21世纪高等职业教育精品课示范性规划教材

高等数学（上册）

主　编　叶鸣飞　王　华　徐慧星

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

21世纪高等职业教育精品课示范性规划教材

高等数学(上册)

主　编　叶鸣飞　王　华　徐慧星

副主编　沈玲玲　汤绍春　谢素鑫

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是根据高职学生的学习特点与认知水平编写的，全书通俗易懂，可读性强. 书中通过建立各种计算模型的方式，直观地给出了高等数学的各种计算方法，以弥补高职学生数学基础薄弱、计算能力差、逻辑思维能力不强的不足，注重培养高职学生掌握微积分的各种数学计算技能与应用能力，为学好后续的专业课程奠定基础.

全书共分上、下两册，主要内容有：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间坐标与多元微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数初步和数学建模与MATLAB数学软件介绍等. 除第10章外，各章内容均配有复习题与学习指导，部分内容可根据专业特点选修.

本书可作为高职高专工科类各专业通用教材，也可作为职业大学、各成人大学和自学考试学生的教材或参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/叶鸣飞等主编. --上海：同济大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5608-5910-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①叶… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 164004 号

高等数学(上册)

主编　叶鸣飞　王　华　徐慧星

责任编辑　姚烨铭　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　同济大学印刷厂

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　14

印　　数　1—6100

字　　数　280000

版　　次　2015 年 8 月第 1 版　　2015 年 8 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-5910-1

定　　价　30.00 元

前言

FOREWORD

随着高等职业教育改革的推进,对高等职业教育的教材建设也提出了更新的要求.高职工科“高等数学”作为一门多学科共同使用的基础理论和工具课程,对学生后续专业课程的学习和思维能力的培养起着重要的作用.它的基础性决定了它在我国高等职业教育中的重要地位.

近几年来,由于我国高等职业教育的迅猛发展,对高职院校学生的基础要求也在不断变化.各高职院校在大力发展专业教育的同时,对基础教育本着“以应用为目的,以必需、够用为度”的教育原则,数学课的课时不断被压缩.因此,在这样一种大背景下,树立高等数学课程为专业服务的教育理念,构建满足专业教学需求的课程内容,建设符合高职学生学习特点与认知水平的教材,成为摆在我们面前的一大课题.为此,我们编写了这套高职工科高等数学教材.

本套教材共分上、下两册,是在江西省高校教学研究省级课题研究成果的基础上编写完成的.针对高职学生的学习特点与认知水平,我们对传统的高等数学的内容体系作了一些调整,以一元函数微积分学为主线,简化多元微积分学,删减了一些与高职学生专业学习关系不大、理论性太强且高职学生又难以掌握的数学知识(如中值定理);突破课程体系的束缚,增加了部分对工科学生后续专业教育有用的工程数学(如线性代数初步)、数学建模与 MATLAB 数学软件介绍的内容,突出了高等数学作为一门“工具”课的特点,体现了其为专业服务的功能.为激发高职学生对高等数学课程的学习兴趣,我们在开篇绪论中,以“闲话微积分”的方式,简介了微积分学的发展历程,并在每一章的学习指导后面添加了人文数学和数学史话等小栏目,突出了数学教学中的人文性.

本套教材的编写原则是,不追求数学理论的完整性和系统性,只突出重要的结论、典型方法的应用,尽可能用通俗、直观的语言来描述抽象的数学概念.在传统教材原有的计算公式基础上,建立各种计算模型,直观给出各种计算方法,以适应高职学生数学基础薄弱、计算能力差、逻辑思维能力不强的学习状况.我们在每一章后面都

编有学习指导与复习题，提高了课程内容的可读性，强化了计算技能，降低了高职学生学习高等数学的难度，符合现代高等职业教育的需要.

参加本书编写的有江西工业职业技术学院、江西环境工程职业学院的部分老师，全书由叶鸣飞、王华、徐慧星担任主编，沈玲玲、汤绍春、谢素鑫等老师担任副主编。由于成书时间仓促，编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请有关专家、学者以及使用本书的广大师生批评指正，衷心欢迎大家将教材使用过程中碰到的问题和改进意见反馈给我们，以供修订时参考.

