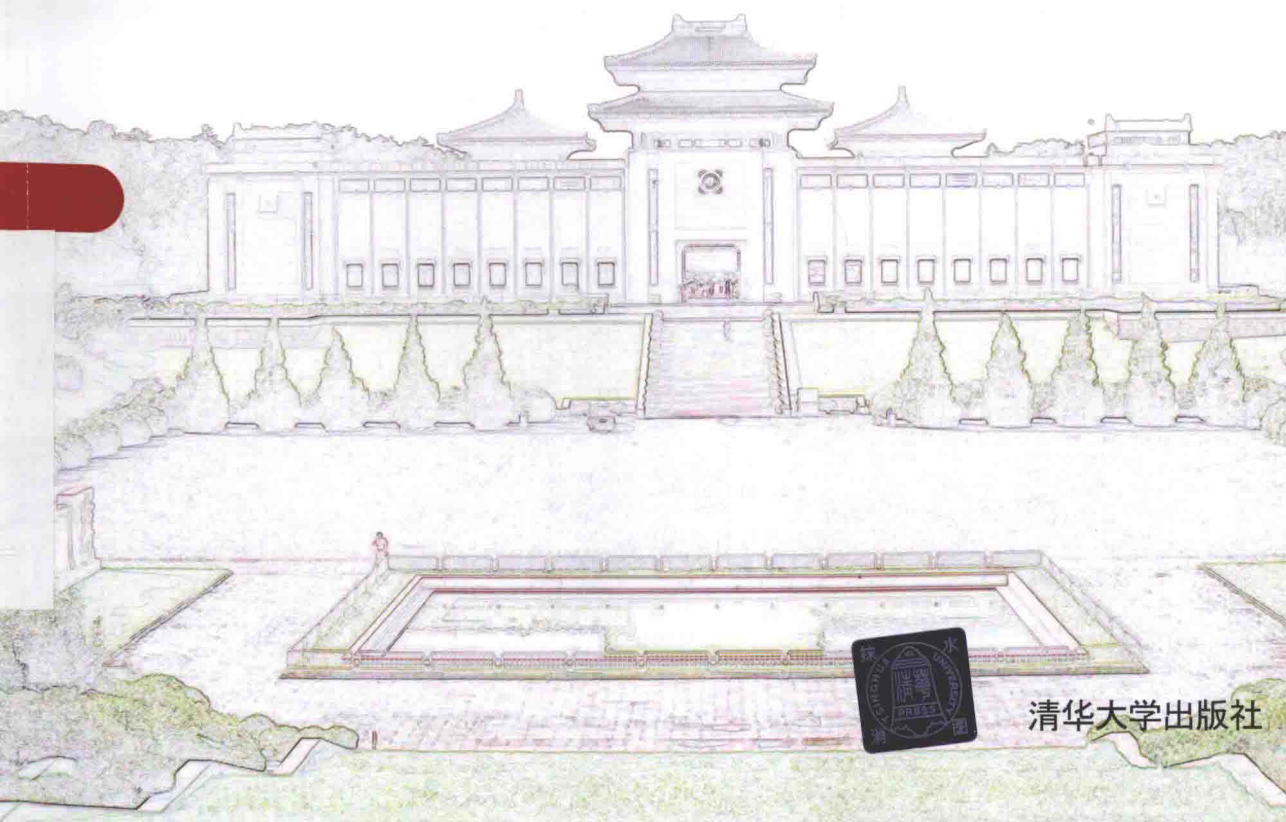


全国普通高校  
电子信息与  
电气学科  
基础规划教材

# 电磁场与电磁波

林继成 主编 赵超先 唐斌 副主编 郭业才 主审



清华大学出版社

全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材

# 电磁场与电磁波

林继成 主编 赵超先 唐斌 副主编

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书系统阐述了电磁场与电磁波的基本理论,主要包括矢量分析、静电场、恒定电场与恒定磁场、静态场边值问题的解析法、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁波辐射等,共9章。编写时,针对电磁场与电磁波理论性强、逻辑严谨、概念抽象的特点,着重讲解电磁现象的基本概念、定性分析过程和定量分析方法,沿着“矢量分析—静态场(静电场、恒定电场、恒定磁场)—时变电磁场—导波系统—电磁波辐射”的知识结构组织教材内容。附录中给出了常用矢量公式、电磁量的符号及单位、国际单位制基本单位和导出单位、国际单位制词头及重要物理常数,以备查用。

本书可作为高等院校电子信息类与电气信息类专业的本科生教材,也可作为相关教学与工程技术人员的参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/林继成主编.--北京:清华大学出版社,2015

