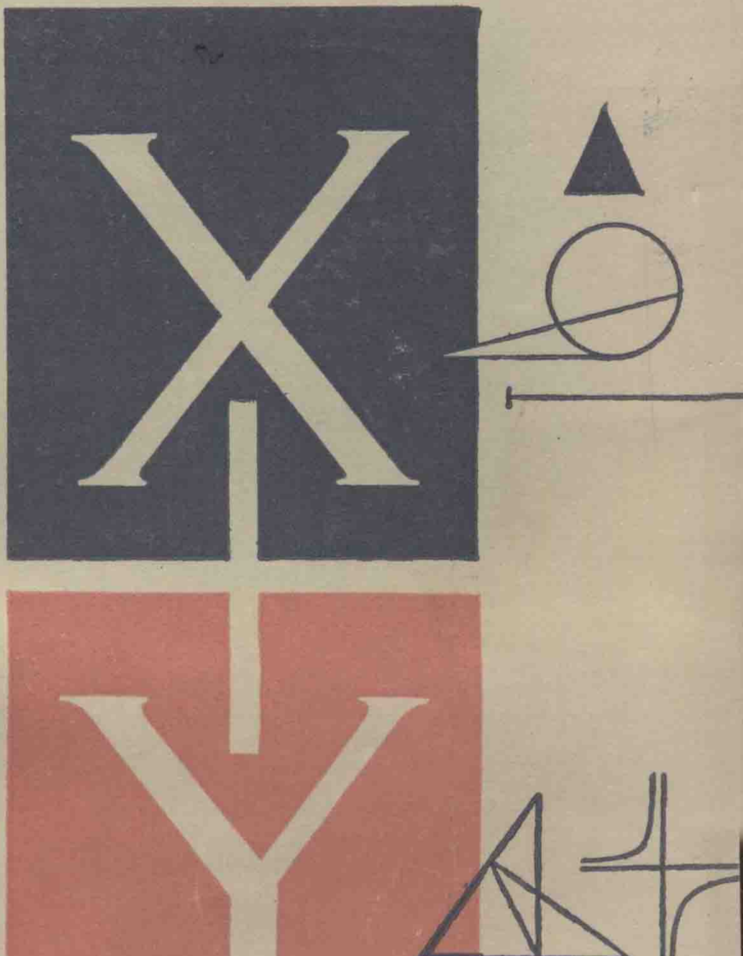
解析几何



高中数学题精编

浙江教育出版社

高中数学题精编

解析几何

钱孝华　许纪传　陶敏之
江焕棣　丁宗武　谢玉兰

浙江教育出版社

高中数学题精编

解析几何

钱孝华　许纪传　陶敏之
江焕棣　丁宗武　谢玉兰

※

浙江教育出版社出版
（杭州武林路125号）
浙江义乌印刷厂印刷
（杭州环城北路天水桥堍）
浙江省新华书店发行

开本787×1092　1/32　印张4.125　字数93,000
1985年1月第　1　版
1985年1月第1次印刷
印数：1－85,300

统一书号：7346·194
定　　价：0.48 元

说　明

1981年，我们曾编过《高中数学教材补充题》(共四册)，以帮助高中学生正确理解数学概念，提高运算和逻辑思维能力，并为教师在备课时挑选例题和补充习题提供一点方便．出版以后印行四次，较受读者欢迎．这次吸取了广大读者的意见，依据全日制六年制高中数学教材，对原书进行了认真的筛选和修改，编写成《高中数学题精编》一套．

在编写过程中，我们力求进一步加强基础知识的教学和基本技能的训练，选编的习题力求新颖、灵活、多样，重视知识连贯和综合运用，与原书比较，另一较大区别是在每节习题前增加了【分析与要点】，在这部分里，我们重在把教材内容的本质与精华提炼出来，并渗入编者自己教与学的体会，以期对广大教师和学生能稍有裨益．

全书按教材内容的顺序分册分段编写，教师和学生可按教学进度与课本同步使用．其中A组属于基本题，B组略有提高或带有一定的综合，C组难度较大，可供学有余力的同学练习。读者宜根据实际情况灵活选用，不必强求一律．

本书是《精编》的第四册，即解析几何部分，在编写过程中得到王祖樾老师的热忱帮助，谨在此表示衷心的感谢。

一九八四年十月

目 录

第一章 直 线

一、有向直线、定比分点与直线方程

【分析与要点】

1 线段长度是一个算术数（即不带符号的数），但是非零实数都带有适当的符号，这样，我们习惯上就用非负数来代替算术数，因此，线段长度用实数表达就是一个非负数.

