

Beautiful

美丽的数学

——与青少年交流数学学习

周春荔 编著

美丽的数学

——与青少年交流数学学习

周春荔 编著



電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书为首都师范大学数学科学学院周春荔教授多年来和青少年朋友交流数学学习心得编写而成。周春荔教授用生动、风趣的语言将数学的真、善、美娓娓道来。通过数学的神奇应用来领悟数学理性之美，激发学生对数学的兴趣和热爱数学的激情；带领大家品味各类趣味和具有一定挑战性的问题，体验数学思维活动之美；通过动手、动脑、多问个为什么探索一些赛题的来龙去脉，与数学解题交朋友，和数学一起玩。全书从知识与能力、思想与方法、勤奋与积累三个方面总结学好数学取得成功的条件，点燃青少年热爱数学、学好数学的热情，引领青少年走进美丽的数学花园，开启数学智慧的大门。本书对数学普及工作者和数学教育工作者具有极高的参考价值。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

美丽的数学——与青少年交流数学学习 / 周春荔编著. —北京：电子工业出版社，2013.11

ISBN 978-7-121-21783-8

I. ①美… II. ①周… III. ①数学—青年读物 ②数学—少年读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 259499 号

策划编辑：贾 贺 徐云鹏

责任编辑：徐云鹏

印 刷：北京天宇星印刷厂

装 订：三河市鹏成印业有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本：720×1 000 1/16 印张：9.75 字数：105 千字

印 次：2013 年 11 月第 1 次印刷

定 价：25.80 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前 言

老师经常对大家讲，数学、语文、外语是三门重要的工具学科，也是基础学科。其中数学是锻炼思维的体操，数学是打开科学大门的钥匙，数学是攀登科学高峰的天梯。语文、外语的学习，只要刻苦用功，效果易显。而数学抽象、严谨；神妙有用但难于掌握。对相当一部分青少年朋友来说，往往感到数学是难于走近的枯燥无味的学科。数学大师陈省身爷爷生前为小朋友们题词“数学好玩”，怎么总觉得没有电脑游戏“接龙”、“偷菜”好玩呀！

著名数学家华罗庚爷爷在 20 世纪 50 年代时就对中学生说过：“其实，数学本身，也有无穷的美妙。认为数学枯燥无味，没有艺术性，这看法是不正确的。就像站在花园外面说花园里枯燥无味一样，只要你们踏进了大门，你们随时随地都会发现数学上有许许多多趣味的东西！”。

引领少年朋友走进数学的大花园，发现数学上许许多多有趣味的东西，逐步了解数学文化，激发大家学习数学的兴趣，我想，这应该是数学教育工作者、数学科普工作者的责任。呈现给大家的《美丽的数学》一书就是在这种想法下尝试写出的。在这里还要感谢孟祥霞同志，她对本书所有数学家的肖像进行了精心的绘画，为本书的出版付出了大量辛



勤的劳动，在此表示感谢！

书中的内容主要来源于20世纪90年代至今，作者在少年宫、数学夏令营和一些中小学，多次与青少年朋友交流数学学习心得的材料，择其精要加以整理而成。首先从数学文化的视角通过数学的神奇应用来领悟数学理性之美，激发大家对数学的兴趣和热爱数学的激情；进一步带领大家品尝各类趣题，体验数学思维活动之美；通过动手、动脑、多问个为什么谈一些赛题的来龙去脉，来与数学解题交朋友，和数学一起玩；最后从知识与能力、思想与方法、勤奋与积累三个方面总结学好数学取得成功的条件，印证了华罗庚教授的名言“聪明在于学习，天才由于积累”的道理。


数学之美是人们在数学思维活动中的一种体验和感受，让我们通过“学数学、做数学、用数学”的活动来共同体验、探索数学之美吧！

首都师范大学数学科学学院
周春荔

目 录

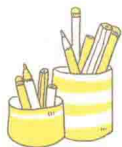
第一讲 美丽的数学	1
一、数学的理性思考——魅力无穷	2
二、走进数学大花园——饱览无穷的美妙	9
三、开启兴趣闸门的钥匙——好奇心	25
第二讲 与小升初的同学谈数学学习	34
一、代数、几何学科的特点	35
二、如何培养学习数学的兴趣	39
三、熟练正确的解题思路如何产生	43
四、怎样提高计算能力	49
五、良好的学习习惯是什么	51
第三讲 走近数学奥林匹克，学点奥林匹克数学	53
一、巧算与估算	56
二、整数与整除	60

三、余数应用初步	64
四、简单的逻辑推理问题	68
五、能与不能的判定	77
六、归纳、猜想，发现规律	83
第四讲 跟数学一起玩	89
一、品赛题，体验数学好玩	90
二、看联系，一组试题的来龙去脉	96
三、对一道华杯赛试题的讨论	104
四、思考本质，应对一般	111
第五讲 你能够成功	119
一、知识与能力	120
二、思想与方法	126
三、勤奋与积累	138



