研 究 生 教 学 用 书

高等机构学

Advanced Mechanisms

第 2 版

◎ 北京科技大学　韩建友　杨通
◎ 北京航空航天大学　于靖军
编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生教学用书

高等机构学

第2版

北京科技大学 韩建友 杨通
北京航空航天大学 于靖军
编著

机械工业出版社

本书第2版共分14章。对机构学的经典理论及最新研究成果作了较全面的阐述。主要内容包括机构的结构理论，铰链四杆机构的基础知识，有限分离三、四、五位置运动与函数生成平面四杆机构综合，四、五位置运动与函数生成球面4R机构综合，平面与空间连杆机构的运动分析，平面无限接近运动几何学基础，直线轨迹生成平面四杆机构综合，机构的平衡等。与第1版相比增加了旋量的基础知识和基于旋量理论的机构自由度分析方法，还增加了并联机构、柔性机构的一些内容，连杆机构综合的内容也有一些增加。

本书可以作为机械设计及理论专业的研究生教材，也可供从事机械学理论研究与机械设计的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等机构学/韩建友，杨通，于靖军编著. —2版. —北京：机械工业出版社，2015.5
研究生教学用书
ISBN 978-7-111-49977-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①韩…②杨…③于… Ⅲ.①机构学-研究生-教材 Ⅳ.①TH112

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第077810号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策划编辑：刘小慧 责任编辑：刘小慧 程足芬 任正一
版式设计：霍永明 责任校对：纪 敬
封面设计：张 静 责任印制：刘 岚
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
2015年7月第2版第1次印刷
184mm×260mm ·20印张·495千字
标准书号：ISBN 978-7-111-49977-0
定价：49.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机工官博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金书网：www.golden-book.com

第2版前言

《高等机构学》第 1 版出版至今已经有十年多了。这十多年来，机构学在多个研究领域都有很大的发展，取得了很多成就。为了适应该领域学科发展的需要，对该书第 1 版进行了修订，增加了一些能反映学科发展前沿的学术成果。对经典内容在学术和方法上的进展也进行了介绍与阐述。此外，还增加了柔性机构的一些基础知识和研究内容。第 2 版的内容仍坚持对经典内容深入系统的阐述以及对最新研究成果、研究内容及研究领域的高度概括与总结性的引入。本书旨在对机构学学习者、机构设计者及机构研究者能在理论与方法上有一个系统、全面的指引；在研究领域与成果上有一个全面的介绍；对具体分析与设计对象给出可供借鉴的示例。尽管机构的控制与自动化取代了很多复杂机构的应用，但机构学的研究与应用仍然没有失去它的重要性。好的机器源于好的机构，好的机构的产生源于对机构学的理论与设计方法的掌握与应用。高等机构学的内容与研究方法就是要提供这方面的丰富知识与深入的设计理论与最先进的设计方法。本书无论从内容、方法和阐述上都希望尽量做到深入浅出、全面系统。

本书第 2 版除对各章进行了修订外，还增加了有限分离三位置和四位置的综合内容以及球面机构的综合内容。此外，还增加了并联机构和柔性机构的一些基础知识。

本书修订后共分 14 章。第 1 章介绍了机构分析与综合常用的数学基础知识；第 2 章介绍了机构结构理论，与第 1 版相比增加了基于旋量理论的机构自由度分析方法；第 3 章介绍了铰链四杆机构的基础知识，增加了同源机构的解析求法；第 4 章介绍了三位置运动生成平面四杆机构综合；第 5 章介绍了四、五位置运动与函数生成平面四杆机构综合；第 6 章介绍了四、五位置运动与函数生成球面 4R 机构综合；第 7 章介绍了平面连杆机构的运动分析；第 8 章介绍了空间单链连杆机构的运动分析；第 9 章介绍了平面无限接近运动几何学基础；第 10 章介绍了直线轨迹生成平面四杆机构综合；第 11 章介绍了并联机构；第 12 章介绍了柔性机构；第 13 章介绍了机构的动力分析；第 14 章介绍了机构的平衡。