2 有向线段的数量是一个实数，实数的绝对值表示有向线段的长度，实数的符号就表示有向线段的方向：与规定方向相同用正号，与规定方向相反则用负号.

3 把有向线段 AB 放在数轴上，则有

$$AB = x_2 - x_1 \quad (x_1、x_2 \text{ 分别是 } A、B \text{ 的坐标}),$$

即
$$AB = (\text{终点坐标}) - (\text{起点坐标}).$$

【注意】 坐标平面上的有向线段是用复数来刻划的，它的方向用辐角表示，它的长度用绝对值表示.

4 平面上有向线段 P_1P_2 的长即是 P_1、P_2 两点间的距离：

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$[P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2)].$$

5 有向线段的定比分点公式不宜死记硬背，可适当赋予形象.

满足条件 $\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}[\lambda\neq-1,\ P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2)]$ 的点 $P(x,y)$ 的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}x_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}x_2,$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{1}{1+\lambda}y_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}y_2.$$

从公式中可以看到

$$\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{1+\lambda}{1+\lambda}=1.$$

因此，如果把 PP_2 看作 1，则 P_1P 就应看作 λ. 如果将 λ 变动，那么分点 P 流动，这时分点公式就给出了过点 P_1、P_2 的有向直线上的点的坐标.

6　在平面直角坐标系下，一次函数的图象是直线（从函数观点讲），或者说，二元一次方程的解的几何意义是直线（从方程观点讲）. 反过来也成立（注意直角坐标系这个大前提）.

由于能决定直线的因素很多，因此用不同的“因素”，就产生了不同的表达直线的方程形式，以用于不同的场合.

（1）点斜式：直线通过点 (x_0,y_0)，具有斜率 k，则

$$y-y_0=k(x-x_0);$$

（2）斜截式：直线通过点 $(0,b)$，其中 b 称为直线在 y 轴上的截距，具有斜率 k，则

$$y=kx+b.$$

【注意】　不能表达平行于 y 轴的直线；

（3）两点式：直线过两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2)，则

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

【注意】 不能表达平行于 x 轴、y 轴的直线；

(4)截距式：直线过两点 $(a,0)$ 与 $(0,b)$，或者说在 x、y 轴上有截距 a、b，则

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

【注意】 不能表达平行于 x 轴、y 轴的直线；

(5) 一般式：$Ax+By+C=0$，$(A^2+B^2\neq0)$.

【注意】能表示直角坐标平面上的一切直线，进行一般讨论，但由于一般化，具体运用时不方便.

7 设二元一次方程

$$Ax+By+C=0$$

所表示的直线为 l，将方程改写为

$$Ax+By=-C,$$

再改用函数记号 $f(x,y)=-C$ $((x,y)\in l)$. 这样，我们就可以说，二元一次函数在 l 上取值为 $-C$. 此时

$\{(x,y)\mid f(x,y)<-C\}$ 表示半平面，

$\{(x,y)\mid f(x,y)>-C\}$ 表示另一半平面.

(A)

1. A、B 是 x 轴上两点，且 A 点坐标是 -2，根据下列条件，试求 B 点坐标：

(1) $AB=-5$； (2) $AB=5$；

(3) $BA=3$； (4) $AB=4$；

(5) $BA=4$.

2. (1) 在直角坐标系中，P 是角 α 终边上一点，且 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$，$|OP|=1$，求 P 点的坐标；

(2) 菱形边长为 5，一条对角线长为 6，若菱形的长、短对角线分别在 x、y 轴上，求菱形顶点的坐标；

(3) 正方形 $OABC$ 的边长为1（图1），且 $\angle AOX=30°$，求点A、B、C 的坐标；

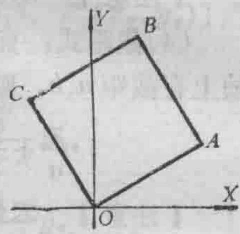


图 1

(4) $A(1,4)$、$B(5,0)$、$C(3,-3)$ 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，求A、B、C关于 y 轴对称点的坐标.