全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材

ISBN 978-7-302-39747-2

I. ①电… II. ①林… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁波—高等学校—教材 IV. ①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第071348号

责任编辑:梁颖

封面设计:傅瑞学

责任校对:李建庄

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座

邮 编:100084

社总机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印装者:北京国马印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:17.5

字 数:434千字

版 次:2015年9月第1版

印 次:2015年9月第1次印刷

印 数:1~2000

定 价:34.50元

产品编号:062653-01

# 前言

本书是高等院校工科电子电气信息类专业“电磁场与电磁波”课程的本科教学用书,主要介绍了电磁场与电磁波的基本概念和基本规律。针对电磁场与电磁波理论性强、逻辑严谨、概念抽象的特点,编写时着重阐述电磁现象的基本概念、定性分析过程和定量分析方法,沿着“矢量分析—静态场(静电场、恒定电场、恒定磁场)—时变电磁场—导波系统—电磁波辐射”的知识结构组织教材内容。学生通过该课程的学习,将具备初步分析电子电气信息技术中所涉及的电磁场与电磁波基本特性的能力。在学习过程中,不仅使学生深化对电磁规律的理解,而且有助于培养他们的科学思维方法及创新精神。

本书共分为9章。第1章是矢量分析。矢量分析是理解和掌握电磁场与电磁波理论中的数学推导、方程和公式的关键。掌握好本章的知识对学好电磁场与电磁波具有重要的意义,所以必须打好此基础。第2章介绍了静电场。第3章介绍了恒定电场。第4章介绍了恒定磁场。第5章着重阐述了分离变量法和镜像法求解静态场边值问题的基本解法。第6章介绍了时变电磁场。第7章介绍了平面电磁波的基本概念、基本参数、传播特性以及在两种媒质分界面上的反射与透射,第8章介绍了导行电磁波,包括均匀导波系统中波的传播特性,矩形波导、圆柱波导、谐振腔中的波传播,以及传输线理论。第9章介绍了电磁波的辐射特性。附录中给出了常用矢量公式、电磁量的符号及单位、国际单位制基本单位和导出单位、国际单位制词头及重要物理常数,以备查用。

本书由林继成教授担任主编。参加本书编写工作的有:林继成(南京晓庄学院,第1、2、8章,第4章第4.7节及附录)、赵超先(南京晓庄学院,第6章)、唐斌(西南石油大学,第5章)、张永刚(安徽理工大学,第9章)、张闯(南京信息工程大学,第7章)、蔡庆春(沈阳化工大学,第3章)、陈春霞和马业万(安庆师范学院,第4章的第4.1~4.6节)。最后,由林继成负责全书的统稿工作,由南京信息工程大学郭业才教授担任本书的主审。

本书是清华大学“全国普通高校电子信息与电气学科基础规划教材”之一,“十二五”江苏省高等学校电子信息类重点专业(No. 164)建设项目建设的教材,南京信息工程大学精品课程资源共享课程建设的教材,江苏高校品牌专业建设工程一期项目(PPZY2015B134)。

本书在编写过程中,得到了许多同仁和清华大学出版社的大力支持和帮助,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中的疏漏和欠妥在所难免,恳请读者批评指正。

编者

2015年8月

# 目 录

第 1 章 矢量分析 .....	1
1.1 标量场与矢量场 .....	1
1.1.1 矢量 .....	1
1.1.2 圆柱面坐标系和球面坐标系 .....	5
1.1.3 场的基本概念 .....	9
1.2 矢量场的通量和散度 .....	10
1.2.1 通量 .....	10
1.2.2 散度与散度定理 .....	12
1.2.3 散度在直角坐标系中的表示 .....	13
1.2.4 哈密顿算符 .....	14
1.3 矢量场的环量与旋度 .....	15
1.3.1 环量 .....	15
1.3.2 旋度与斯托克斯定理 .....	15
1.3.3 旋度在直角坐标系中的表示 .....	17
1.4 标量场的方向导数与梯度 .....	20
1.4.1 方向导数 .....	20
1.4.2 梯度 .....	21
1.5 场的性质与亥姆霍兹定理 .....	23
1.5.1 场的若干重要性质 .....	23
1.5.2 亥姆霍兹定理 .....	26
1.6 拉普拉斯算符与格林定理 .....	27
1.6.1 拉普拉斯算符 .....	27
1.6.2 格林定理 .....	27
本章小结 .....	28
习题 .....	30
第 2 章 静电场 .....	33
2.1 电荷与电荷密度 .....	33
2.1.1 体电荷 .....	33
2.1.2 面电荷 .....	33
2.1.3 线电荷 .....	34
2.1.4 点电荷 .....	34
2.2 库仑定律与电场强度 .....	35