编　者

2015 年 6 月于南昌

目　录

绪 论

闲话微积分

微积分是高等数学的重要组成部分，为此，我们先来给大家聊聊微积分的发展历程；以及发展过程中的一些相关趣闻。

从古至今，整个数学学科的发展过程大体上可以分为五个时期：

(1) 数学萌芽时期(公元前 600 年以前)；

(2) 初等数学时期(公元前 600 年—17 世纪中叶)；

(3) 变量数学时期(17 世纪中叶—19 世纪 20 年代)；

(4) 近代数学时期(19 世纪 20 年代—第二次世界大战)；

(5) 现代数学时期(20 世纪 40 年代以来)。

微积分学创始于变量数学时期，也就是在 17 世纪中叶，可以说牛顿和莱布尼茨这两位伟大的科学家是微积分学的奠基人，但并非发明者. 在漫长的封建社会里，科学的发展也是缓慢的，尤其是这门伴随着资本主义先进生产力的发展而发展起来的微积分学，更是发展迟缓. 从阿基米德关于微积分的萌芽，到牛顿、莱布尼茨的最终完成，历时约 1900 年，可以说，这是一段到达微积分光辉顶峰的漫长攀登过程. 在这一段时间里，人们对阿基米德提供的方法，不断地应用着，争论着，发展着.

提起阿基米德，大家自然会想到中学物理中液体浮力的阿基米德原理，这位古希腊杰出的数学家、发明家、工程师及静力学的奠基人被人们誉为微积分的鼻祖，所以，我们聊微积分，应从他的贡献开始.

人类在早期的生产与生活实践中，急切需要度量线段的长度、平面图形的面积、物体的体积，现在我们就以度量平面图形的面积为例，看看当时的人们在这个问题上遇到了什么困难.

开始时，人们把边长为一个单位的正方形的面积作为一个面积单位，就如同用尺子去度量一条线段那样，去度量其他正方形、矩形的面积. 例如一个矩形能容纳 6 个单位正方形，就说此矩形的面积为 6 个单位，当然，如果矩形的一边长为 a 个单位，另一边长为 b 个单位，那么，此矩形就能容纳 ab 个单位的正方形，这个数值就是此矩形

的面积. 在此基础上，人们又用割补的方法，将平行四边形换成矩形，得出其面积为底与高之积，三角形的面积为底与高之积的一半，而对于多边形，则可将其分解为三角形之和，仍可求出其面积. 一般来说，只要图形的边是直线段，总可以用上述方法得出它的面积.

可是，随着生产、科学技术的发展，人们常常需要去度量像圆、椭圆、弓形等图形的面积，由于这类图形的边(至少一条边)往往是曲线，所以，尽管人们将单位正方形分成若干小方块，并用这些小方块去度量，但总是不能使直边与曲边重合，因而总是不能准确得出能容纳多少单位的正方形，也就算不出它的真实面积，这就是人们当时所遇到的困难. 然而，阿基米德却在总结了前人经验的基础上，对这一问题提出了他自己的想法.

阿基米德把平面图形视为由线段组成，这多少有些使人迷惑不解，在这里，他应用了“不可分量”的概念. 所谓“不可分量”，当时的意思是这样的：一条直线可以分成若干个小线段，小线段又可以再分，直至成为点，则不可分，故称点为直线的不可分量；平面图形可分割成相互平行的窄条(面积)，窄条又可以再分，直至分成线段，则不可分，故称线段为平面图形的不可分量；同样，平面是立体图形的不可分量. 这种概念来源于原子论，即物质是由不可分的原子(单子)组成的，这个概念也不是阿基米德发明的，而是古希腊另一位伟大的哲学家德谟克利特(Democritus，约公元前 460—370)创立的. 但应用这种概念使之成为一种方法，并推出一系列新的结果，则是阿基米德的首创. 他视平面由线段组成，即用长短不一的线段覆盖平面，克服了矩形不能与曲边图形相吻合的弱点，然而随之又带来了更多需要澄清的问题，例如就有人提出：需要多少线段组成平面？显然不是有限条，但在当时，无穷这个概念由于超出了人们的直观感受，尚未被人们所接受. 此外，它们是怎么组成的？ 是离散的还是连续的？ 等等. 这些问题在当时也都无法得到回答，直至 19 世纪末，这些问题才得到满意的解释，所以，阿基米德只是把它作为预测新结果的手段，不过，需要指出的是，阿基米德的许多想法，只有在极限概念引入后才能得到解决. 他这种处理问题的想法，给后人的研究指引了方向，在那个时代不失为一项杰出的创举，因而被历代科学家们采用着，改进着. 事实上，现代积分学就是在此基础上发展起来的.