此外，每章后面都增加了习题。

本书各章修订或编写分工如下：第 1 章（第 1.1 ~ 1.4 节，第 2、3、7、8、9、10、13 和 14 章由北京科技大学韩建友修订及编写；第 4、5、6 章和其他部分章节由北京科技大学杨通编写；第 1 章第 1.5 节及习题、第 2 章第 2.3 节及习题、第 8 章（8.2.3 节，

8.2.4 节，8.3.2 节）及习题、第 11、12 章由北京航空航天大学于靖军编写。

本书由韩建友负责统稿、修改和定稿。

本书是在国家自然科学基金项目（编号：51275034）和国家科技支撑计划项目（编号：2011BAF12B03-5）的资助下，增加了两个项目的最新科研成果编著而成。在此，对两个项目的资助表示感谢。

另外，特别提出感谢的是，在第 1 版和第 2 版负责本书文字、结构和插图等技术工作的刘小慧编辑，她对本书的顺利出版提出了很多好的建议，并做出大量的修改和改进工作，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中难免错漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

作者于北京科技大学和北京航空航天大学

第1版前言

“高等机构学”亦称“高等机械原理”（Advanced Mechanism Design：Analysis and Synthesis 或 Advanced Kinematics and Dynamics of Mechanisms），是机械设计及理论专业硕士研究生的一门必修课，研究范围十分广泛，几乎涉及所有有关一般机器及机构的设计理论、运动学与动力学分析与综合、机器人机构学、微型机械和仿生机械等。所研究的内容，在深度上应该是在本科机械原理的基础上对各种研究方法和专题进行更深入广泛的了解与掌握，为进行深入的专题研究打下牢固的基础，能够容易地读懂用各种研究方法撰写的学术论文和专著。由于所研究内容的广泛性，作为研究生和工程技术人员的参考书，内容的选取是要考虑的主要问题。目前国内正式出版的同类书籍不多，内容多有不同。在研读了国内外多种同类书籍后发现，对一些经典内容几乎每本书都作了介绍与阐述，只是繁简程度与方法不同而已，如机构的结构理论、刚体导引问题、运动几何学理论基础、布尔梅斯特理论、轨迹曲率理论、机构运动学与动力学分析的常用方法等。这些都是机构学研究者需要掌握的基础知识和进行深入研究的基础。另外，有的书中对编著者所感兴趣的研究课题也作了深入的阐述。本书除了对上述内容作了详细介绍外，也介绍了自己感兴趣的专题和研究成果。本书在介绍一些基础理论方面的知识时，对比较成熟的理论尽可能多地采用中文参考书的内容，为表示对译者劳动的尊重，其外文参考文献一般不再列出。在介绍空间机构的运动分析基础一章中，主要介绍了已故张启先院士的《空间机构的分析与综合》中的相关内容。这是一本在国内非常有影响的经典著作，空间机构研究者无所不知，研究内容的深入与广泛在国内外也是少见的。因此，在介绍其内容时一般不冒昧改动。但在有些部分偶尔也介绍一下其他方法。另外几部有影响的重要著作也是本书编写时的主要资料来源，这些在本书各章后的参考文献中都一一列出，如白师贤等编著的《高等机构学》和楼鸿棣、邹慧君主编的《高等机械原理》等。作者在多年教授这门课程时根据本校的教学要求和科学研究的需要，主要选用这些教材的部分内容和其他一些参考文献的内容组织教材。多年的教学实践使我们体会到，有些基础性的内容对读者进行高深内容的研究并能够顺利阅读相关领域的参考文献是必需的，因此本书在选材方面主要注重三方面的内容：一是基础性的内容，尽可能介绍全面、透彻、清楚；二是经典内容，尽量深入浅出，配以示例；三是最新研究成果。考虑到齿轮机构和凸轮机构都有相应的专著，因此本书主要介绍连杆机构的分析与综合的相关内容。在连杆机构的研究中，铰链四杆机构作为多杆机构研究的基础，有些方法可以直接应用于多杆机构，并考虑其应用的广泛性与实用性，本书各部分的内容大都以四杆