3. (1) 点P与 x 轴及与点 $A(-4,2)$ 的距离都是10，求 P点坐标；

(2) 等腰 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(3,0)$，底边 $|BC|=4$，若 BC 中点是 $D(5,4)$，求它的腰长；

(3) 若 $M(3,a)$ 和 $N(a,-1)$ 两点到 $P(4,2)$ 点的距离相等，求 a 的值.

4. 在 $A(2,-4)$、$B(5,11)$ 两点连成的线段 AB 上，求纵坐标等于 1 的点P的坐标.

5. (1) 连结 $P_1(2,y)$ 和 $P_2(x,6)$ 两点的线段的中点是 $P(3,2)$，求 x 和 y；

(2) 求 $\triangle ABO$ 的外心坐标，其中 $A(10,0)$、$B(0,5)$、$O(0,0)$；

(3) 在平行四边形 $ABCD$ 中，已知两个顶点 $A\left(-4\frac{1}{2},-7\right)$、$B(2,6)$ 及对角线交点 $M\left(3,1\frac{1}{2}\right)$，求点$C$和点$D$的坐标；

(4) 若三角形两顶点为 $A(3,7)$，$B(-2,5)$，求第三个顶点C的坐标，使 AC 的中点在 x 轴上、BC 的中点在 y 轴上.

6. (1) 一直线过$(0,4)$点，它的倾角是直线 $2x-y+3=0$ 的倾角的两倍，求它的方程；

(2) 直线 l 过点$(1,2)$且与两坐标轴组成等腰直角三角形，求 l 的方程.

7. (1) 将直线 $y=kx+b$ 的编号填入适当的括号内(图2)：

$k>0$、$b>0$ 是(　　)，

$k>0$、$b<0$ 是(　　)，

$k<0$、$b>0$ 是(　　)，

$k<0$、$b<0$ 是(　　)；

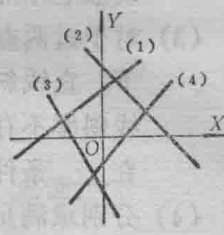


图 2

(2) 当 $ab>0$ 且 $ac<0$ 时，直线 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$不通过哪个象限?

8. 直线 l 在 x、y 轴上的截距分别为 a 和 b，问 a、b 应满足什么关系时，l 的倾斜角为：

(1) $45°$；　(2) $60°$；　(3) $135°$.

9. (1) 直线 l 过点 $P(1,3)$，且与两轴分别交于 A、B 两点，若P是 AB 的中点，求 l 的方程；

(2) 求经过点$(-3,4)$、且在两轴上截距的和等于 12的直线的方程.

10. 当 a 为何值时，直线 $ax+3y-5=0$ 过连结 $A(-1,-2)$、$B(2,4)$ 两点线段的中点?

11. 填空：

(1) 对于直线 $y-y_1=k(x-x_1)$，当 $k=$ ____ 时，直线与 x 轴平行；当 $k=$ ____、且点 (x_1, y_1) 满足 ____ 时，直线是第Ⅰ与第Ⅲ象限的角平分线；当 $k=$ ____、且点 (x_1, y_1) 满足 ____ 时，直线是第Ⅱ与第Ⅳ象限的角平分线；

(2) 直线 $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x+b$ 在 y 轴上的截距是 ____. 当 $\alpha=$ ____ 时，这条直线和 y 轴平行，在 ____ 的条件下，直线通过原点；

(3) 对于过两点 (x_1, y_1)、(x_2, y_2) 的直线，在 ____ 条件下，直线斜率存在，且等于 ____；在 ____ 条件下，直线斜率不存在，倾斜角是 ____，此时直线方程为 ____；在 ____ 条件下，直线斜率为零，此时直线方程为 ____；

(4) 分别求满足下列各条件的直线方程：

条	件	直线方程
经过 $P(2, -3)$	斜率 $k=\frac{1}{2}$	
经过 $P(4, 2)$	平行于 x 轴	
经过 $P(-\frac{1}{2}, 0)$	平行于 y 轴	
在 y 轴上的截距为 2	倾斜角为 $30°$	
在 x 轴上的截距为 -3	倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$	
在 x 轴、y 轴上的截距分别为 $\frac{3}{2}$、-3		
通过原点和 $P(5, 4)$		
经过 $P_1(2, 3)$、$P_2(-3, -1)$		

（B）

12．(1) 设 A、B、C 是 x 轴上的任意三点，求证：$AB+BC=AC$；

(2) 设 P_1、P_2、P_3、P_4 是 x 轴上任意四点，求证：

① $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4=P_1P_4$，

② $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+P_4P_1=0$，

③ $P_1P_2\cdot P_3P_4+P_2P_3\cdot P_1P_4=P_1P_3\cdot P_2P_4$.