2.2.1	库仑定律 .....	35
2.2.2	电场强度 .....	35
2.3	真空中高斯定理 .....	39
2.3.1	立体角 .....	39
2.3.2	高斯定理 .....	40
2.4	电位函数 .....	42
2.4.1	静电场的无旋性 .....	42
2.4.2	电位函数 .....	43
2.4.3	电位函数的泊松方程与拉普拉斯方程 .....	47
2.5	介质中的高斯定理 .....	47
2.5.1	电介质的极化 .....	47
2.5.2	介质中的高斯定理 .....	50
2.5.3	介电常数 .....	51
2.5.4	静电场基本方程 .....	52
2.5.5	介质中电位的泊松方程 .....	52
2.6	静电场的边界条件 .....	53
2.6.1	在两种电介质分界面上的边界条件 .....	53
2.6.2	导体表面附近的场 .....	55
2.7	电容与部分电容 .....	55
2.7.1	电容 .....	55
2.7.2	部分电容 .....	56
2.8	静电能与静电力 .....	58
2.8.1	静电能 .....	58
2.8.2	静电力 .....	59
	本章小结 .....	62
	习题 .....	63
<b>第 3 章</b>	<b>恒定电场 .....</b>	<b>67</b>
3.1	电流与电流密度 .....	67
3.1.1	传导电流与运流电流 .....	67
3.1.2	电流分布模型与电流密度矢量 .....	68
3.1.3	电荷守恒定律 .....	69
3.2	恒定电场基本方程 .....	70
3.2.1	恒定电流场 .....	70
3.2.2	欧姆定律与焦耳定律 .....	71
3.2.3	媒质的电特性 .....	74
3.2.4	恒定电场的边界条件 .....	75
3.3	静电场与恒定电场比较 .....	76

3.4 电导与部分电导 .....	78
3.4.1 电导 .....	78
3.4.2 部分电导 .....	79
本章小结 .....	80
习题 .....	81
<b>第4章 恒定磁场</b> .....	<b>84</b>
4.1 安培力定律与磁感应强度 .....	84
4.1.1 安培力定律 .....	84
4.1.2 磁感应强度 .....	84
4.2 真空中安培环路定律 .....	85
4.2.1 磁通量连续性方程 .....	85
4.2.2 真空中的安培环路定律 .....	86
4.3 矢量磁位 .....	87
4.3.1 矢量磁位的定义 .....	87
4.3.2 矢量磁位的泊松方程与拉普拉斯方程 .....	87
4.4 介质中恒定磁场的基本方程 .....	89
4.4.1 磁介质的分类 .....	90
4.4.2 顺磁质的磁化 .....	90
4.4.3 磁化电流 .....	91
4.4.4 磁介质中恒定磁场的基本方程 .....	91
4.5 恒定磁场的边界条件 .....	92
4.5.1 $\mathbf{B}$ 的法向分量边界条件 .....	92
4.5.2 $\mathbf{H}$ 的切向分量边界条件 .....	93
4.6 标量磁位 .....	94
4.6.1 标量磁位的引入 .....	94
4.6.2 标量磁位的泊松方程 .....	94
4.6.3 标量磁位的边界条件 .....	95
4.7 电感 .....	96
4.7.1 自感 .....	96
4.7.2 互感 .....	98
4.7.3 诺依曼公式 .....	98
4.8 磁场能量与磁场力 .....	100
4.8.1 恒定磁场中的能量 .....	100
4.8.2 磁场能量体密度 .....	101
4.8.3 磁场力 .....	103
本章小结 .....	104
习题 .....	106

<b>第 5 章 静态场边值问题的解法</b> .....	110
5.1 边值问题与唯一性定理 .....	110
5.1.1 边值问题 .....	110
5.1.2 唯一性定理 .....	111
5.2 分离变量法 .....	112
5.2.1 直角坐标系中的分离变量法 .....	112
5.2.2 圆柱坐标系中的分离变量法 .....	115
5.2.3 球面坐标系中的分离变量法 .....	118
5.3 镜像法 .....	120
5.3.1 平面镜像法 .....	120
5.3.2 圆柱面镜像法 .....	123
5.3.3 球面镜像法 .....	126
本章小结 .....	127
习题 .....	127
<b>第 6 章 时变电磁场</b> .....	130
6.1 法拉第电磁感应定律 .....	130
6.2 位移电流 .....	133
6.3 麦克斯韦方程组 .....	135
6.3.1 麦克斯韦方程组简介 .....	136
6.3.2 麦克斯韦方程组的辅助方程——本构关系 .....	137
6.4 无源理想介质中的波动方程 .....	137
6.5 时变电磁场的边界条件 .....	138
6.5.1 法向分量的边界条件 .....	139
6.5.2 切向分量的边界条件 .....	139
6.5.3 两种特殊的边界条件 .....	140
6.6 时变电磁场的能量守恒定律与坡印廷矢量 .....	141
6.7 动态位函数与达朗伯方程 .....	143
6.7.1 动态矢量位与动态标量位 .....	144
6.7.2 达朗伯方程 .....	144
6.7.3 达朗伯方程的解与滞后位 .....	146
6.8 时谐电磁场 .....	147
6.8.1 时谐场及场量的复数表示 .....	147
6.8.2 麦克斯韦方程组的复数形式 .....	148
6.8.3 波动方程的复数形式 .....	149
6.8.4 平均坡印廷矢量 .....	151