第一讲
美丽的数学

同学们都是小学五六年级或初一年级的学生。正是长身体、长知识、长智慧、长才干的时期。大家只是对算术、代数有了一点儿了解。要对大家讲“美丽的数学”的确是一件很难的事，也是我力所不能及的事。我想，同学们喜闻乐见的是故事，喜爱趣味问题。通过故事可以了解数学的发展，通过问题可以体验数学的思维，了解数学文化。因此，我们通过讲故事与问题的方式来了解数学，感悟数学之美。



一、数学的理性思考——魅力无穷

要回答什么是数学，这是一个很难的问题。就数学的研究内容和范围来说，小学生认为数学就是算术，算术是研究数与数的计算的科学，然而数学要比算术广泛得多；初中的学生认为数学是代数和几何，代数是符号表达的语言，主要研究运算与关系，几何主要研究形状、大小和空间，然而数学要比代数、几何广泛得多；有人说：数学研究概率和统计，概率只是研究随机现象，统计主要研究数据的整理与图示，并分析其意义。然而数学要比概率、统计广泛得多；有人说，数学是研究微积分，微积分主要研究变量的变化规律，极限与无限，然而数学要比微积分广泛得多。一句话：数学包括所有这一切，但又比这一切更为广泛。

社会实践在发展，人的认识在发展，数学也在发展！对数学的认识与理解也是与时俱进的。不管怎么说：数与形总是数学的两大柱石。因此人们常说：数学是研究数量关系与空间形式的科学。



如何研究呢？也就是说数学工作者的工作有什么特色呢？我们看两道大家都可以理解的趣味数学问题。

例 1：我国的人口超过 13 亿。请你回答：存在两个人出生的时间相差不超过 2.5 秒钟吗？

那好办！咱们搞个人口大普查吧。结果兴师动众，耗费投资和精力。遗憾的是，人们的出生时间一般记录到几点几分，没有秒的记录；更不好办的是，50 岁以上的人，特别是农村人口，出生时间只能精确到日。因此普查的办法是行不通的。可是会数学地思考问题的人，却采取另外的处理方式。咱们就看 1~100 岁的人就够了，1 小时等于 3600 秒，1 天 24 小时等于 $3600 \times 24 = 86400$ 秒，1 年最多为 366 天（都按闰年算）合 $86400 \times 366 = 316224000$ 秒，100 年最多为 3162240000 秒。如果每 2.5 秒为 1 个间隔，3162240000 秒为 $\frac{3162240000}{2.5} = 1264896000$ 个间隔，现有 1300000000 个人，放入 1264896000 个间隔，可以肯定，至少有两个人出生的时间相差不超过 2.5 秒钟。所以会数学思考的人不用人口普查，只需要动脑筋，想一想，算一算，就很快得出了肯定的结论。你看数学的思考多么奇妙！

例 2：有没有这样的集会，大家见面后互相握手，其中握奇数次手的总人数恰恰是 2005？

你要组织人员在会议中去统计吗？那也是大海里捞针了！难！会数学思考问题的人，往往从一般情况入手分析：假设参加集会有 n 个人，每两个人见面握一次手，对每人都计握手 1 人次。握来握去，有的两个

人重复握手也没有关系. 假设, 握 0 次手的人有 n_0 个, 握 1 次手的人有 n_1 个, 握 2 次手的人有 n_2 个, 握 3 次手的人有 n_3 个, 握 4 次手的人有 n_4 个, …… , 握 k 次手的人有 n_k 个, …… ,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad & 0 \times n_0 + 1 \times n_1 + 2 \times n_2 + 3 \times n_3 + 4 \times n_4 + \cdots + k \times n_k + \cdots \\ & = 2 \times \text{握手总次数} = \text{偶数} \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad 1 \times n_1 + 3 \times n_3 + 5 \times n_5 + 7 \times n_7 + \cdots = \text{偶数}$$

$$\text{即} \quad (n_1 + n_3 + n_5 + n_7 + \cdots) + (2 \times n_2 + 4 \times n_4 + 6 \times n_6 + \cdots) = \text{偶数}$$

所以 $n_1 + n_3 + n_5 + n_7 + \cdots = \text{偶数}$. 因此会数学思维的人出口惊人地告诉我们: 握奇数次手的总人数必是个偶数, 决不能等于 2005.

上面的例子太简单了, 那我们就看一个可以基本听明白的事例.



图灵 (1912—1954)

例 3: 实现计算过程的数学模型——图灵机.