13．(1) 对任意实数 x_1、x_2、y_1、y_2，求证：

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\geqslant\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};$$

(2) 对任意实数 x_1、x_2、x_3、y_1、y_2、y_3，求证：

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}\geqslant\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2};$$

(3) 你还能将上述不等式推广吗？

14．求两点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$B(\cos 2\alpha,\sin 2\alpha)$ 间的距离.

15．(1) 求证：无论 α 取什么实数，点 $P(R\cos\alpha,R\sin\alpha)$ 始终在一个定圆上；

(2) 点 $Q(3+5\cos\alpha,\ 4+5\sin\alpha)$ 始终在一个定圆上吗？为什么？

16．(1) 求与 $A(32,10)$、$B(42,0)$、$O(0,0)$ 三点等距离的点 P 的坐标；

(2) 试求 $\triangle ABC$ 外心坐标，其中

① $A(8,-2)$、$B(-2,6)$、$C(-2,-2)$，

② $A(2,2)$、$B(-5,1)$、$C(3,-5)$.

17. 用解析法证明：

(1) $\triangle ABC$ 中，点 P、Q、R 分别在 AB、BC、CA 上(图3)，且 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{CR}{CA}=\dfrac{1}{3}$.

求证：$\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 有公共的重心；

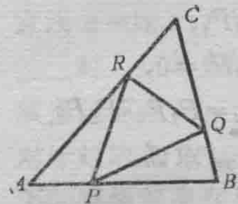


图 3

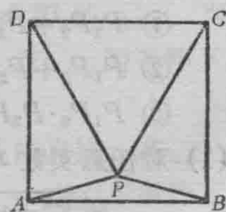


图 4

(2) P 为正方形 $ABCD$ 内一点，且 $\angle PAB=\angle PBA=15^\circ$（图4），求证：$\triangle PCD$ 为等边三角形.

【注意】 在用解析法证明几何题时，需注意以下各点：

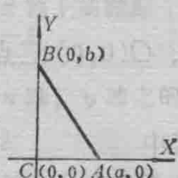
(1) 合理选取直角坐标系：①可将图形一边所在直线选作 x 轴. ②若图形具有轴对称性，可选取对称轴作为 y 轴. ③可将图形的一个端点作为原点；

(2) 尽量简化坐标（如正方形的边长可取作 1 个单位）；

(3) 凡是要用到的点，在图上都要标出它们的坐标.

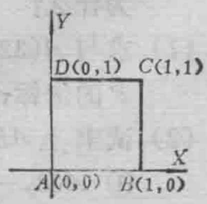
例如(图 5)：

直角三角形



(1)

正方形



(2)

等腰三角形　　　　平行四边形

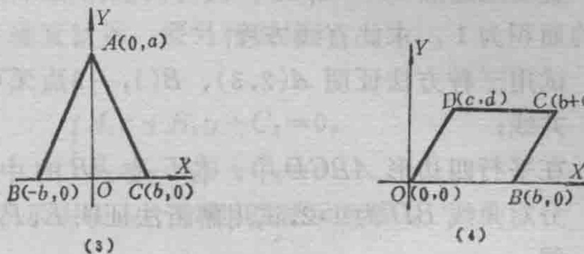


图 5

18. 已知三角形三边中点的坐标分别是 $D(2,4)$、$E(-3,1)$、$F(1,2)$，求三顶点的坐标.

19. 矩形 $ABCD$ 相邻两顶点坐标是 $A(-1,3)$、$B(-2,4)$，且它的对角线交点在 x 轴上，求点 C、D 的坐标.

20. (1) 平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点分别为 $A(4,2)$、$B(5,7)$、$C(-3,4)$，求顶点 D 的坐标；

(2) 平行四边形的三个顶点分别为 $(4,2)$、$(5,7)$、$(-3,4)$，求第四个顶点的坐标.

21. 利用线段的定比分点公式，求连结 $A(4,1)$ 和 $B(-2,4)$ 的直线与 x 轴、y 轴交点的坐标.

22. 已知 $A(5,-1)$、$B(-1,7)$、$C(1,2)$ 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，试求 $\angle A$ 的平分线 AD 之长.