不过，我们在聊到微积分学的发展时，不能不提到牛顿和莱布尼茨这两位伟大的科学家，他们被称为微积分学的奠基人.

牛顿(Newton I，1643—1727)是英国人，他的名字几乎人人皆知，他是历史上最杰出的数学家、物理家学，尤其是在经典力学与微积分学上，都取得了奠基性的成就，微积分学就是他在 24 岁时创立的.

莱布尼茨(Leibniz G W，1646—1716)是德国人. 开始他是学法律的，也是个哲学家，曾任法学教授、外交官，并不研究数学. 直到 26 岁时，他还是基本不研究数学. 后

来在朋友的建议下，才对数学发生兴趣，当他认准方向后，就大胆创新，在 30 岁之前创立了他的微积分学.

牛顿和莱布尼茨所处的时代正是资本主义生产力飞速发展的时代，相应的各门科学也得到了很大的发展，提出了大量需要解决的数学问题. 这时，他们两人各自总结了前人运用无穷小进行计算的大量成果，没有像前人那样拘泥于具体问题的解决，而是力求总结规律，使方法代数化、概念化和逻辑合理化. 那么，他们是抓住什么问题使之获得成功的呢？他们两人几乎同时看到，切线与求积、路程与速度是完全互逆的两类问题，用的也是两种互逆的运算，以及可在计算时反向应用，抓住了这个核心问题，从而得到简单而又普遍适用的微积分法，建立了他们的微积分学. 不过要说明的是，他们两人是在不同的时间内，在两个不同的国家里，独立完成的，并且研究的手法也有所不同. 牛顿是把两个变量的无穷小增量作为求流数(即导数)的手段，当增量越小的时候，流数实际上就是两增量比值的极限. 而莱布尼茨却直接用了 X 和 Y 的无穷小增量或微分，求出它们之间的关系. 这个差别反映了牛顿的物理学方向和莱布尼茨的哲学方向，牛顿完全是从考虑变化率的角度出发来解决他求变速运动的距离问题，对他来说，微分是基础；而莱布尼茨首先考虑的是求和，当然，这些和仍然是用反微分计算的. 从他们的工作方式来看，牛顿是经验的、具体的，而莱布尼茨则是富于想象的. 从微积分应用的价值来说，牛顿的工作远远超过了莱布尼茨，刺激并决定了几乎整个 18 世纪数学分析的发展方向；而莱布尼茨则更关心的是以运算公式创造出广泛意义下的微积分，并且是微积分学现代通行符号的首创者. 正是莱布尼茨记法的优越性，对于微积分在欧洲大陆的普及做出了很大的贡献，才使得人们看到这个新工具的巨大威力.

那么，牛顿与莱布尼茨究竟谁先完成微积分的呢？这个问题也曾引起英国与欧洲大陆的隔海论战，那场争论使得英国的数学家与欧洲大陆的数学家们停止了思想交流，几乎在其后的 100 年内，英国人继续以几何为主要工具，拒绝使用莱布尼茨的符号，致使英国的数学家远远落后于欧洲大陆的数学家. 其实，在科学史上，两个或几个天才同时各自独立地作出同一个发现或是发明，屡见不鲜，这是因为科学内部逻辑发展的必然性决定了人们认识上的共同性. 例如，笛卡尔与费尔马就曾为谁先完成解析几何学，引起过很大争论，而且是亲朋门徒一起上阵，吵得难解难分. 下面就将牛顿和莱布尼茨的这场争论简略地给大家介绍一下.