本章小结 .....	153
习题 .....	155
<b>第 7 章 平面电磁波</b> .....	<b>158</b>
7.1 理想介质中的均匀平面波 .....	158
7.1.1 亥姆霍兹方程的解 .....	158
7.1.2 均匀平面波的传播特性 .....	159
7.2 电磁波的极化 .....	164
7.3 导电媒质中的均匀平面波 .....	167
7.4 均匀平面波对平面分界面的垂直入射 .....	171
7.4.1 对理想介质分界面的垂直入射 .....	173
7.4.2 对理想导体的垂直入射 .....	176
7.4.3 对多层理想介质分界面的垂直入射 .....	178
7.5 均匀平面波对平面分界面的斜入射 .....	181
7.5.1 对理想介质分界面的斜入射 .....	182
7.5.2 对理想导体平面的斜入射 .....	187
本章小结 .....	188
习题 .....	191
<b>第 8 章 导行电磁波</b> .....	<b>194</b>
8.1 均匀导波系统中波传播的一般特性 .....	195
8.1.1 横向场分量和纵向场分量之间的关系 .....	195
8.1.2 均匀导波系统中波传播特性 .....	196
8.1.3 TEM 波的一般特性 .....	197
8.2 矩形波导 .....	198
8.2.1 矩形波导中电磁波的通解 .....	198
8.2.2 矩形波导中波的模式 .....	200
8.2.3 矩形波导中的 $TE_{10}$ 模 .....	201
8.3 圆波导 .....	205
8.3.1 圆波导中的场量表达式 .....	205
8.3.2 圆波导中波的截止波长分布图 .....	208
8.3.3 圆波导中常用的 3 种模式 .....	209
8.4 波导中的功率容量和损耗 .....	211
8.4.1 波导中的功率容量 .....	211
8.4.2 波导中的功率损耗 .....	211
8.5 谐振腔 .....	212

8.5.1	微波谐振器的演化过程 .....	212
8.5.2	矩形波导谐振腔 .....	213
8.6	传输线 .....	216
8.6.1	基本概念 .....	216
8.6.2	传输线方程及其解 .....	217
8.6.3	均匀传输线的特性参数 .....	220
8.6.4	均匀无耗长线终端接不同负载时的工作状态 .....	225
	本章小结 .....	233
	习题 .....	236
<b>第9章</b>	<b>电磁波辐射</b> .....	<b>239</b>
9.1	电偶极子的辐射 .....	239
9.1.1	电偶极子的近区场 .....	240
9.1.2	电偶极子的远区场 .....	240
9.2	天线的电参数 .....	243
9.2.1	方向函数和方向图 .....	243
9.2.2	方向性系数 .....	244
9.2.3	天线效率 .....	245
9.2.4	增益系数 .....	246
9.2.5	输入阻抗 .....	246
9.2.6	有效长度 .....	246
9.2.7	极化 .....	247
9.2.8	频带宽度 .....	247
9.3	电磁对偶性 .....	247
9.4	磁偶极子与开槽天线的辐射 .....	249
9.4.1	磁偶极子 .....	249
9.4.2	开槽天线 .....	251
9.5	对称振子天线 .....	252
9.5.1	对称天线上的电流分布 .....	252
9.5.2	对称振子天线的辐射 .....	253
9.5.3	半波对称振子 .....	254
9.6	天线阵列 .....	254
9.6.1	方向图乘积原理 .....	255
9.6.2	均匀直线阵 .....	256
	本章小结 .....	257
	习题 .....	258

附录 A 常用矢量公式 .....	260
附录 B 电磁量的符号及单位 .....	262
附录 C 国际单位制基本单位和导出单位 .....	263
附录 D 国际单位制词头 .....	264
附录 E 重要物理常数 .....	265
参考文献 .....	266

