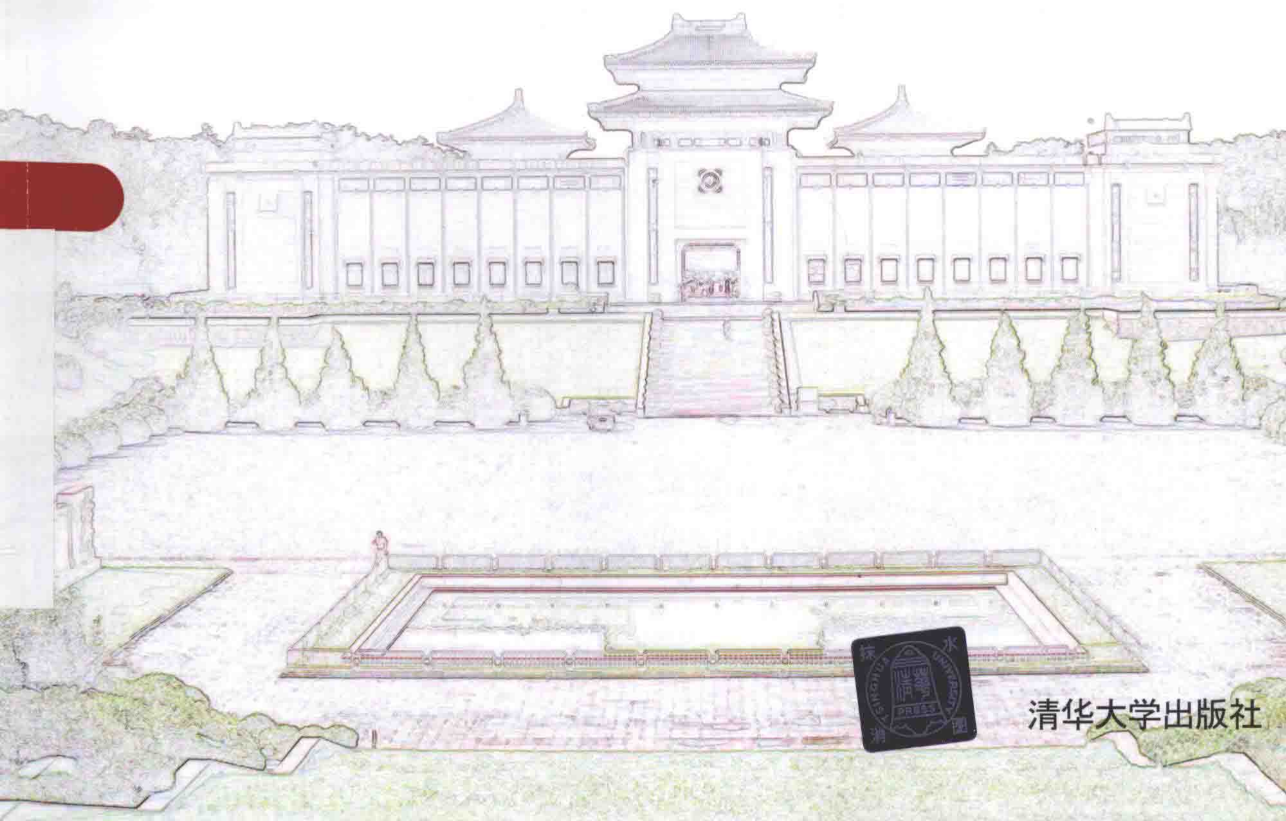
全国普通高校
电子信息与
电气学科
基础规划教材

电磁场与电磁波

林继成 主编 赵超先 唐斌 副主编 郭业才 主审



清华大学出版社

全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材

电磁场与电磁波

林继成　主编　赵超先　唐斌　副主编

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统阐述了电磁场与电磁波的基本理论，主要内容包括矢量分析、静电场、恒定电场与恒定磁场、静态场边值问题的解析法、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁波辐射等，共9章。编写时，针对电磁场与电磁波理论性强、逻辑严谨、概念抽象的特点，着重讲解电磁现象的基本概念、定性分析过程和定量分析方法，沿着"矢量分析—静态场（静电场、恒定电场、恒定磁场）—时变电磁场—导波系统—电磁波辐射"的知识结构组织教材内容。附录中给出了常用矢量公式、电磁量的符号及单位、国际单位制基本单位和导出单位、国际单位制词头及重要物理常数，以备查用。

