



文登教育
Wendeng Education



2016

文登教育集团课堂用书

(数学三)

考研数学 复习指南

网络增值版

增值服务网址 www.wendengonline.com

陈文灯 黄先开 主 编

本书使用说明:

- ◆ 提供的所有网络增值服务 **全部免费**。
- ◆ 答疑论坛说明及 **免费课件** 介绍请扫描封底二维码。
- ◆ 书后附录全套 **课后题详解**，答疑论坛 **新增** 重点习题 **视频讲解**。
- ◆ 总结 **37个思维定势**，灵活掌握，对提升快速解题能力至关重要！

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



文登教育

Wendeng Education

2016

文登教育集团课堂用书

(数学三)

考研数学 复习指南

网络增值版

陈文灯 黄先开 主 编

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指南. 数学三 / 陈文灯, 黄先开主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2014. 9

ISBN 978-7-5640-9773-8

I. ①考… II. ①陈… ②黄… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 218249 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)

82562903(教材售后服务热线)

68948351(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京文良精锐印刷有限责任公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 42

字 数 / 1000 千字

版 次 / 2014 年 10 月第 1 版 2014 年 10 月第 1 次印刷

定 价 / 56.80 元

责任编辑/ 高 芳

文案编辑/ 胡 莹

责任校对/ 周瑞红

责任印制/ 边心超

前言

本书从 1995 年出版以来,历经二十年的再版和修订,集合了编者几十载的教学经验、对考研命题的钻研把握以及众多考研学子的复习心得、实战体会,已成为广大考研读者的良师诤友,同时也因其重点突出的内容总结和典型题目的汇编,成为众多教师同行的教学参考。在过去的十几年中,本书帮助许许多多考研学子圆了梦想,帮助使用过本书的学子们应用“数学的思维”方法在学习、工作和研究中取得了丰硕的成果。

为了帮助同学们提高使用本书的效率、解答复习中遇到的各种问题,编者和一些数学同仁专门开设了“复习指南答疑论坛(www.wendengonline.com/bbs)”,以更好地和同学们交流互动。从您购书开始一直到考试,文登名师将一直伴随着您!许多考研学子在论坛中分享了他们在使用本书的过程中得到的帮助和受到的启发。针对这些宝贵的反馈信息,我们曾数次认真商讨、仔细揣摩,对本书再次做了修订,希望能更好地满足同学们复习备考的要求。我们也借此机会向这些考研学子们一并表示衷心的感谢。

此外,在文登教育平台的基础上,我们随书赠送了全套的文登网校基础班视频课,建议考生在观看视频的同时与本人编写的《考研数学基础核心讲义》配套使用。打好坚实的基础将是考试成功的一半。在这个基础上再看指南,效果将事半功倍!

此次再版,我们做了以下修订。

(1)“变繁为简,变难为易”。将常考的、考生感到棘手的内容进行归纳总结,使考生得到既“玄妙”又特别有效的解题方法和技巧,并给出了详细的分析,使同学们了解这些方法的由来,让“玄妙”变得顺理成章。例如,连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明,尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的做法,经过我们的分析,原题将变得非常“初等”,非常简单,只要仿效,即可自行解答。

(2)例题上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应考试很有用,根据题型特点,能很快找到解题突破口。综合题解析可帮助同学们将各知识点“珠联璧合”,以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)修订错误。我们仔细校对、核实了全书内容,修订了错误。通过我们的努力和许多同学的帮助,再版力求尽量做到完美。为了精益求精,恳请朋友们拨冗指正。

最后回答考生们的问题:“如何有效地利用您的书提高复习效果?”“考好数学,书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看,对基础部分要多下点功夫,做到概念、定理能用自己的语言叙述,习题应全部都做。高数的基础:极限、导数与微分、不定积分;线性代数的基础:矩阵的初等变换、含有参数的线性方程组解的讨论、方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率、古典概型、条件概率与乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式、贝努里概型、随机变量及其分布(特别是二维连续型)、随机变量的数字特征[期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{cov}(X, Y)$ 、相关系数 ρ_{XY}]。如果是自学,应先仔仔细细地把本书看一遍,然后再详细看二三遍,对重点知识点着重理解、揣摩;如果是参加强化班,最好应该与上课“同步”进行,课后再看一遍即可。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。