机构为主，偶尔也涉及多杆机构的内容。

本书共分9章。第1章简单介绍了机构的结构理论。第2章介绍了平面连杆机构常用的分析方法。第3章详细地介绍了空间连杆机构运动分析的矩阵方法。第4章给出了几个分析示例。第5章介绍了铰链四杆机构的主要特性，主要有铰链四杆机构的尺寸型、分类、分支与回路问题和连杆曲线的特性及其应用。第6章介绍了平面运动几何学的基础知识，这些知识对机构综合是非常有用的，接着给出了机构综合示例，即铰链四杆直线机构综合。这些内容是作者多年研究成果的部分内容，是经典理论的应用。以往书中在介绍了运动几何学理论后，一般都很少介绍它的应用内容，从多年的研究经验中认识到，在机构综合中，运动几何学能够解决很多其他方法解决不了的机构综合问题，而且解决方法也不像人们想象的仅仅是“几何方法”，也是一种非常适用于计算机的解析方法。第7章介绍了“平面刚体导引”机构的综合方法，包括有限分离和无限接近的四、五位置问题的布尔梅斯特问题，还介绍了两种情况混合情况下的机构综合问题，本章的大部分内容仍为作者提出的非常适用于计算机编程计算的综合方法。第8章首先介绍了动力学的基础知识，内容为研究空间机构动力学的基础知识，接着给出了平面和空间机构分析的几个例子。第9章介绍了机构平衡的一些方法。

本书的全部AutoCAD插图均由制图教研组张苏华老师画出。

北京工业大学教授余跃庆博士对本书进行了审阅，提出了很多有益的修改意见，在此表示诚挚的谢意。

北京科技大学教务处、教材科的相关领导对本书的出版给予了大力的支持，并与研究生院对本书的出版共同提供了资金资助，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，书中难免有错漏和不妥之处，恳请读者批评指正。

作者于北京科技大学

目 录

第 1 章

数学基础

机构学的研究离不开数学和力学的支撑。本章主要介绍全书用到的主要数学及力学基础知识，包括坐标变换、刚体运动、旋量理论等。这些内容适用于任何空间机构或平面机构的分析与综合，包括串、并联机器人机构。首先，从共原点的坐标变换开始研究刚体或构件的定点转动；接着，给出刚体或构件一般运动时的坐标变换及机构运动分析的计算公式；最后，对目前机构分析与综合中应用较广的旋量知识进行了简单的介绍。

1.1　共原点的坐标变换和刚体的定点转动

1.1.1　坐标变换矩阵的推导

设有共原点的两组右手直角坐标系 $x_iy_iz_i$ 和 $x_jy_jz_j$，i 系称为旧系，j 系称为新系，如图 1-1 所示。

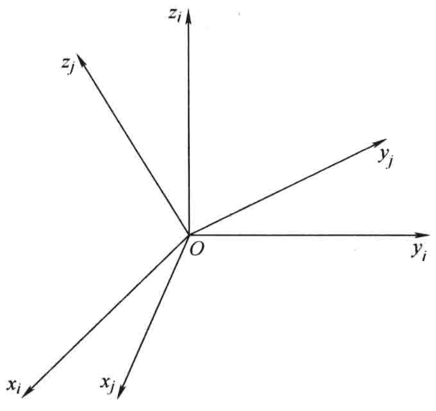

图 1-1　两个共原点的坐标系

x_j 轴、y_j 轴和 z_j 轴关于 $x_iy_iz_i$ 的方向角分别是 α_1，β_1，γ_1；α_2，β_2，γ_2；α_3，β_3，γ_3。用 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$ 和 $\boldsymbol{j}_1$，$\boldsymbol{j}_2$，$\boldsymbol{j}_3$ 分别表示两组坐标系的坐标矢量，于是有