从研究微积分的时间上看，牛顿是在 1665—1666 年间，而莱布尼茨则是在 1673—1676 年间，然而我们从发表的时间上来看，莱布尼茨是在 1684—1686 年间发表的，而牛顿则是在 1704—1736 年间发表的，因而很难说发明权应属于谁，不过双方的门徒是互不相让. 莱布尼茨的拥戴者说，莱布尼茨先发表，理应拥有发明权. 可是由于在牛顿研究出他的微积分方法而未发表的时候，莱布尼茨曾游历过英国，结交过一些牛顿的友人，这其中就有牛顿的老师巴罗，并得到了巴罗的一本书叫《几何学讲

义》,回去后才研究并发表了他的微积分学.这样,牛顿的门徒自然也不客气,攻击莱布尼茨是科学工作的"间谍",把莱布尼茨的符号也说成是"牵强附会的符号".而这两位大师彼此之间好像也互不相让.1676年,牛顿发现莱布尼茨正在研究微积分,曾通过他的友人给莱布尼茨写信,信中用谜语的形式谈了他的微积分基本问题——流数.人们猜测,牛顿的企图是为了说明他是首先发明微积分者,1705年的《教师期刊》上发表了一篇评述牛顿的《求积术》的文章,其中说到,那本书里只不过是把莱布尼茨的微积分换成了流数,人们估计这篇文章是出自莱布尼茨的手笔.为此,在英国皇家学会还专门成立了评判牛顿、莱布尼茨优先发明权的委员会,一时喧嚣不止,这场争论对英国的影响比较深,伤害也比较大.当时的英国在科学上较为先进,他们对牛顿这位世界著名权威特别崇拜,认为其他人不能与之相比.这种情绪,阻碍了他们认真学习欧洲大陆的成就,以至慢慢落后下来.到后来,微积分的逻辑基础的完成果然不是在英国,而是在欧洲大陆由以法国数学家柯西(Cauchy A L,1789—1857)为代表的一大批数学家完成的,其各分支的发展也大部分在欧洲大陆.

然后对发明权的争论有没有结论呢?多数人的评论是:他们两人是各自独立地建立了自己的微积分学.除了时间上几乎同时以外,他们的微积分也是各具特点,一个是以流数为基础,一个是以微分为基础;一个是不定积分,一个是定积分,这两种体系直到现在仍然并存,各有各的用处,往往互为补充,缺一不可.牛顿在理论上较严格一些,但由于莱布尼茨善于听取别人的意见,它采用的符号很科学,既表示了概念,又非常利于运用,直到现在仍在使用.

用历史唯物主义的观点去看微积分的出现,它与任何科学成就一样,都是历史发展的必然产物,并非几个人的功绩.正如牛顿所说,他之所以看得远,是因为他站在了巨人的肩膀上.一门科学发展到了一定阶段,达到成熟,必然会产生出这个人写不出来、另一个人也会写出来的情况,这从牛顿、莱布尼茨几乎同时发明微积分这点可以看出.从某种意义上说,一定要分清是谁先发明的,没有多大价值.不过像牛顿、莱布尼茨这样的科学家,他们不拘泥于前人的成就,而是总结前人的成果,大胆创新,这种精神是可贵的,也正是我们这个时代大家要学习的.

微积分虽然诞生了,但牛顿和莱布尼茨两个人都说不清它的基本原理,这样就引来了一大批的批评者,大主教贝克莱攻击牛顿的流数"既不是有限量,也不是无穷小量,可也不是虚无,难道可以把它们称为死去的幽灵吗?"(见贝克莱《至分析者》),不过也应当承认,贝克莱的这种批评对微积分的发展和完善还是起到了一定的作用.为了回答这位神学家的批评,当然更主要的还是由于生产力的发展、社会的需要,使得18、19世纪进入了一个以微积分为基础的"分析时代".