本书可作为高等院校电子信息类与电气信息类专业的本科生教材，也可作为相关教学与工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与电磁波/林继成主编. --北京：清华大学出版社，2015
全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材
ISBN 978-7-302-39747-2

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 071348 号

责任编辑：梁　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：李建庄
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：17.5　　**字　　数**：434 千字
版　　次：2015 年 9 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：34.50 元

产品编号：062653-01

前言

本书是高等院校工科电子电气信息类专业“电磁场与电磁波”课程的本科教学用书，主要介绍了电磁场与电磁波的基本概念和基本规律。针对电磁场与电磁波理论性强、逻辑严谨、概念抽象的特点，编写时着重阐述电磁现象的基本概念、定性分析过程和定量分析方法，沿着“矢量分析—静态场（静电场、恒定电场、恒定磁场）—时变电磁场—导波系统—电磁波辐射”的知识结构组织教材内容。学生通过该课程的学习，将具备初步分析电子电气信息技术中所涉及的电磁场与电磁波基本特性的能力。在学习过程中，不仅使学生深化对电磁规律的理解，而且有助于培养他们的科学思维方法及创新精神。

本书共分为9章。第1章是矢量分析。矢量分析是理解和掌握电磁场与电磁波理论中的数学推导、方程和公式的关键。掌握好本章的知识对学好电磁场与电磁波具有非常重要的意义，所以必须打好此基础。第2章介绍了静电场。第3章介绍了恒定电场。第4章介绍了恒定磁场。第5章着重阐述了分离变量法和镜像法求解静态场边值问题的基本解法。第6章介绍了时变电磁场。第7章介绍了平面电磁波的基本概念、基本参数、传播特性以及在两种媒质分界面上的反射与透射，第8章介绍了导行电磁波，包括均匀导波系统中波的传播特性，矩形波导、圆柱波导、谐振腔中的波传播，以及传输线理论。第9章介绍了电磁波的辐射特性。附录中给出了常用矢量公式、电磁量的符号及单位、国际单位制基本单位和导出单位、国际单位制词头及重要物理常数，以备查用。

本书由林继成教授担任主编。参加本书编写工作的有：林继成（南京晓庄学院，第1、2、8章，第4章第4.7节及附录）、赵超先（南京晓庄学院，第6章）、唐斌（西南石油大学，第5章）、张永刚（安徽理工大学，第9章）、张闯（南京信息工程大学，第7章）、蔡庆春（沈阳化工大学，第3章）、陈春霞和马业万（安庆师范学院，第4章的第4.1～4.6节）。最后，由林继成负责全书的统稿工作，由南京信息工程大学郭业才教授担任本书的主审。

本书是清华大学“全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材”之一，“十二五”江苏省高等学校电子信息类重点专业（No. 164）建设项目建设的教材，南京信息工程大学精品资源共享课程建设的教材，江苏高校品牌专业建设工程一期项目（PPZY2015B134）。

本书在编写过程中，得到了许多同仁和清华大学出版社的大力支持和帮助，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中的疏漏和欠妥在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2015年8月

目录

第1章 矢量分析

矢量分析是研究电磁场和电磁波问题最基本的也是最重要的数学工具。本章在对矢量的概念及其运算进行简要介绍的基础上，对矢量场及其性质进行较详细的描述。

1.1 标量场与矢量场

1.1.1 矢量

在一定的单位制下，用一个实数就足以表示的物理量是标量，如时间、质量、温度等。在这里，实数表示的是这些物理量的大小。和标量不同，矢量是除了要指明其大小还要指明其方向的物理量[①]，如速度、力、电场强度等。