陈灯

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续 1

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 1

一、函数的基本性质 1

二、分段函数 5

三、反函数 5

四、复合函数 6

五、初等函数 9

六、函数的极限及其连续性 9

七、重要公式和定理 12

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 19

题型一 未定式的定值法 19

题型二 类未定式的计算 23

题型三 数列的极限 24

题型四 极限式中常数的确定(重点) 29

题型五 函数连续或间断点的判定 32

第 3 节 思维定势及综合题解析 34

一、思维定势 34

二、综合题解析 38

习题一 39

第二章 导数与微分 43

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 43

一、导数与微分的定义 43

二、重要定理 45

三、导数与微分的运算法则 45

四、基本公式 45

五、高阶导数的定义与基本公式 46

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 46

题型一 求复合函数的导数或微分 46

题型二 求隐函数的导数或微分 48

题型三 求幂指函数的导数或微分 48

题型四 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 49

题型五 求分段函数的导数或微分 49

题型六 求高阶导数 51

第 3 节 思维定势及综合题解析 54

一、思维定势 54

二、综合题解析 54

习题二 56

第三章 不定积分 60

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 60

一、不定积分的基本概念 60

二、基本性质 60

三、基本公式 61

四、基本积分法 62

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 75

题型一 有理函数的不定积分 75

题型二 简单无理函数的不定积分 76

题型三 三角有理式的不定积分 77

题型四 含有反三角函数的不定积分 81

题型五 抽象函数的不定积分 81

题型六 分段函数的不定积分	82
第 3 节 思维定势及综合题解析	83
一、思维定势	83
二、综合题解析	84
习题三	86
第四章 定积分及反常积分	90
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	90
一、基本性质	90
二、定理和公式	93
三、定积分的计算法	96
四、反常积分的基本概念	100
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	101
题型一 分段函数的定积分	101
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	103
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	104
题型四 对称区间上的定积分	106
题型五 被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的定积分	107
题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	108
题型七 已知一定积分,求另一一定积分	109
题型八 定积分等式的证明	110
题型九 定积分不等式的证明	118
题型十 计算反常积分	123
题型十一 反常积分的判敛	124
第 3 节 思维定势及综合题解析	125
一、思维定势	125
二、综合题解析	126
习题四	127
第五章 微分中值定理	131
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	131

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	132
题型一 闭区间上连续函数命题的证明	132
题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	135
题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	136
题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	137
题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	138
题型六 欲证结论:在 (a, b) , 内至少存在 $\xi, \eta (\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	141
第 3 节 思维定势及综合题解析	142
一、思维定势	142
二、综合题解析	144
习题五	146
第六章 常微分方程和差分方程	148
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	148
一、基本概念	148
二、二阶线性微分方程解的结构	148
三、二阶常系数线性微分方程	150
四、 n 阶常系数线性微分方程	150
五、差分方程	153
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	153
题型一 一阶微分方程的计算	153
题型二 计算二阶线性微分方程	161
题型三 计算一阶线性差分方程	164
题型四 微分方程的应用	166
第 3 节 思维定势及综合题解析	167
一、思维定势	167
二、综合题解析	168

习题六	169
第七章 一元微积分的应用	172
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	172
一、函数的单调增减性定理	172
二、函数的极值与最值	173
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点	174
四、微元法及其应用	176
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	177
题型一 求函数的极值	177
题型二 求函数的最值	178
题型三 关于方程根的讨论	179
题型四 函数渐近线的求解	184
题型五 函数作图	184
题型六 求平面图形的面积	185
题型七 求旋转体的体积	187
第 3 节 思维定势与综合题解析	188
一、思维定势	188
二、综合题解析	190
习题七	192
第八章 无穷级数	195
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	195
一、无穷级数的基本概念和性质	195
二、数项级数判敛法	196
三、函数项级数的概念	201
四、幂级数的概念和性质	201
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	203
题型一 正项级数的判敛	203
题型二 任意项级数的判敛	205
题型三 级数的证明或判敛	207
题型四 计算函数项级数收敛域	209
题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径	210
题型六 函数在某点的幂级数展开	