第1章

函数、极限与连续

章序 数学是研究现实世界中物质及物质之间的数量关系与空间形式的一门科学，数学在我们的生活当中可谓是“无处不在，无所不用”. 而高等数学则是以变量为主要研究对象，变量的主要表现形式就是函数. 所以，本章将在中学数学已有函数知识的基础上进一步介绍函数的概念、极限与连续性，并着重说明极限的计算方法.

1.1 函数及其图形

1.1.1 常量与变量

在许多实际问题中，我们经常会遇到各种各样的量，如长度、温度、重量、体积、时间、路程及速度等. 在事物的某一变化过程中，如果一个量只能取一个固定的数值，这个量就称为常量；而在事物的某一变化过程中，如果一个量可以取不同的数值，这个量就称为变量. 例如，给一块铁加热，铁块的重量不变，而铁块的温度、体积在变，那么，在这一加热过程中，重量就是常量，而温度、体积则是变量.

某一个量是常量还是变量，并不是固定的，要根据具体情况作出具体的分析. 比如，重力加速度，在中学物理中我们把整个地球上的重力加速度都看成是常量，其原因就是我们所考虑问题中的精确度要求不高. 如果我们要求的精确度比较高的话，实际上，地球不同地点的重力加速度是不同的，那么，在整个地球上，重力加速度就应该是变量，但在同一地点的重力加速度通常还是可以看成是常量. 不过，在有些问题中，如果要考虑到地层总是在运动的话，那么，即使是同一地点，不同时间的重力加速度也是在变化的，这样，在同一地点的重力加速度也可能是变量.

在数学中，由于主要是讨论各种量在数值上的关系，因此常常要把常量和变量抽

象为常数和变数,脱离其实际意义.这样,在某一变化过程中,只能取某一固定数值的数就称为常数,而可以取不同数值的数就称为变数.

对于常数,我们通常喜欢用字母表中前面几个英文字母 a、b、c 等来表示,而变数则是习惯用字母表中最后几个英文字母 x、y、z 来表示.

本课程所涉及的常数与变数,如无特别说明,均属实数范围.

1.1.2 区间与邻域

区间是数学里用得比较多的一类数集.区间可分为有限区间与无限区间(又称无穷区间)、闭区间与开区间、半闭半开区间等.为此,我们还引进了∞(无穷大)这一概念,不过要说明的是,∞并不是一个数值,而是一个抽象概念,$+\infty$(正无穷大)与$-\infty$(负无穷大)只是代表了数轴上实数的两个不同的发展方向.在这里要向大家强调的是,有限区间和无限区间不是说区间里所包含的元素有限或无限,而是指该区间的长度有限或无限.

在高等数学的学习中,常常要用到一种特殊的开区间,这里就需要引入邻域这一概念.所谓点 x_0 的 δ 邻域,就是指以 x_0 点为中心、以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,如图 1-1(a)所示,并记为 $U(x_0,\delta)$,即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}.$$

显然,对于每一个点 x_0,可以存在无数个以 $\delta(\delta>0)$ 为半径的邻域.因此,对于数轴上的每一个点 x_0 来说,都存在无数个邻域.

在 x_0 的 δ 邻域中去掉中心点 x_0 所得两开区间的并 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 点的 δ 去心邻域.如图 1-1(b)所示,并记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$

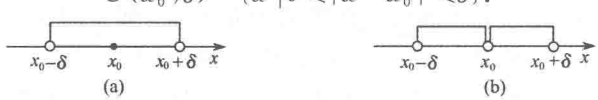

图 1-1

例如,$U(5,0.02)=\{x\,|\,|x-5|<0.02\}$ 表示点 5 的 0.02 邻域,也可用开区间 $(4.98,5.02)$ 来表示.$\mathring{U}(2,0.15)=\{x\,|\,0<|x-2|<0.15\}$ 则表示点 2 的 0.15 去心邻域,它也可以用两个开区间的并来表示,即 $(1.82,2)\cup(2,2.15)$.

要注意的是,在去心邻域的集合表达式中,$0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$,即邻域内不含点 x_0.