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{j}_1\cos\alpha_1+\boldsymbol{j}_2\cos\alpha_2+\boldsymbol{j}_3\cos\alpha_3\\ \boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{j}_1\cos\beta_1+\boldsymbol{j}_2\cos\beta_2+\boldsymbol{j}_3\cos\beta_3\\ \boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{j}_1\cos\gamma_1+\boldsymbol{j}_2\cos\gamma_2+\boldsymbol{j}_3\cos\gamma_3\end{cases}\tag{1-1}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{j}_1=\boldsymbol{i}_1\cos\alpha_1+\boldsymbol{i}_2\cos\beta_1+\boldsymbol{i}_3\cos\gamma_1\\ \boldsymbol{j}_2=\boldsymbol{i}_1\cos\alpha_2+\boldsymbol{i}_2\cos\beta_2+\boldsymbol{i}_3\cos\gamma_2\\ \boldsymbol{j}_3=\boldsymbol{i}_1\cos\alpha_3+\boldsymbol{i}_2\cos\beta_3+\boldsymbol{i}_3\cos\gamma_3\end{cases}\tag{1-2}$$

设空间有一点 P（矢径为 $\boldsymbol{r}$）关于这两组坐标系的坐标分别是（x_i，y_i，z_i）和（x_j，y_j，z_j），于是有

$$\boldsymbol{r}=x_i\boldsymbol{i}_1+y_i\boldsymbol{i}_2+z_i\boldsymbol{i}_3=x_j\boldsymbol{j}_1+y_j\boldsymbol{j}_2+z_j\boldsymbol{j}_3\tag{1-3}$$

分别用 $\boldsymbol{i}_1$，$\boldsymbol{i}_2$，$\boldsymbol{i}_3$ 点乘式（1-3）可得

$$\begin{cases}x_i=x_j\cos\alpha_1+y_j\cos\alpha_2+z_j\cos\alpha_3\\ y_i=x_j\cos\beta_1+y_j\cos\beta_2+z_j\cos\beta_3\\ z_i=x_j\cos\gamma_1+y_j\cos\gamma_2+z_j\cos\gamma_3\end{cases}\tag{1-4}$$

进一步用矩阵简写为

$$(\boldsymbol{r})_i=[C_{ij}](\boldsymbol{r})_j \tag{1-5}$$

式中，$(\boldsymbol{r})_i$和 $(\boldsymbol{r})_j$为同一点 P 分别在旧坐标系 i 及新坐标系 j 中的列阵，即 $(\boldsymbol{r})_i=(x_i,\ y_i,\ z_i)^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{r})_j=(x_j,\ y_j,\ z_j)^{\mathrm{T}}$，方阵 $[C_{ij}]$ 为

$$[C_{ij}]=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{pmatrix} \tag{1-6}$$

右下角标表示该方阵是由坐标系 j 变换到坐标系 i 的坐标变换矩阵。方阵 $[C_{ij}]$ 中元素的表达式见表 1-1，可以看出 $[C_{ij}]$ 中每一元素都是方向余弦，故 $[C_{ij}]$ 常称为方向余弦矩阵。对两个没有相对旋转的坐标系，由于主对角线元素 $c_{11}=c_{22}=c_{33}=1$，而其余元素均为零，这时的方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 显然成为单位矩阵 $[I]$。

表 1-1　方阵 $[C_{ij}]$ 中元素的表达式

	x_j	y_j	z_j
x_i	$c_{11}=\cos(x_i,\ x_j)$	$c_{12}=\cos(x_i,\ y_j)$	$c_{13}=\cos(x_i,\ z_j)$
y_i	$c_{21}=\cos(y_i,\ x_j)$	$c_{22}=\cos(y_i,\ y_j)$	$c_{23}=\cos(y_i,\ z_j)$
z_i	$c_{31}=\cos(z_i,\ x_j)$	$c_{32}=\cos(z_i,\ y_j)$	$c_{33}=\cos(z_i,\ z_j)$

1.1.2　方向余弦矩阵的性质

1. 方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 及 $[C_{ji}]$ 互为转置

由式（1-5）知，在两个共原点直角坐标系 $x_iy_iz_i$和 $x_jy_jz_j$中，点的坐标变换公式为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{r})_i=[C_{ij}](\boldsymbol{r})_j\\ (\boldsymbol{r})_j=[C_{ji}](\boldsymbol{r})_i\end{cases} \tag{1-7}$$