1. 矢量的表示及其基本性质

矢量可以用一条带箭头的线段表示，如图1.1所示。线段的长度表示矢量的大小，称为矢量的模；箭头所指的方向代表矢量的方向。起点为 A 终点为 B 的矢量，通常记为$\overrightarrow{AB}$。也可以用上方带箭头的字母表示矢量，例如$\vec{v}$、$\vec{a}$、$\vec{F}$等。在印刷时，矢量多用黑斜体字母表示，例如$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{F}$。矢量$\overrightarrow{AB}$的模，记为$|\overrightarrow{AB}|$；矢量$\vec{F}$、$\boldsymbol{F}$ 的模，记为$|\vec{F}|$、$|\boldsymbol{F}|$，也可用不加粗也不带上箭头的字母 F 表示。

在数学上，不考虑矢量的起点位置，把模相等且方向相同的矢量视为相等矢量。这意味着矢量可以在空间任意的平行移动。因此，这类矢量也称为自由矢量。

模为1的矢量称为单位矢量。与矢量 $\boldsymbol{A}$ 同向的单位矢量可记为 $\boldsymbol{e}_A$，则 $\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{e}_A$。

模为0的矢量称为零矢量，记为 $\boldsymbol{0}$。零矢量的起点和终点是重合的，因此零矢量的方向是任意的。

模相等而方向相反的两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，称互为负矢量，记为 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的和定义为，将 $\boldsymbol{B}$ 平移至其起点与 $\boldsymbol{A}$ 的终点重合的位置，再由 $\boldsymbol{A}$ 的起点向 $\boldsymbol{B}$ 的终点所作的矢量，如图1.2所示，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的差记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，并规定 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$。矢量加减法满足交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ 和结合律$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$，如图1.3所示。

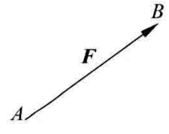


图1.1 矢量的表示

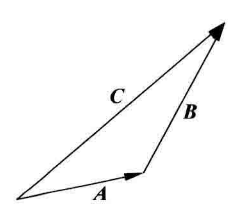


图1.2 矢量的加法

① 矢量的严格定义是建立在坐标系的旋转变换基础上的，关于这方面的内容已超出了本书的讨论范围，所以不予介绍。

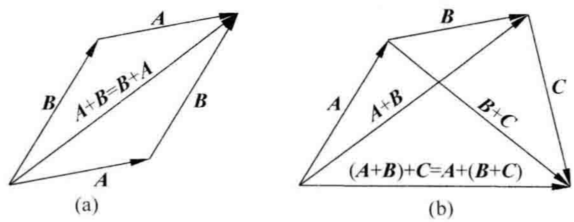


图 1.3 矢量加法的性质

实数 k 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的乘积是一个矢量,记为 $k\boldsymbol{A}$。该矢量的模为 $|k||\boldsymbol{A}|$,其方向由实数 k 的正负决定:当 $k>0$ 时,与 $\boldsymbol{A}$ 方向一致;当 $k<0$ 时,与 $\boldsymbol{A}$ 方向相反。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的点乘(也称数量积)定义为,两矢量的模及其夹角 α 的余弦的乘积,记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\alpha \tag{1.1.1}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 叉乘(也称矢量积)的结果 $\boldsymbol{C}$ 是一个矢量,记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$。该矢量的模为两矢量的模及其夹角 α 的正弦的乘积,即

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha \tag{1.1.2}$$

而 $\boldsymbol{C}$ 的方向与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所确定的平面垂直且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 构成右手螺旋关系,如图 1.4 所示。注意到矢量的叉乘不满足交换律,且有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$。

2. 矢量的直角坐标表示

在直角坐标系中,与 x 轴、y 轴和 z 轴同方向的单位矢量称为基本单位矢量,简称基矢,记为 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$,如图 1.5 所示。3 个基本单位矢量满足如下关系:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_z=0\\
&\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z\cdot\boldsymbol{e}_z=1\\
&\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}\\
&\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{e}_y=\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_y
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