1.1.3 函数的概念

在同一个自然现象或科学技术过程中，往往同时会有好几个变量发生变化，并且这些变量并不是孤立地发生变化，而是相互联系并遵循着某一种确定的规律发生变化. 那么，对于单个的变量是没有多少值得研究的，我们主要还是研究各个变量之间的各种依存关系，这就是函数. 下面就两个变量的情形举例说明.

例 1.1 圆的面积 A 与半径 r 的关系可表示为

$$A=\pi r^2, r\in(0,+\infty).$$

例 1.2 物体作自由落体运动时，物体下落的距离 s 随下落的时间 t 的变化而变化，且 s 与 t 的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, t\in[0,T],$$

其中，g 为重力加速度，t 为物体着陆的时刻.

以上两例的实际意义和表达方式虽不相同，但在数学上却具有共性，那就是它们均表达了两个变量在变化过程中协同变化的依赖关系，这种关系式可以充分揭示各因素之间的数量关系，也是人类揭示事物发展规律，对事物进行分析和研究的重要基础.

1. 函数的定义

在17世纪之前，函数总是与公式紧密关联的，直到1837年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)才提出了至今仍易被人们接受且较为合理的函数概念.

定义 1.1 设有两个变量 x 和 y，而 D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，并记为

$$y=f(x), x\in D,$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量(y 也叫做 x 的函数)，数集 D 则称为函数的定义域，$W=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以改用其他字母来替代. 由于变量之间的依存关系是无限的，而字母却是有限的，所以，有时也会在 f 的右下角标上自然数来区分不同的函数关系，例如 $y=h(x)$、$y=\varphi(x)$、$y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$等.

在实际问题中建立的函数关系，其定义域往往是根据问题的实际意义来确定的，如例 1.2 中的 $D=[0,T]$. 然而在数学中，常常脱离函数的实际意义，只是单纯地讨论用算式表达的函数，这时可以规定函数的自然定义域. 在实数范围内，函数的自然

定义域就是使算式有意义的一切实数组成的数集. 例如，$s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是 $D=(-\infty,+\infty)$，又如，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是 $D=(-1,1)$. 今后凡是没有实际意义的函数所讨论的定义域都是指自然定义域.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值只有唯一的一个，那么称这种函数为单值函数；如果有多个函数值与之对应，则称为多值函数. 需要说明的一点是：本课程所讨论的函数都是指单值函数. 因此，在今后的学习中，凡是没有特别说明的函数，都是指单值函数.

例 1.3 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$； (2) $y=\frac{1}{x}+\lg(1-x)$.

解 根据题意：

(1) 由 $\begin{cases}4-x^2\neq 0,\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x\neq\pm 2,\\ x\geqslant -2,\end{cases}$ 所以 $D=(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 由 $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x>0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x\neq 0,\\ x<1,\end{cases}$，所以 $D=(-\infty,0)\cup(0,1)$.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，取定一个 $x_0\in D$，则对应一个函数值 $y_0=f(x_0)$，这时 (x_0,y_0) 在 xOy 平面上就能确定一个点的位置，当 x 取遍 D 上的每个值时，就能得到 xOy 平面上的一个点集 E：

$$E=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\},$$

那么，这个点集 E 就称为函数 $y=f(x)$ 的图形(也叫图像)，且图形 E 在 x 轴上的垂直投影点集就是定义域 D，在 y 轴上的垂直投影点集就是值域 W，如图 1-2 所示.

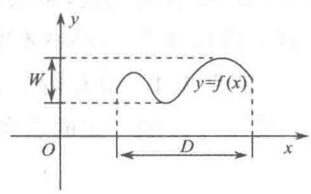

图 1-2

例 1.4 函数 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，其图形又被称为等轴双曲线，如图 1-3 所示.

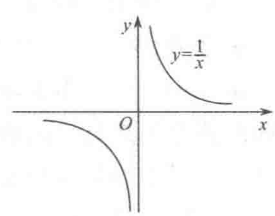

图 1-3

例 1.5 函数 $y=x^3$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=(-\infty,+\infty)$，其图形为立方抛物线，如图 1-4 所示.