式中，方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 及 $[C_{ji}]$ 为由坐标系 j 向 i 以及由 i 向 j 的坐标变换矩阵。因此很容易由表 1-1 写出

$$[C_{ij}]=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix},\quad [C_{ji}]=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{21} & c_{31}\\ c_{12} & c_{22} & c_{32}\\ c_{13} & c_{23} & c_{33}\end{pmatrix} \tag{1-8}$$

显然，方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 及 $[C_{ji}]$ 互为转置矩阵，即 $[C_{ji}]=[C_{ij}]^{\mathrm{T}}$或 $[C_{ij}]=[C_{ji}]^{\mathrm{T}}$。

2. 方向余弦矩阵中的 9 个元素只有 3 个是独立的

由于方向余弦矩阵中的各个元素分别代表着新、旧坐标轴间的方向余弦，所以有

$$\begin{cases}c_{11}^2+c_{21}^2+c_{31}^2=1\\ c_{12}^2+c_{22}^2+c_{32}^2=1\\ c_{13}^2+c_{23}^2+c_{33}^2=1\end{cases} \tag{1-9}$$

而 3 个坐标轴又两两垂直，所以存在下面的关系：

$$\begin{cases} c_{11}c_{12}+c_{21}c_{22}+c_{31}c_{32}=0 \\ c_{12}c_{13}+c_{22}c_{23}+c_{32}c_{33}=0 \\ c_{11}c_{13}+c_{21}c_{23}+c_{31}c_{33}=0 \end{cases} \tag{1-10}$$

由此可见，由于存在6个关系式，只有3个不在同一行或同一列的元素才是独立的。

3. 方向余弦矩阵为正交矩阵

$$[C_{ij}][C_{ji}]=[C_{ji}][C_{ij}]=[I] \tag{1-11}$$

故有

$$[C_{ij}]^{-1}=[C_{ij}]^{\mathrm{T}} \tag{1-12}$$

4. 方向余弦矩阵的行列式等于1（对右手直角坐标系）

对式（1-11）两边均取行列式，由于行列式 $|[C_{ij}]|=|[C_{ji}]|$ 和 $|[I]|=1$，所以 $|[C_{ij}]||[C_{ji}]|=|[C_{ij}]|^2=|[C_{ji}]|^2=1$，$|[C_{ij}]|=1$，因此方向余弦矩阵的行列式等于1。

5. 方向余弦矩阵中每一元素都等于其代数余子式

将行列式 $|[C_{ij}]|=1$ 展开，可以看出

$$\begin{aligned} c_{11}&=c_{22}c_{33}-c_{23}c_{32} \\ c_{12}&=c_{23}c_{31}-c_{21}c_{33} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1-13}$$

1.1.3 方向余弦矩阵的表示

1. 绕一个坐标轴旋转的坐标变换

（1）绕 z 轴旋转　设有两个共原点右手直角坐标系，如图1-2所示，对坐标系 $x_iy_iz_i$ 来说，坐标系 $x_jy_jz_j$ 的坐标轴方向可认为是绕 z 轴旋转了一个角度 θ。关于转角 θ 的正负，通常系按右手法则规定，即对着 z 轴看，由 x_i 轴逆时针量至 x_j 轴为正，而顺时针量为负，坐标变换矩阵很容易由表1-1写出

$$[C_{ij}^{(\theta)}]=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1-14}$$

方阵的右上角（θ）表示坐标系 j 是由坐标系 i 绕 z 轴转过 θ 角而得。

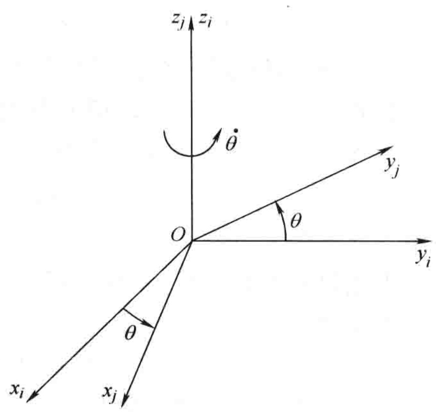

图1-2　绕 z 轴旋转的坐标变换

（2）绕 x、y 坐标轴旋转　图1-3所示坐标系 j 对坐标系 i 的方向可认为是绕 x 轴转过角度 α，图1-4所示坐标系 j 对坐标系 i 则为绕 y 轴转过角度 β，至于转角 α 和 β 的正负仍按右手法则的规定。同样，利用表1-1可直接写出绕 x 轴旋转 α 及绕 y 轴旋转 β 的方向余弦矩阵

$$[C_{ij}^{(\alpha)}]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1-15}$$

$$[C_{ij}^{(\beta)}]=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix} \tag{1-16}$$