# 第1章 矢量分析

矢量分析是研究电磁场和电磁波问题最基本的也是最重要的数学工具。本章在对矢量的概念及其运算进行简要介绍的基础上,对矢量场及其性质进行较详细的描述。

## 1.1 标量场与矢量场

### 1.1.1 矢量

在一定的单位制下,用一个实数就足以表示的物理量是标量,如时间、质量、温度等。在这里,实数表示的是这些物理量的大小。和标量不同,矢量是除了要指明其大小还要指明其方向的物理量<sup>①</sup>,如速度、力、电场强度等。

#### 1. 矢量的表示及其基本性质

矢量可以用一条带箭头的线段表示,如图 1.1 所示。线段的长度表示矢量的大小,称为矢量的模;箭头所指的方向代表矢量的方向。起点为  $A$  终点为  $B$  的矢量,通常记为  $\overrightarrow{AB}$ 。也可以用上方带箭头的字母表示矢量,例如  $\vec{v}$ 、 $\vec{a}$ 、 $\vec{F}$  等。在印刷时,矢量多用黑斜体字母表示,例如  $\boldsymbol{v}$ 、 $\boldsymbol{a}$ 、 $\boldsymbol{F}$ 。矢量  $\overrightarrow{AB}$  的模,记为  $|\overrightarrow{AB}|$ ; 矢量  $\vec{F}$ 、 $\boldsymbol{F}$  的模,记为  $|\vec{F}|$ 、 $|\boldsymbol{F}|$ ,也可用不加粗也不带上箭头的字母  $F$  表示。

在数学上,不考虑矢量的起点位置,把模相等且方向相同的矢量视为相等矢量。这意味着矢量可以在空间任意的平行移动。因此,这类矢量也称为自由矢量。

模为 1 的矢量称为单位矢量。与矢量  $\boldsymbol{A}$  同向的单位矢量可记为  $\boldsymbol{e}_A$ ,则  $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_A$ 。

模为 0 的矢量称为零矢量,记为  $\mathbf{0}$ 。零矢量的起点和终点是重合的,因此零矢量的方向是任意的。

模相等而方向相反的两个矢量  $\boldsymbol{A}$  和  $\boldsymbol{B}$ ,称互为负矢量,记为  $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B}$  或  $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$ 。

矢量  $\boldsymbol{A}$  与矢量  $\boldsymbol{B}$  的和定义为,将  $\boldsymbol{B}$  平移至其起点与  $\boldsymbol{A}$  的终点重合的位置,再由  $\boldsymbol{A}$  的起点向  $\boldsymbol{B}$  的终点所作的矢量,如图 1.2 所示,记为  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 。矢量  $\boldsymbol{A}$  与矢量  $\boldsymbol{B}$  的差记为  $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ ,并规定  $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$ 。矢量加减法满足交换律  $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$  和结合律  $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ ,如图 1.3 所示。

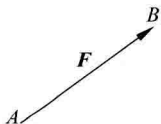


图 1.1 矢量的表示

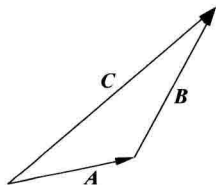


图 1.2 矢量的加法

<sup>①</sup> 矢量的严格定义是建立在坐标系的旋转变换基础上的,关于这方面的内容已超出了本书的讨论范围,所以不予介绍。

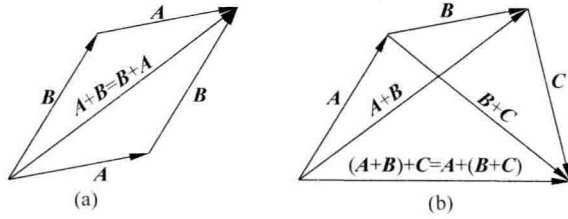


图 1.3 向量加法的性质

实数  $k$  与向量  $\mathbf{A}$  的乘积是一个向量, 记为  $k\mathbf{A}$ 。该矢量的模为  $|k||\mathbf{A}|$ , 其方向由实数  $k$  的正负决定: 当  $k > 0$  时, 与  $\mathbf{A}$  方向一致; 当  $k < 0$  时, 与  $\mathbf{A}$  方向相反。

向量  $\mathbf{A}$  与向量  $\mathbf{B}$  的点乘(也称数量积)定义为, 两矢量的模及其夹角  $\alpha$  的余弦的乘积, 记为  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ , 即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\alpha \quad (1.1.1)$$

向量  $\mathbf{A}$  与向量  $\mathbf{B}$  叉乘(也称矢量积)的结果  $\mathbf{C}$  是一个向量, 记为  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ 。该矢量的模为两矢量的模及其夹角  $\alpha$  的正弦的乘积, 即