.....	212
题型七 幂级数求和	214
题型八 数项级数求和	218
第 3 节 思维定势及综合题解析	221
一、思维定势	221
二、综合题解析	222
习题八	223
第九章 多元函数微分学	227
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	227
一、二元函数的定义	227
二、二元函数的极限及连续性	228
三、偏导数、全导数及全微分	229
四、基本定理	230
五、多元函数的极值	232
六、条件极值与无条件极值	233
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	233
题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法	233
题型二 复合函数微分法	234
题型三 隐函数微分法	237
题型四 求无条件极值	240
题型五 求条件极值	241
题型六 求最值	242
第 3 节 思维定势及综合题解析	243
一、思维定势	243
二、综合题解析	243
习题九	244
第十章 二重积分	247
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	247
一、基本概念	247
二、性质	247
三、二重积分的解题技巧	249
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	251
题型一 更换二重积分的积分次序	

.....	251
题型二 选择二重积分的积分次序	253
.....	253
题型三 二重积分坐标系的选择	255
题型四 分段函数的二重积分的计算	257
.....	257
题型五 无界区域上简单二重积分的计算	260
.....	260
题型六 二重积分等式的证明	261
题型七 二重积分不等式的证明	262
第3节 思维定势及综合题解析	264
一、思维定势	264
二、综合题解析	265
习题十	266
第十一章 函数方程与不等式证明	269
第1节 函数方程	269
一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程	269
二、利用极限求解函数方程	270
三、利用导数的定义求解方程	271
四、利用变限积分的可导性求解方程	271
.....	271
五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解	272
第2节 不等式的证明	273
一、引入参数法	273
二、利用微分中值定理	274
三、利用函数的单调增减性(重点)	276
四、利用函数的极值与最值	278
五、利用函数图形的凹凸性	279
六、利用泰勒展开式	280
七、杂例	281
习题十一	282
第十二章 微积分在经济中的应用	285
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	285
.....	285
第2节 重要题型的解题方法和技巧	286
.....	286

题型一 一元微积分在经济中的应用	286
.....	286
题型二 二元微分学在经济中的应用	291
.....	291
习题十二	292

第二篇 线性代数

第一章 行列式	293
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	293
.....	293
一、排列与逆序	293
二、 n 阶行列式的定义	294
三、行列式的基本性质	295
四、行列式按行(列)展开定理	298
五、重要公式与结论	299
第2节 重要题型的解题方法和技巧	300
.....	300
题型一 抽象行列式的计算	300
题型二 低阶行列式的计算	301
题型三 n 阶行列式的计算	302
第3节 思维定势与综合题解析	308
一、思维定势	308
二、综合题解析	308
习题一	310
第二章 矩阵	313
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	313
.....	313
一、矩阵的概念	313
二、矩阵的运算	313
三、逆矩阵的概念	316
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	316
五、矩阵的初等变换与求逆	317
六、分块矩阵及其求逆	318
七、矩阵的秩及其求法	319
第2节 重要题型的解题方法和技巧	319
.....	319
题型一 求逆矩阵	319
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	321

