒让德多项式的克里斯托费尔型和式	(315)
习题	(319)
第十六章 柱函数	(321)
16.1 贝塞耳函数和诺伊曼函数	(321)
16.2 贝塞耳函数的递推关系	(324)
16.3 贝塞耳函数的渐近展开	(326)
16.4 整数阶贝塞耳函数的生成函数和积分表示	(327)
16.5 贝塞耳方程的本征值问题	(328)
*16.6 虚宗量贝塞耳函数	(334)
16.7 半奇数阶贝塞耳函数	(337)
16.8 球贝塞耳函数	(338)

习题	(341)
第十七章 分离变量法总结	(343)
*17.1 内积空间	(343)
*17.2 函数空间	(346)
*17.3 希尔伯特空间中的线性微分算符	(350)
17.4 自伴算符的本征值问题	(354)
17.5 斯图姆-刘维尔型方程的本征值问题	(356)
17.6 斯图姆-刘维尔型方程本征值问题的简并现象	(362)
17.7 从斯图姆-刘维尔型方程的本征值问题看分离变量法	(363)
17.8 阅读材料: 非厄米算符	(366)
习题	(371)
第十八章 偏微分方程定解问题的积分变换解法	(374)
18.1 拉普拉斯变换方法	(374)
18.2 傅里叶变换方法	(378)
*18.3 半无界空间的情形	(381)
*18.4 关于积分变换的一般讨论	(382)
习题	(387)
第十九章 δ 函数	(388)
19.1 δ 函数的定义	(388)
*19.2 利用 δ 函数计算定积分	(392)
*19.3 常微分方程初值问题的格林函数	(394)
*19.4 常微分方程边值问题的格林函数	(399)
*19.5 求解常微分方程的格林函数方法	(402)
19.6 阅读材料: 广义函数理论简介	(406)
习题	(416)
第二十章 偏微分方程定解问题的格林函数解法	(418)
20.1 稳定问题格林函数的概念	(418)
20.2 稳定问题格林函数的一般性质	(421)
20.3 三维无界空间亥姆霍兹方程的格林函数	(423)
20.4 圆内泊松方程第一边值问题的格林函数	(427)
*20.5 波动方程的格林函数	(432)
*20.6 热传导方程的格林函数	(437)
习题	(440)
第二十一章 变分法初步	(441)
21.1 泛函的概念	(441)
21.2 泛函的极值	(442)
21.3 泛函的条件极值	(447)

21.4	微分方程定解问题和本征值问题的变分形式	(450)
*21.5	变边值问题	(452)
21.6	瑞利-里兹方法	(454)
	习题	(459)
第二十二章	数学物理方程综述	(461)
22.1	二阶线性偏微分方程的分类	(461)
22.2	线性偏微分方程解法述评	(465)
22.3	非线性偏微分方程问题	(467)
	习题	(471)
第二十三章	综合阅读材料 (二)	(473)
23.1	勒让德函数的朗斯基行列式	(473)
23.2	连带勒让德函数的加法公式	(478)
23.3	幂级数展开与偏微分方程	(483)
23.4	贝塞耳函数对阶求导	(489)
23.5	柱函数的梅林变换	(496)
	参考文献	(508)
	外国人名译名中英对照表	(510)

第一部分 复变函数

第一章 复数和复变函数

1.1 预备知识：复数与复数运算

📖 教学要求
📖 内容提要
📖 重点与难点
📖 主要知识点

1. 复数定义

设有一对有序实数 (a, b) , 遵从下列基本运算规则:

$$\text{加法} \quad (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (1.1)$$

$$\text{乘法} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc), \quad (1.2)$$

则称这一对有序实数 (a, b) 定义了一个复数 α , 记为

$$\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1), \quad (1.3)$$

a 称为 α 的实部, b 称为 α 的虚部,

$$a = \operatorname{Re} \alpha, \quad b = \operatorname{Im} \alpha.$$

上面的 (1.1) (1.2) 和 (1.3) 诸式均为涉及复数的等式. 所谓两个复数相等, 其含意是这两个复数的实部、虚部分别相等.

练习 1.1 证明复数的加法运算服从下列规律:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha; \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

练习 1.2 证明复数的乘法运算服从下列规律:

$$\alpha\beta = \beta\alpha; \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma); \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

复数的减法是加法的逆运算,

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d). \quad (1.4)$$

复数不能比较大小.

2. 特殊的复数: 0, 1 和 i

复数涵盖了实数作为它的特殊情形. 实数 a (也可称作复数 a) 就记为

📖 拾遗补阙
复数为何不能比较大小

$$a \equiv (a, 0) \equiv a(1, 0).$$

因此,

$$\alpha = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1). \quad (1.3')$$

其中 $(1, 0)$ 就是实数 1. $(0, 1)$ 称作虚单位, 记作 i (欧拉, 1777 年),

$$i = (0, 1). \quad (1.5)$$

显然, 由乘法规则可得

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad \text{即} \quad i^2 = -1.$$

另一个特殊的复数 (也是实数) 是零, 仍简写作 0,

$$0 = (0, 0).$$

不难证明, 对于任意复数 α ,

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha \cdot 0 = 0.$$

于是, 复数 α 就可以记为

$$\alpha = a + ib. \quad (1.6)$$

3. 共轭复数及复数除法

复数 $\alpha^* \equiv a - ib$ 与 $\alpha = a + ib$ 互为共轭. $(\alpha^*)^* = \alpha$. 复数与其共轭复数的乘积一定为非负实数.

$$\alpha\alpha^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

复数的除法是乘法的逆运算,

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (1.7)$$

4. 复数的几何表示

复数可以用复平面上的点表示. 在复平面上作直角坐标系 Oxy , 则复数 $\alpha = a + ib$ 可以用横坐标为 a 、纵坐标为 b 的点表示. 复数和复平面上的点有一一对应的关系. 对于任意一个复数, 复平面上都有唯一的一个点与之对应; 反之, 对于复平面上的任意一点, 也都有唯一的一个复数与之对应 (见图 1.1). 以后复数的全体或复平面记作 $\mathbb{C}$.

复数 $\alpha = a + ib$ 还可以表示成 $\mathbb{C}$ 上的矢量. 该矢量在两个坐标轴上的投影分别为 a 和 b . 将矢量平移 (例如将它的一个端点移到原点) 仍代表同一个复数.