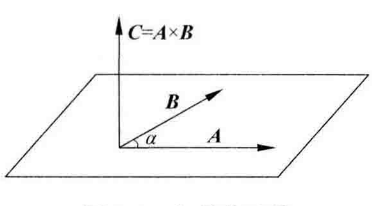


图 1.4 矢量的叉乘

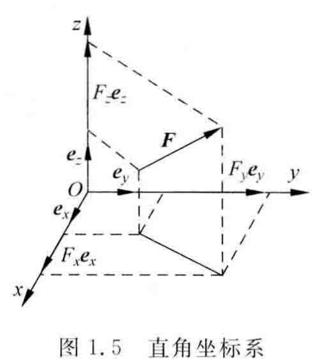


图 1.5 直角坐标系

设空间中任意矢量 $\boldsymbol{F}$,在 x 轴、y 轴和 z 轴的投影分别为 F_x、F_y 和 F_z,则依据数与矢量的乘法以及矢量的加法法则,可将矢量 $\boldsymbol{F}$ 表示为

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{e}_x+F_y\boldsymbol{e}_y+F_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.4}$$

这里,F_x,F_y,F_z 称为矢量 $\boldsymbol{F}$ 的直角坐标分量。矢量 $\boldsymbol{F}$ 的模为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{1.1.5}$$

设 α,β,γ 分别为 $\boldsymbol{F}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角，称它们为 $\boldsymbol{F}$ 的方向角，它们的余弦称为 $\boldsymbol{F}$ 的方向余弦。由式(1.1.4)和式(1.1.1)，得

$$F_x = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_x = F\cos\alpha,\quad F_y = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_y = F\cos\beta,\quad F_z = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{e}_z = F\cos\gamma$$

则 3 个方向余弦表示为

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},\quad \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},\quad \cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \tag{1.1.6}$$

从坐标原点向空间任意一点所作的矢量称为矢径，记为 $\boldsymbol{r}$。在直角坐标系中，点(x,y,z)对应的矢径表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.7}$$

由于矢径 $\boldsymbol{r}$ 与空间点的坐标(x,y,z)具有一一对应的关系，作为空间位置函数的物理量 $f(x,y,z)$亦可简记为 $f(\boldsymbol{r})$。

设有 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的点乘表示为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.1.8}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 叉乘矢量 $\boldsymbol{B}$ 表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x(A_yB_z - A_zB_y) + \boldsymbol{e}_y(A_zB_x - A_xB_z) + \boldsymbol{e}_z(A_xB_y - A_yB_x) \tag{1.1.9}$$

或写成行列式形式

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_x\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_y\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \boldsymbol{e}_z\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.1.10}$$

3 个矢量相乘称为矢量三重积，其中 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$称为三重标积，$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$称为三重矢积。前者的结果是一个标量，后者的结果是一个矢量。矢量三重积具有如下运算性质

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.1.11}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1.12}$$

【例 1.1】 式(1.1.11)和式(1.1.12)的证明。

证：设 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{e}_x+C_y\boldsymbol{e}_y+C_z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = A_x\cdot\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y\cdot\begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z\cdot\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

由行列式的性质，得

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

即

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

式(1.1.11)得证。

令

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E}$$

其中

$$E_x=\begin{vmatrix}B_y & B_z\\ C_y & C_z\end{vmatrix},\quad E_y=\begin{vmatrix}B_z & B_x\\ C_z & C_x\end{vmatrix},\quad E_z=\begin{vmatrix}B_x & B_y\\ C_x & C_y\end{vmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{E}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{e}_x\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ E_y & E_z\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_y\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ E_z & E_x\end{vmatrix}+\boldsymbol{e}_z\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ E_x & E_y\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ E_y & E_z\end{vmatrix}&=A_y\begin{vmatrix}B_x & B_y\\ C_x & C_y\end{vmatrix}-A_z\begin{vmatrix}B_z & B_x\\ C_z & C_x\end{vmatrix}\\ &=A_yB_xC_y-A_yB_yC_x-A_zB_zC_x+A_zB_xC_z\\ &=B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_x(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\end{aligned}$$

即

$$\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ E_y & E_z\end{vmatrix}=B_x(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_x(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$$

类似地,有

$$\begin{vmatrix}A_z & A_x\\ E_z & E_x\end{vmatrix}=B_y(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_y(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}),\quad \begin{vmatrix}A_x & A_y\\ E_x & E_y\end{vmatrix}=B_z(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-C_z(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$$