题型三 有关初等矩阵的命题	323	第3节 思维定势与综合题解析	362
题型四 解矩阵方程	324	一、思维定势	362
题型五 求矩阵的秩	326	二、综合题解析	363
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证 明	327	习题三	364
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	327	第四章 线性方程组	368
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题 的证明	328	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	368
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	329	一、克莱姆法则	368
第3节 思维定势与综合题解析	331	二、线性方程组的基本概念	368
一、思维定势	331	三、线性方程组解的判定	369
二、综合题解析	333	四、非齐次线性方程组与其导出组的解的 关系	370
习题二	333	五、线性方程组解的性质	370
第三章 向量	339	六、线性方程组解的结构	370
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	339	第2节 重要题型的解题方法和技巧	371
一、向量的概念与运算	339	题型一 基本概念题(解的判定、性质、结 构)	371
二、向量间的线性关系	339	题型二 含有参数的线性方程组解的讨论	375
三、向量组的秩和矩阵的秩	340	题型三 讨论两个方程组的公共解 ...	379
四、向量的内积与施密特正交化方法 ...	341	题型四 有关基础解系的证明	381
五、重要定理与公式	342	第3节 思维定势与综合题解析	382
六、小结	343	一、思维定势	382
第2节 重要题型的解题方法和技巧	343	二、综合题解析	383
题型一 讨论向量组的线性相关性	343	习题四	387
题型二 有关向量组线性相关性命题的证 明	347	第五章 特征值和特征向量	392
题型三 判定一个向量是否可由一组向量 线性表示	353	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	392
题型四 有关向量组线性表示命题的证明	355	一、矩阵的特征值和特征向量的概念	392
题型五 求向量组的极大线性无关组	356	二、相似矩阵及其性质	392
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算与证 明	357	三、矩阵可相似对角化的充要条件 ...	393
题型七 与向量空间有关的命题	361	四、实对称矩阵及其性质	393
		五、重要公式与结论	393
		第2节 重要题型的解题方法和技巧	394
		题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	

.....	394
题型二 求抽象矩阵的特征值与特征向量	396
.....	397
题型三 特征值与特征向量的逆问题	397
.....	398
题型四 相似的判定及其逆问题	400
题型五 判断矩阵 A 是否可对角化	403
题型六 有关特征值与特征向量的证明题	403
.....	405
第 3 节 思维定势与综合题解析	405
一、思维定势	405
二、综合题解析	410
习题五	414
第六章 二次型	414
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	414
.....	414
一、二次型及其矩阵表示	414
二、化二次型为标准型	415
三、配方法和正交变换法	416
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	416
.....	419
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	419
.....	419
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	420
.....	424
题型二 化二次型为标准形	425
题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	427
题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	427
.....	428
第 3 节 思维定势与综合题解析	429
一、思维定势	429
二、综合题解析	429
习题六	429

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	431
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	

.....	431
一、随机试验和随机事件	432
二、事件的关系及其运算	434
三、事件的概率及其性质	435
四、条件概率与事件的独立性	436
五、重要概型	436
六、重要公式	437
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	437
.....	437
题型一 古典概型与几何概型	441
题型二 事件的关系和概率性质的命题	442
.....	442
题型三 条件概率与积事件概率的计算	443
.....	446
题型四 全概率公式与 Bayes 公式的命题	447
.....	449
题型五 有关 Bernoulli 概型的命题	449
.....	449
第 3 节 思维定势与综合题解析	453
一、思维定势	453
二、综合题解析	457
习题一	459
第二章 随机变量及其分布	459
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	459
.....	459
一、概念与公式一览表	457
二、重要的一维分布	459
三、重要的二维分布	459
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	459
.....	459
题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题	463
题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数	466
题型三 求一维随机变量函数的分布	469
.....	469
题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查	469

题型五 求二维随机变量的各种分布与随机变量独立性的讨论	471
题型六 求两个随机变量的简单函数的分布	478
第3节 思维定势与综合题解析	483
一、思维定势	483
二、综合题解析	485
习题二	486
第三章 随机变量的数字特征	494
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	494
一、一维随机变量的数字特征	494
二、二维随机变量的数字特征	496
三、几种重要的数学期望与方差	497
四、重要公式与结论	498
第2节 重要题型的解题方法和技巧	498
题型一 求一维随机变量的数字特征	498
题型二 求一维随机变量函数的数学期望	503
题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征	505
题型四 有关数字特征的证明题	512
题型五 数字特征在经济中的应用	513
第3节 思维定势与综合题解析	516
一、思维定势	516
二、综合题解析	516
习题三	519
第四章 大数定律和中心极限定理	524
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	524
一、切比雪夫不等式	524
二、中心极限定理	524
三、重要公式与结论	525
四、注意	525