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\alpha \quad (1.1.2)$$

而  $\mathbf{C}$  的方向与  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  所确定的平面垂直且  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  构成右手螺旋关系, 如图 1.4 所示。注意到矢量的叉乘不满足交换律, 且有  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$ 。

## 2. 向量的直角坐标表示

在直角坐标系中, 与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴同方向的单位矢量称为基本单位矢量, 简称基矢, 记为  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , 如图 1.5 所示。3 个基本单位矢量满足如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0 \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

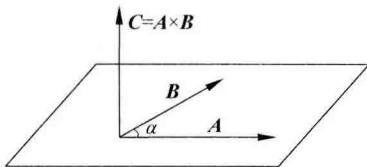


图 1.4 向量的叉乘

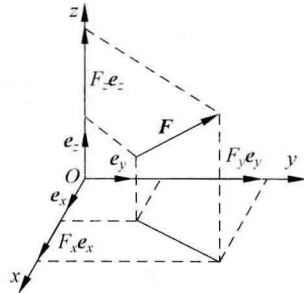


图 1.5 直角坐标系

设空间中任意向量  $\mathbf{F}$ , 在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴的投影分别为  $F_x, F_y$  和  $F_z$ , 则依据数与向量的乘法以及向量的加法法则, 可将向量  $\mathbf{F}$  表示为

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z \quad (1.1.4)$$

这里,  $F_x, F_y, F_z$  称为向量  $\mathbf{F}$  的直角坐标分量。向量  $\mathbf{F}$  的模为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (1.1.5)$$

设  $\alpha, \beta, \gamma$  分别为  $\mathbf{F}$  与  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴正向的夹角, 称它们为  $\mathbf{F}$  的方向角, 它们的余弦称为  $\mathbf{F}$  的方向余弦。由式(1.1.4)和式(1.1.1), 得

$$F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_x = F \cos \alpha, \quad F_y = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_y = F \cos \beta, \quad F_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z = F \cos \gamma$$

则 3 个方向余弦表示为

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \quad (1.1.6)$$

从坐标原点向空间任意一点所作的矢量称为矢径, 记为  $\mathbf{r}$ 。在直角坐标系中, 点  $(x, y, z)$  对应的矢径表示为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.1.7)$$

由于矢径  $\mathbf{r}$  与空间点的坐标  $(x, y, z)$  具有一一对应的关系, 作为空间位置函数的物理量  $f(x, y, z)$  亦可简记为  $f(\mathbf{r})$ 。

设有  $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z, \mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z$ , 则矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的点乘表示为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.1.8)$$

矢量  $\mathbf{A}$  叉乘矢量  $\mathbf{B}$  表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{e}_z (A_x B_y - A_y B_x) \quad (1.1.9)$$

或写成行列式形式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1.10)$$

3 个矢量相乘称为矢量三重积, 其中  $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  称为三重标积,  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$  称为三重矢积。前者的结果是一个标量, 后者的结果是一个矢量。矢量三重积具有如下运算性质

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1.1.12)$$

**【例 1.1】** 式(1.1.11)和式(1.1.12)的证明。

证: 设  $\mathbf{A} = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z, \mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z, \mathbf{C} = C_x\mathbf{e}_x + C_y\mathbf{e}_y + C_z\mathbf{e}_z$ , 则

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x \cdot \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y \cdot \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z \cdot \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

由行列式的性质, 得

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

即

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

式(1.1.11)得证。

令

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y + E_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{E}$$

其中

$$E_x = \begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix}, \quad E_y = \begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix}, \quad E_z = \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ E_y & E_z \end{vmatrix} + \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ E_z & E_x \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ E_x & E_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ E_y & E_z \end{vmatrix} \mathbf{e}_x + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ E_z & E_x \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ E_x & E_y \end{vmatrix} \mathbf{e}_z \\ &= A_y \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix} - A_z \begin{vmatrix} B_z & B_x \\ C_z & C_x \end{vmatrix} \\ &= A_y B_x C_y - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x + A_z B_x C_z \\ &= B_x (A_y C_y + A_z C_z) - C_x (A_y B_y + A_z B_z) \end{aligned}$$

即

$$\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ E_y & E_z \end{vmatrix} = B_x (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_x (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

类似地,有

$$\begin{vmatrix} A_z & A_x \\ E_z & E_x \end{vmatrix} = B_y (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_y (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}), \quad \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ E_x & E_y \end{vmatrix} = B_z (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - C_z (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$$