故

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$$

式(1.1.12)得证。

3. 矢量函数及其微积分

对于某实数区间上的每个值 t,有一个确定的矢量 $\boldsymbol{F}$ 与之对应,则称 $\boldsymbol{F}$ 为 t 的矢量函数,记为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$。在直角坐标系中 $\boldsymbol{F}(t)$ 表示为

$$\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{e}_x+F_y(t)\boldsymbol{e}_y+F_z(t)\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.13}$$

(1) 矢量函数的导数与微分

矢量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的导数定义为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)}{\Delta t} \tag{1.1.14}$$

将式(1.1.13)代入式(1.1.14),由于 3 个基矢是与 t 无关的常矢量,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F_x(t+\Delta t)-F_x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_x+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F_y(t+\Delta t)-F_y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_y+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F_z(t+\Delta t)-F_z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{e}_z$$

即在直角坐标系中 $\boldsymbol{F}(t)$ 的导数表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_x+\frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_y+\frac{\mathrm{d}F_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.15}$$

其微分表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \mathrm{d}F_x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}F_y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}F_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.16}$$

矢径的微分表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.17}$$

矢量函数的微分具有如下性质

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{F} \pm \boldsymbol{G}) = \mathrm{d}\boldsymbol{F} \pm \mathrm{d}\boldsymbol{G} \tag{1.1.18}$$

$$\mathrm{d}(k\boldsymbol{F}) = k\mathrm{d}\boldsymbol{F} \quad (k\ \text{为常数}) \tag{1.1.19}$$

$$\mathrm{d}(f\boldsymbol{F}) = \mathrm{d}f\boldsymbol{F} + f\mathrm{d}\boldsymbol{F} \quad (f\ \text{为标量函数}) \tag{1.1.20}$$

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{G} \tag{1.1.21}$$

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \mathrm{d}\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F} \times \mathrm{d}\boldsymbol{G} \tag{1.1.22}$$

(2) 矢量函数的积分

矢量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的不定积分 $\int \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$ 和定积分 $\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$ 仍是一个矢量，将式(1.1.13)代入可得在直角坐标系中表示

$$\int \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_x\int F_x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_y\int F_y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_z\int F_z(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.23}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{e}_x\int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_y\int_{t_1}^{t_2} F_y(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{e}_z\int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.24}$$

1.1.2　圆柱面坐标系和球面坐标系

在研究标量场和矢量场的性质时，为了适应具体物理问题的边界，有时也从对称性考虑，会选用一些便于求解的正交曲线坐标系。除了我们非常熟悉的直角坐标系外，圆柱面坐标系和球面坐标系也是我们经常选用的坐标系。

在建立坐标系时，首先要在参考系上选择一个点并称为原点，记作 O。直角坐标系用三组两两正交的平面确定空间点的位置，其中交点与原点重合的 3 个平面称为坐标平面。3 个坐标平面两两的交线在指定正方向后成为 3 个坐标轴，记作 Ox、Oy 和 Oz。3 个坐标平面分别记作 xOy，xOz，yOz。于是，空间任意一点 M 的位置可以由分别与 xOy，xOz，yOz 平行的 3 个平面的位置确定。例如，3 个平面 $x=x_1$，$y=y_1$，$z=z_1$ 的交点表示为 (x_1, y_1, z_1)，称作 M 点的坐标。在其他正交曲线坐标系中，仍然是用 3 个彼此正交的面的交点来确定空间点的位置。区别在于 3 个面通常是曲面而不是或不全是平面，曲面两两相交的交线都称作坐标曲线。显然，过空间每一点都有 3 条彼此正交的坐标曲线。为了便于描述，通常仍需要以直角坐标系作为参照。

1. 圆柱面坐标系

圆柱面坐标系如图 1.6 所示，3 个彼此正交的曲面是：

(1) 轴线过原点的圆柱面，令轴线与 z 轴重合，半径 ρ 确定了圆柱面位置。

(2) 以圆柱面轴线为边缘的半平面，取向由与 xOz 的夹角 ϕ 确定。

(3) 垂直圆柱面轴线的平面，位置由该平面的 z 坐标确定。

圆柱面 $\rho=\rho_1$ 和半平面 $\phi=\phi_1$ 以及平面 $z=z_1$ 的交点确定的空间点 M 的位置记作 (ρ_1, ϕ_1, z_1)。换句话说，ρ，ϕ，z 是圆柱面坐标系的坐标变量。它们的取值范围为

$$0 \leqslant \rho < \infty, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