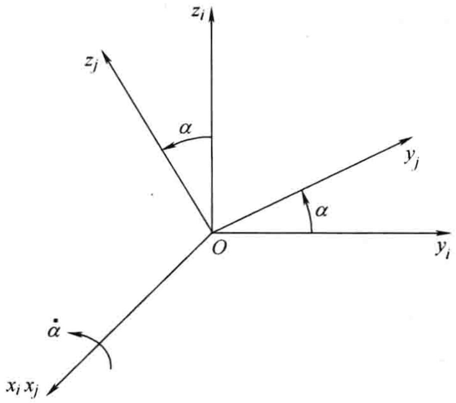

图 1-3 绕 x 轴旋转的坐标变换

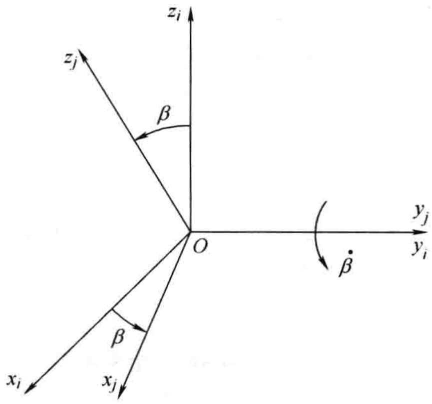

图 1-4 绕 y 轴旋转的坐标变换

2. 绕两个坐标轴旋转的坐标变换

图 1-5 所示为坐标系 $x_jy_jz_j$ 对 $x_iy_iz_i$ 的方向，可认为是先绕 z_i（z_m）轴转过角度 θ，接着绕 x_j（x_m）轴转过角度 α。将坐标系 $x_iy_iz_i$ 绕 z_i 轴转过 θ 到达 $x_my_mz_m$ 时坐标变换的矩阵关系式为

$$(\boldsymbol{r})_i=[C_{im}^{(\theta)}](\boldsymbol{r})_m \tag{1-17}$$

式中，方向余弦矩阵 $[C_{im}^{(\theta)}]$ 取式（1-14）的形式。

接着，将坐标系 $x_my_mz_m$ 绕 x_m 转过角度 α 到达 $x_jy_jz_j$ 时，坐标变换的矩阵关系式为

$$(\boldsymbol{r})_m=[C_{mj}^{(\alpha)}](\boldsymbol{r})_j \tag{1-18}$$

式中，方向余弦矩阵 $[C_{mj}^{(\alpha)}]$ 取式（1-15）的形式。

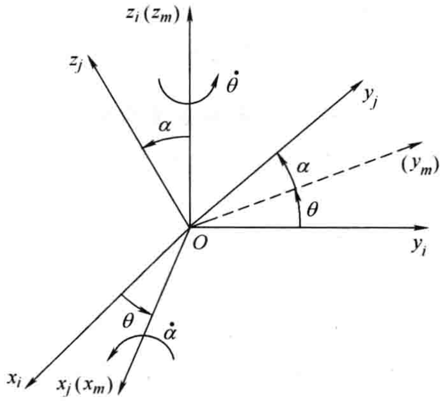

图 1-5 绕两个坐标轴旋转的坐标变换

由此得到由坐标系 j 向坐标系 i 进行坐标变换的矩阵关系式为

$$(\boldsymbol{r})_i=[C_{im}^{(\theta)}](\boldsymbol{r})_m=[C_{im}^{(\theta)}][C_{mj}^{(\alpha)}](\boldsymbol{r})_j \tag{1-19}$$