第2节 重要题型的解题方法和技巧	525
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	525
题型二 有关中心极限定理的命题	527
习题四	530
第五章 数理统计的基本概念	531
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	531
一、几个基本概念	531
二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	532
三、正态总体下常用统计量的性质	532
四、重要公式与结论	533
五、经验分布函数	533
第2节 重要题型的解题方法和技巧	534
题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	534
题型二 求统计量的分布	535
第3节 思维定势	537
习题五	538
第六章 参数估计	540
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	540
一、矩估计与最大似然估计	540
第2节 重要题型的解题方法和技巧	541
题型一 求矩估计和最大似然估计	541
习题六	545

附录 课后习题答案详解

第一篇 微积分	547
第一章 函数、极限和连续	547
第二章 导数与微分	551
第三章 不定积分	555

第四章	定积分及反常积分	561
第五章	微分中值定理	565
第六章	常微分方程与差分方程	567
第七章	一元微积分的应用	572
第八章	无穷级数	575
第九章	多元函数微分学	581
第十章	二重积分	584
第十一章	函数方程与不等式证明	587
第十二章	微积分在经济中的应用	590
第二篇	线性代数	592
第一章	行列式	592

第二章	矩 阵	594
第三章	向 量	602
第四章	线性方程组	607
第五章	特征值和特征向量	615
第六章	二次型	623
第三篇	概率论与数理统计	627
第一章	随机事件和概率	627
第二章	随机变量及其分布	630
第三章	随机变量的数字特征	640
第四章	大数定律和中心极限定理	646
第五章	数理统计的基本概念	648
第六章	参数估计	650

第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续

第1节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

提示 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性.

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t=-u} \int_0^x f(-u)(-du) \\ &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 T_1, T_2 ($T_1 \neq T_2$) 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x), \quad (\text{由题设 } f(x) \geq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数, 则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 也是以 T 为周期的周期函数;

(2) 如果 $\int_a^{a+T} f(x) dx \neq 0$, 则函数 $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$\begin{aligned} F(x+T) &= \int_0^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt + \int_T^{x+T} f(t) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x f(t) dt = F(x), \end{aligned}$$

所以, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k , 有

$$G(x) = \int_a^x [f(t) - k + k] dt = \int_a^x [f(t) - k] dt + k(x - a).$$

因为 $k(x - a)$ 是线性函数, 所以, 只需证明当 k 取某一值时, $g(x) = \int_a^x [f(t) - k] dt$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$\begin{aligned} g(x+T) &= \int_a^{x+T} [f(t) - k] dt = \int_a^x [f(t) - k] dt + \int_x^{x+T} [f(t) - k] dt \\ &= g(x) + \int_0^T f(t) dt - kT, \end{aligned}$$

取 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, 有 $g(x+T) = g(x)$, 即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果 $\exists M > 0$, 使得对于一切 $x \in X$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界; 若不存在这样的 M , 则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

【注】函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数	$ \sin x \leq 1,$	$ \cos x \leq 1,$	$x \in (-\infty, +\infty)$
	$ \arcsin x \leq \frac{\pi}{2},$	$ \arccos x \leq \pi,$	$x \in [-1, 1]$
	$ \arctan x < \frac{\pi}{2},$	$ \operatorname{arccot} x < \pi,$	$x \in (-\infty, +\infty)$

【提示】判别函数的界, 一般先要对函数取绝对值, 然后用不等式放缩法求解; 或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】函数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界, 且 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

(D) 有界且 $-2 \leq f(x) \leq 2$.

【 】

【解】 $|f(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| = \frac{|x|}{1+x^2} \leq \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$ (因为 $1+x^2 \geq 2|x|$),

故 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, 可知(C)入选.

【例 1.5】函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$.

(D) 有界且 $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

【 】

【解】 $f(x) = \frac{\lg x}{x}, f'(x) = \frac{x \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{1}{x^2}(\lg e - \lg x)$.

因为 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ “ $\uparrow$ ”.

因此, $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \lg 1$, 即 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$, 可知, 该选(C).

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知为可导, 则其单调性的判别用定义; 若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 则利用导数判别更简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

(2) 的证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内 $F'(x) > 0$ 即可.