过任意一点 $M(\rho_1, \phi_1, z_1)$ 的 3 条坐标曲线是：半径为 ρ_1 的圆，与 z 轴平行的直线，从

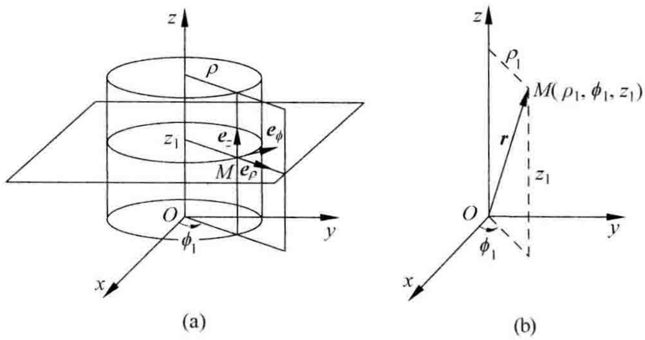


图 1.6　圆柱面坐标系

z 轴上一点发出的射线。过不同点的坐标曲线是不同的，因此在每一点处的基本单位矢量一般也是不同的。在圆柱面坐标系中，过任意点 3 个基本单位矢量记为 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{e}_z$。其中，$\boldsymbol{e}_\rho$ 沿柱面半径向外，$\boldsymbol{e}_z$ 沿 z 轴正向，$\boldsymbol{e}_\phi$ 与 $\boldsymbol{e}_\rho$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 垂直(沿切线)且指向 ϕ 增大的方向。$\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{e}_z$ 彼此垂直且满足右手螺旋关系，即满足

$$\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_z,\quad \boldsymbol{e}_\phi \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_\rho,\quad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_\phi \tag{1.1.25}$$

这组基本单位矢量与直角坐标系基本单位矢量之间满足下面的关系

$$\boldsymbol{e}_\rho = \cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y,\quad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \tag{1.1.26}$$

直角坐标变量与圆柱面坐标变量之间存在如下关系

$$x = \rho\cos\phi,\quad y = \rho\sin\phi,\quad z = z \tag{1.1.27}$$

在圆柱面坐标系中，矢径表示为

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.28}$$

矢径的微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z + z\mathrm{d}\boldsymbol{e}_z$$

而

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{0} \\ &\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\rho = -\sin\phi\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_y = \mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi \\ &\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\phi = -\cos\phi\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_x - \sin\phi\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_y = -\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned} \tag{1.1.29}$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\mathrm{d}\phi\boldsymbol{e}_\phi + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.30}$$

起点在 $\boldsymbol{r}$ 点的任意矢量 $\boldsymbol{F}$，在圆柱面坐标系中表示为

$$\boldsymbol{F} = F_\rho\boldsymbol{e}_\rho + F_\phi\boldsymbol{e}_\phi + F_z\boldsymbol{e}_z \tag{1.1.31}$$

式中，$\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{e}_z$ 是 $\boldsymbol{r}$ 点(起点)处的基矢；F_ρ，F_ϕ，F_z 是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\phi$，$\boldsymbol{e}_z$ 方向上的投影。

在圆柱面坐标系中，柱面上的面积元以及体积元表示为(参见图 1.7)

$$\mathrm{d}S = \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z,\quad \mathrm{d}\tau = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z \tag{1.1.32}$$

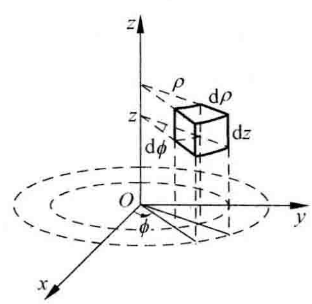


图 1.7　圆柱面坐标系中的体积元

2. 球面坐标系

球面坐标系中，用中心在坐标原点的球面和顶点在坐标