电子计算机的研制成功是 20 世纪的重大科学成就之一. 而计算过程实现机械化的可行性的证明是由数学家实现的. 多少世纪以来, 人们都在学习计算, 但是究竟什么是计算? 在 1936 年以前, 从未有人进行过实质性的思考. 数学家图灵于 1936—1937 年发表论文《论可计算数及其对判定问题的应用》, 首次对计算的本质进行了深刻的分析. 他用抽象分析法, 舍弃计算时所用的工具、符号等与实质无关的因素, 对计算的结构进行了分析. 图灵发现在用二进制表示数的情况下, 一切计算过程都具有“线性”的性质, 即整个计算就表现为一条印着方格的纸带上的



一个只含 0 和 1 两个数码的数串, 每个方格中只有一个数码(0 或 1). 于是发现计算可能做的事, 也就是计算的实质只是如下几种活动:

- (1) 写上符号 0;
- (2) 写上符号 1;
- (3) 向左移一格;
- (4) 向右移一格;
- (5) 观察现在扫描的符号并相应地选择下一个步骤;
- (6) 停止.

计算者执行的程序, 也就是这类指令所排列成的表, 这就是实现计算过程的数学模型. 这个模型就是后来文献中所说的图灵机. 它是在不考虑硬件的条件下, 对可计算问题的逻辑描述. 图灵机是程序内存的, 主要由三部分组成: 一条带子、一个读写头、一个控制装置. 图灵机理论表明, 一切可计算问题都可以机械地进行. 因此, 通用计算机是可以制造出来的. 这为现代电子计算机的开发从理论上打下了基础. 而弄清算法的结构, 找到实现计算过程的数学模型, 又是发现图灵机的关键.

试想, 不用证明可行性, 哪个投资者敢向无底洞去投资呢? 既然图灵从理论上证明了一切可计算问题都可以机械地进行. 因此, 通用计算机在理论上是可以制造出来的. 剩下的事都交给技术工程师去实际完成就可以了. 事实上, 计算机的 5 代革命, 都是数学领头的.

再如, 王选教授创造的汉字激光照排系统, 使印刷业告别了“铅与火”的时代, 处于国际领先水平. 众所周知, 汉字字形信息量太大, 数字化的困难是西方文字照排无法相比的. 王选说: “由于我是数学系

毕业，所以很容易想到信息压缩，即用轮廓描述和参数描述相结合的方法描述字形，并于1976年设计出一套把汉字轮廓快速复原成点阵的算法。”王选的成功，具有不平常的意义。其中数学技术是关键的技术之一。

以上三个例题，可以使我们看到，数学是一种理性的思维方法，一种推理的方法。能用数学方法去判断一个想法是否正确，或者至少是否大概正确。数学是探索和发明的乐土，在这里每天都有新思想被发现。数学是用来解决科学中、行政管理中、其他各种行业中提出的各种问题的一种思维方法。它是用各种符号表达的语言，这种语言能为世界上所有的文明民族所理解；数学还是宇宙的语言，也能为地外文明（如果存在的话）所理解。它是一种像音乐那样具有对称性、令人喜悦的节奏的艺术。



王选（1937—2006）

通过这些介绍我们大体可以了解到：

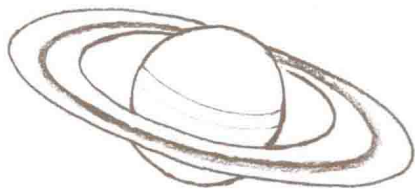
数学是以现实世界的空间形式和数量关系为研究对象的一门科学。它非常抽象！属于理性思维的范畴。它推理严谨，结论确定。它的应用十分广泛，这些是它的主要特点。数学具有人类追求的真、善、美的特点，数学的美不同于科学的美，艺术的美，数学的美是理性的美，抽象的美。数学是锻炼思维的体操，数学是打开科学大门的钥匙。正如华罗庚所说：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，地球之变，化工之巧，日用之繁，无处不用数学。”



再看几个数学的奇迹!

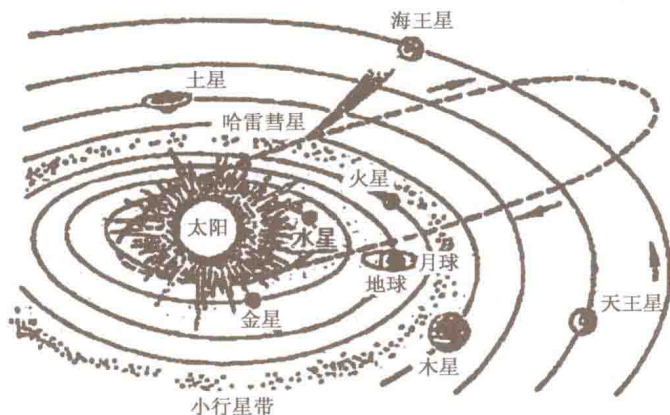
事例 1 1781 年, 德国物理学家、天文学家赫舍尔 (1738—1822) 发现了天王星以后, 人们又发现它的计算位置和实际观测位置有偏差, 而这种偏差又是无法用当时已知行星的吸引作用的影响来解释的. 因此, 科学家猜测一定有尚未发现的行星存在. 1845 年, 法国天文学家勒维烈 (1811—1877) 根据哥白尼学说计算出了这颗当时尚未发现的行星的轨道. 1846 年 9 月 18 日, 勒维烈把他的计算结果写信告诉了柏林天文台助理员、天文学观察家约翰·加勒 (1812—1910), 加勒在 1846 年 9 月 23 日收到这封信的当天晚上, 即观测发现了这颗新的行星, 其位置距离勒维烈的计算位置相差不到 1° ! 这就是海王星. 人们把海王星称为“笔尖上”发现的行星!