23. (1) 试用反正切表示直线 $y=-2x+3$ 的倾斜角；

(2) $\triangle ABC$ 中，$\angle B-\angle C=90^\circ$（图 6），求证：$k_{AB}\cdot k_{AC}=1$.

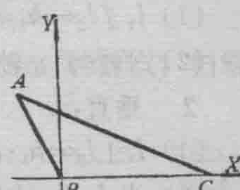


图 6

24. 已知 $A(2,3)$、$B(6,6)$ 是正方形 $ABCD$ 的两个顶点，试求顶点

C、D 的坐标.

25. 设一直线经过点 $M(-2,2)$，且与两坐标轴所围成的三角形的面积为 1，求此直线方程.

26. (1) 试用三种方法证明 $A(2,3)$、$B(1,-3)$、$C(3,9)$ 三点共线；

(2) 在平行四边形 $ABCD$ 中，若 E 是 AB 的中点，点 P 分对角线 BD 为 1:2，试用解析法证明 E、P、C 三点共线.

27. 过点 $P(2,1)$ 作直线 l 交 x、y 轴的正向于 A、B 点，求

(1) $S_{\triangle AOB}$ 取最小时，直线 l 的方程；

(2) $|PA|\cdot|PB|$ 为最小时，直线 l 的方程.

28. 已知直线 $y=3x-4$，求出下列各直线的方程：

(1) 与原直线关于 x 轴对称的直线；

(2) 与原直线关于 y 轴对称的直线；

(3) 与原直线关于原点对称的直线；

(4) 与原直线关于点 $(1,0)$ 对称的直线；

(5) 与原直线关于点 $(1,1)$ 对称的直线.

二、两条直线的位置关系

【分析与要点】

1 平行：直线 l_i 有斜率 k_i $(i=1,2)$（下同），

(1) $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$；

(2) 平行于 y 轴的直线：$x=a$.

2 垂直：

(1) $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$；

(2) 当 k_1、k_2 中有一个为零时，需另行讨论.

3 交角：设直线 l_1、l_2 的交角是 θ，则

(1) $\operatorname{tg}\theta=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$;

(2) 垂直情形，要另行讨论.

4 交点：

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0, & (1)\\ A_2x+B_2y+C_2=0. & (2)\end{cases}$$

方程(1)表示直线 l_1，方程(2)表示直线 l_2.

(1) 如$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$，则 l_1 与 l_2 交于一点 (x,y)：

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}};$$

(2) 如$\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}=0$，则有 $l_1 /\!/ l_2$ 或 $l_1\equiv l_2$.

平行的一个充分条件$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$，常被运用.

5 距离：

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\quad(A^2+B^2\neq 0);$$

(2) 平行线间的距离，可在一直线上取一特殊点，归结为这点到另一直线的距离.

(A)

29. 已知 $x+y-8=0$、$x-2y-5=0$、$3x-y=0$ 是一个三角

形的三条边所在直线的方程.

(1) 求经过三角形各顶点并且与对边平行的直线方程;

(2) 求三角形三条高所在的直线方程.

【注意】 在两直线 l_1、l_2 均不与坐标轴平行(重合)的前提下,

(1) $l_1 /\!/ l_2$ 的充要条件是 $k_1=k_2$ 或 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$.

(2) $l_1 \perp l_2$ 的充要条件是 $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ 或 $A_1A_2+B_1B_2=0$.

因此,对解与平行直线或垂直直线有关的问题,可采用两种方法,如:

例 1 求过点 $(2,3)$ 且与 $8x-6y+5=0$ 平行的直线方程.

解法 1 由 $8x-6y+5=0$ 得 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{6}$, $\therefore\ k=\dfrac{4}{3}$.

设所求直线为 $y=\dfrac{4}{3}x+b$, 将 $(2,3)$ 代入方程得

$$3=\frac{8}{3}+b,\ b=\frac{1}{3},$$

$\therefore$ 直线方程为 $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$, 即 $4x-3y+1=0$.

解法 2 由 $8x-6y+5=0$, 可设所求直线方程为

$$4x-3y+m=0,$$

将 $(2,3)$ 代入,得 $8-9+m=0$, $\therefore\ m=1$. 故直线方程为

$$4x-3y+1=0.$$

例 2 求过点 $(1,-1)$ 且与 $2x+3y+1=0$ 垂直的直线方程.

解法 1 由 $2x+3y+1=0$ 得