故

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

式(1.1.12)得证。

### 3. 矢量函数及其微积分

对于某实数区间上的每个值  $t$ , 有一个确定的矢量  $\mathbf{F}$  与之对应, 则称  $\mathbf{F}$  为  $t$  的矢量函数, 记为  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ 。在直角坐标系中  $\mathbf{F}(t)$  表示为

$$\mathbf{F}(t) = F_x(t)\mathbf{e}_x + F_y(t)\mathbf{e}_y + F_z(t)\mathbf{e}_z \quad (1.1.13)$$

(1) 矢量函数的导数与微分

矢量函数  $\mathbf{F}(t)$  的导数定义为

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(t + \Delta t) - \mathbf{F}(t)}{\Delta t} \quad (1.1.14)$$

将式(1.1.13)代入式(1.1.14), 由于3个基矢是与  $t$  无关的常矢量, 有

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_x(t + \Delta t) - F_x(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_y(t + \Delta t) - F_y(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F_z(t + \Delta t) - F_z(t)}{\Delta t} \mathbf{e}_z$$

即在直角坐标系中  $\mathbf{F}(t)$  的导数表示为

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{dF_x}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dF_y}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dF_z}{dt} \mathbf{e}_z \quad (1.1.15)$$

其微分表示为

$$d\mathbf{F} = dF_x \mathbf{e}_x + dF_y \mathbf{e}_y + dF_z \mathbf{e}_z \quad (1.1.16)$$

矢径的微分表示为

$$d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z \quad (1.1.17)$$

矢量函数的微分具有如下性质

$$d(\mathbf{F} \pm \mathbf{G}) = d\mathbf{F} \pm d\mathbf{G} \quad (1.1.18)$$

$$d(k\mathbf{F}) = k d\mathbf{F} \quad (k \text{ 为常数}) \quad (1.1.19)$$

$$d(f\mathbf{F}) = df\mathbf{F} + f d\mathbf{F} \quad (f \text{ 为标量函数}) \quad (1.1.20)$$

$$d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{G} \quad (1.1.21)$$

$$d(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = d\mathbf{F} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times d\mathbf{G} \quad (1.1.22)$$

(2) 矢量函数的积分

矢量函数  $\mathbf{F}(t)$  的不定积分  $\int \mathbf{F}(t) dt$  和定积分  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$  仍是一个矢量, 将式(1.1.13)代入可得在直角坐标系中表示

$$\int \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{e}_x \int F_x(t) dt + \mathbf{e}_y \int F_y(t) dt + \mathbf{e}_z \int F_z(t) dt \quad (1.1.23)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt = \mathbf{e}_x \int_{t_1}^{t_2} F_x(t) dt + \mathbf{e}_y \int_{t_1}^{t_2} F_y(t) dt + \mathbf{e}_z \int_{t_1}^{t_2} F_z(t) dt \quad (1.1.24)$$

## 1.1.2 圆柱面坐标系和球面坐标系

在研究标量场和矢量场的性质时, 为了适应具体物理问题的边界, 有时也从对称性考虑, 会选用一些便于求解的正交曲线坐标系。除了我们非常熟悉的直角坐标系外, 圆柱面坐标系和球面坐标系也是我们经常选用的坐标系。

在建立坐标系时, 首先要在参考系上选择一个点并称为原点, 记作  $O$ 。直角坐标系用三组两两正交的平面确定空间点的位置, 其中交点与原点重合的 3 个平面称为坐标平面。3 个坐标平面两两的交线在指定正方向后成为 3 个坐标轴, 记作  $Ox$ 、 $Oy$  和  $Oz$ 。3 个坐标平面分别记作  $xOy$ 、 $xOz$ 、 $yOz$ 。于是, 空间任意一点  $M$  的位置可以由分别与  $xOy$ 、 $xOz$ 、 $yOz$  平行的 3 个平面的位置确定。例如, 3 个平面  $x = x_1$ 、 $y = y_1$ 、 $z = z_1$  的交点表示为  $(x_1, y_1, z_1)$ , 称作  $M$  点的坐标。在其他正交曲线坐标系中, 仍然是用 3 个彼此正交的面的交点来确定空间点的位置。区别在于 3 个面通常是曲面而不是或不全是平面, 曲面两两相交的交线都称作坐标曲线。显然, 过空间每一点都有 3 条彼此正交的坐标曲线。为了便于描述, 通常仍需要以直角坐标系作为参照。

### 1. 圆柱面坐标系

圆柱面坐标系如图 1.6 所示, 3 个彼此正交的曲面是:

- (1) 轴线过原点的圆柱面, 令轴线与  $z$  轴重合, 半径  $\rho$  确定了圆柱面位置。
- (2) 以圆柱面轴线为边缘的半平面, 取向由与  $xOz$  的夹角  $\phi$  确定。
- (3) 垂直圆柱面轴线的平面, 位置由该平面的  $z$  坐标确定。

圆柱面  $\rho = \rho_1$  和半平面  $\phi = \phi_1$  以及平面  $z = z_1$  的交点确定的空间点  $M$  的位置记作  $(\rho_1, \phi_1, z_1)$ 。换句话说,  $\rho, \phi, z$  是圆柱面坐标系的坐标变量。它们的取值范围为

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty$$

过任意一点  $M(\rho_1, \phi_1, z_1)$  的 3 条坐标曲线是: 半径为  $\rho_1$  的圆, 与  $z$  轴平行的直线, 从



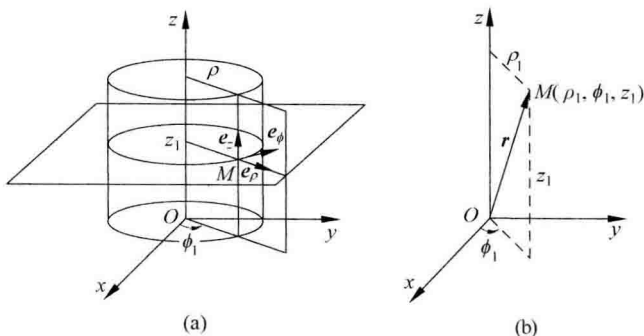


图 1.6 圆柱面坐标系

$z$  轴上一点发出的射线。过不同点的坐标曲线是不同的,因此在每一点处的基本单位矢量一般也是不同的。在圆柱面坐标系中,过任意点 3 个基本单位矢量记为  $e_\rho, e_\phi, e_z$ 。其中,  $e_\rho$  沿柱面半径向外,  $e_z$  沿  $z$  轴正向,  $e_\phi$  与  $e_\rho$  和  $e_z$  垂直(沿切线)且指向  $\phi$  增大的方向。  $e_\rho, e_\phi, e_z$  彼此垂直且满足右手螺旋关系,即满足

$$e_\rho \times e_\phi = e_z, \quad e_\phi \times e_z = e_\rho, \quad e_z \times e_\rho = e_\phi \quad (1.1.25)$$

这组基本单位矢量与直角坐标系基本单位矢量之间满足下面的关系

$$e_\rho = \cos\phi e_x + \sin\phi e_y, \quad e_\phi = -\sin\phi e_x + \cos\phi e_y, \quad e_z = e_z \quad (1.1.26)$$

直角坐标变量与圆柱面坐标变量之间存在如下关系

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z = z \quad (1.1.27)$$

在圆柱面坐标系中,矢径表示为

$$\mathbf{r} = \rho e_\rho + z e_z \quad (1.1.28)$$

矢径的微分

$$d\mathbf{r} = d\rho e_\rho + \rho de_\rho + dz e_z + z de_z$$

而

$$\begin{aligned} de_z &= \mathbf{0} \\ de_\rho &= -\sin\phi d\phi e_x + \cos\phi d\phi e_y = d\phi e_\phi \\ de_\phi &= -\cos\phi d\phi e_x - \sin\phi d\phi e_y = -d\phi e_\rho \end{aligned} \quad (1.1.29)$$

所以

$$d\mathbf{r} = d\rho e_\rho + \rho d\phi e_\phi + dz e_z \quad (1.1.30)$$

起点在  $\mathbf{r}$  点的任意矢量  $\mathbf{F}$ , 在圆柱面坐标系中表示为

$$\mathbf{F} = F_\rho e_\rho + F_\phi e_\phi + F_z e_z \quad (1.1.31)$$

式中,  $e_\rho, e_\phi, e_z$  是  $\mathbf{r}$  点(起点)处的基矢;  $F_\rho, F_\phi, F_z$  是  $\mathbf{F}$  在  $e_\rho, e_\phi, e_z$  方向上的投影。

在圆柱面坐标系中,柱面上的面积元以及体积元表示为(参见图 1.7)

$$dS = \rho d\phi dz, \quad d\tau = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.1.32)$$

## 2. 球面坐标系

球面坐标系中,用中心在坐标原点的球面和顶点在坐标

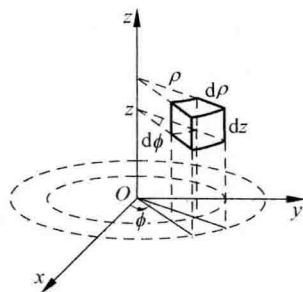


图 1.7 圆柱面坐标系中的体积元