事例 2 土星光环从望远镜里观察似乎是连续的物质. 数学家用计算证明这是不可能的, 并且光谱的分析证实了根据计算而得出的结论.



土星光环图

事例 3 由于长期天文观测, 发现土星的轨道在扩大, 木星的轨道在缩小. 于是提出一个问题, 长此下去, 木星将会掉到太阳上去, 而土星将会飞出太阳系.



太阳系行星结构示意图

这个问题关系到太阳系的前途，普遍受到人们的关心。拉普拉斯根据数学原理，用微积分工具，特别是无穷级数，论证了这种现象源自于行星间的引力作用，轨道发生周期性扰动。以后土星和木星的轨道还会变回去，并计算出这个周期是 929 年。这个结论超出了人们的直观范围，而天文观测又要到九百年后才能看到。



拉普拉斯 (1749—1827)

这就要求数学必须具有逻辑的严谨性，结论的确定性，这样才能保证科学的预见性。这种以后将发生的事总还可以检验，而历史上久远发生过的而记载是否真实的事就更不好检验了。然而，数学不但可以准确地预报未来，也还能精确地“回报”往事。

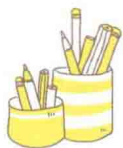
比如《春秋》中记载了公元前 722—公元前 481 年的 37 次日蚀，通过计算可以判知其中有 32 次是可靠的，其余皆属误传。



人们在谈论人文精神时，常常把人文精神定位在追求“真、善、美”和人的全面而自由的发展的最高层面上。在讨论艺术美的理论中，也经常谈到“真、善、美”三位一体的问题。对于数学，一个正确的数学理论，反映客观事物的本质与规律，这是数学的**真**；数学理论不管离现实多远，最后总能找到她的用途，体现其为人类服务的价值取向，这是数学的**善**；数学理论本身的奇特、微妙、简洁有力以及建立这些理论时人们的创造性思维，就是数学的**美**。正如数学家怀特海曾指出的：数学是真善美的辩证统一。因此从更广泛的意义上看，数学是一种文化，是一种追求理性美与创造理性美的文化。

数学家 H·庞加莱说过：数学家不单单因为数学有用而研究数学；他研究数学还因为他喜欢它，而喜欢它则是因为它是美丽的！

既然数学是这样的奇妙、有魅力，青少年应该立志学好数学！这并不是要求每个人都成为数学家或科学家，但是为了了解现代世界，每个人都应该掌握数学的思维方式，至少都必须懂得一些数学。



二、走进数学大花园——饱览无穷的美妙

数学是个大花园，里面百花争艳，万紫千红！
我们走进“图形园”，园门口写着大科学家伽利略的名言：



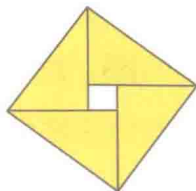
伽利略（1564—1642）

大自然以数学的语言讲话——这个语言的字母是圆、三角形以及其他各种数学形体。

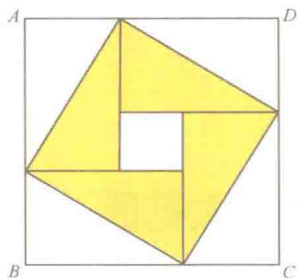
迎接小朋友的是这样一个问题：



例 1: 2002 年 8 月，在北京召开国际数学家大会。大会会标如图所示：它是由四个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成的一个大正方形。若大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1。问直角三角形的两条直角边各是多少？



解: 由大正方形面积是 13，小正方形面积是 1，所以小正方形边长是 1，四个相同的直角三角形的总面积是 12。如下图，在大正方形外面再拼补上四个相同的直角三角形，形成正方形 $ABCD$ ，它的面积是 $13+12=25$ ，因此边长等于 5。



从图中不难看出，直角三角形两条直角边之和等于正方形 $ABCD$ 的边长=5，长短两直角边的差等于中间的小正方形的边长=1。由算术四则的和差问题可得：直角三角形的较长直角边等于 3，较短直角边等于 2。