当然，并不是所有的函数都能用图形表示出来. 例如狄利克雷函数

$$y=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数;}\\ 0, & x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

这个函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{0,1\}$，显然，此函数无法用图形来表示.

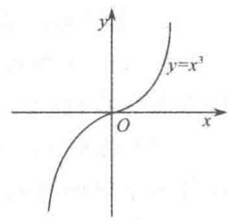

图 1-4

通过对函数定义的分析，不难发现，确定一个函数，起决定作用的两大因素是：

(1) 对应法则 f(即因变量 y 对于自变量 x 的依赖关系)；

(2) 定义域 D(即自变量 x 的取值范围).

如果说两个函数的"对应法则 f"和"定义域 D"都相同，那么，这两个函数就是相同的，否则就是不相同的. 至于自变量和因变量用什么字母表示，则无关紧要. 例如 $y=2x$，$s=2t$，$u=2v$，都表示同一个函数.

例 1.6　下列各对函数是否相同，为什么？

(1) $f(x)=x,g(x)=\dfrac{x^2}{x}$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

解　根据题意：

(1) 不相同. 理由很简单，两个函数的定义域不相同.

(2) 不相同，虽然两个函数的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同. 例如：$f(-1)=-1,g(-1)=1$，故不相同.

(3) 相同. 定义域均为$(-\infty,+\infty)$，对应法则也相同，因此，$f(x)$与 $g(x)$ 相同.

例 1.7　如果 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2(x\neq0)$，求 $f(x)$.

解　令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}(t\neq0)$，故有

$$f(t)=2\cdot\frac{1}{t}+\left[\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}}\right]^2=\frac{2}{t}+(1+t)^2,$$

所以

$$f(x)=\frac{2}{x}+(1+x)^2\quad(x\neq0).$$

此例说明函数关系与变量的记号无关.

2. 函数的表示法

函数的常用表示方法有三种:解析法、表格法和图形法. 这三种表示方法各有其特点和优缺点,不过,在我们的学习过程中,以使用解析法居多.

(1) 解析法. 用数学解析表达式表示一个函数的方法称为解析法(也叫公式法). 高等数学中所讨论的函数大多是由解析法给出的,这是因为用解析法表示的函数便于进行各种运算和研究,缺点就是不够直观.

但是需要指出的是,在用解析法表示函数时,不一定总是用一个式子来表示,也可以同时用几个式子来表示一个函数,这就是**分段函数**.

定义 1.2 在自变量不同的取值范围内,用不同的数学解析表达式(或数字)来同时表示一个函数的函数称为分段函数.

例如,前面提到的狄利克雷函数就是分段函数. 分段函数的定义域在其表达式中均已给出,不需要去求解,只需总结一下就能得到.

例 1.8 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,如图 1-5 所示.

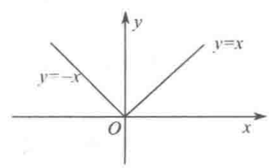

图 1-5

例 1.9 函数

$$y=\begin{cases}x^2, & -1<x\leqslant 0,\\ 1+x, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$$

的定义域 $D=(-1,2]$,值域 $W=[0,1)\cup(1,3]$,如图 1-6 所示.

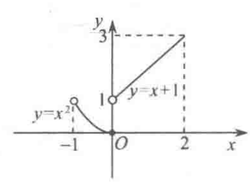

图 1-6

例 1.8 和例 1.9 都是分段函数,在自变量 x 不同的取值范围内,对应法则用不同的解析表达式表示,但表示的都是一个函数,而不是几个函数.

(2) 表格法. 在实际应用中,常将一系列自变量值与对应的函数值列成表格,以备查阅. 例如中学常用的平方根表、常用对数表、三角函数表等. 用这种形式表示函数的方法就叫做表格法.

表格法的优点是简单明了,便于应用,可以直接从自变量的值查到相对应的函数值;缺点是表中所列的数据有限,往往不够完全,所以,表达的函数也不够完整. 不过,在工程技术中,为了便于工程计算,还是常常被采用.

(3) 图形法.