式（1-19）表明，运用方向余弦矩阵的连乘可进行坐标系的连续变换。为了便于应用，可写出适合图 1-5 的方向余弦矩阵 $[C_{ij}^{(\theta,\alpha)}]$ 为

$$\begin{aligned}[C_{ij}^{(\theta,\alpha)}]&=[C_{im}^{(\theta)}][C_{mj}^{(\alpha)}]\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\cos\alpha & \sin\theta\sin\alpha\\ \sin\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1-20}$$

3. 任意旋转的坐标变换

前面已经知道，对于共原点坐标变换的一般情形，方向余弦矩阵中的 9 个元素仅有 3 个是独立的。因此任意给定 3 个不在同一行或同一列的 3 个元素，其他元素也随之确定，可根据前面给定的 6 个方程联立求出，但用给定的 3 个独立的方向余弦来表示其余的 6 个是很困难的，因为这样必须解 6 个联立二次方程式。因此，人们通常选用其他参数，用来表示方向余弦矩阵中的各个元素。下面介绍三种方法。

（1）用 3 个欧拉角表示的坐标变换矩阵　如图 1-6 所示，坐标系 j 的方向可认为是由坐标系 i 连续进行 3 个欧拉角旋转而来。图中节线 ON 同时垂直于坐标轴 z_i 及 z_j，这样，坐标系 i 先绕 z（z_i）轴旋转一个角度 θ，使轴 x_i 与节线 ON 相重合，接着绕 x 轴（节线 ON）旋转一个角度 α，可使轴 z_i 转到 z_j 的方向，最后绕 z（z_j）轴再旋转一个角度 δ，可使轴 x_i 最后由节线 ON 转到 x_j 的方向。利用式（1-20）及式（1-14），根据三个欧拉角的连续旋转，可得由坐标系 j 变换到坐标系 i 的方向余弦矩阵 $[C_{ij}^{(\theta,\alpha,\delta)}]$ 为

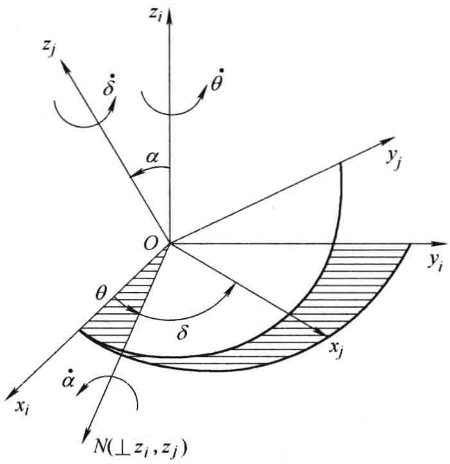

图 1-6　3 个欧拉角表示的坐标变换

$$[C_{ij}^{(\theta,\alpha,\delta)}] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\cos\alpha & \sin\theta\sin\alpha \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\alpha & -\cos\theta\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\delta - \sin\theta\cos\alpha\sin\delta & -\cos\theta\sin\delta - \sin\theta\cos\alpha\cos\delta & \sin\theta\sin\alpha \\ \sin\theta\cos\delta + \cos\theta\cos\alpha\sin\delta & -\sin\theta\sin\delta + \cos\theta\cos\alpha\cos\delta & -\cos\theta\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\delta & \sin\alpha\cos\delta & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1-21}$$

（2）用绕 3 个坐标轴旋转角表示的坐标变换矩阵　对于旋转次序作如下规定，先绕 z 轴旋转 γ 角，再绕新的 y 轴旋转 β 角，最后绕新的 x 轴旋转 α 角。由式（1-19）可知，坐标系的连续旋转变换应遵循**矩阵右乘原则**，此旋转变换矩阵展开后为

$$[C_{ij}^{(\gamma,\beta,\alpha)}] = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta & \cos\gamma\sin\beta\sin\alpha - \sin\gamma\cos\alpha & \cos\gamma\sin\beta\cos\alpha + \sin\gamma\sin\alpha \\ \sin\gamma\cos\beta & \sin\gamma\sin\beta\sin\alpha + \cos\gamma\cos\alpha & \sin\gamma\sin\beta\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\gamma\sin\alpha & \cos\gamma\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1-22}$$

此即所谓的绕 3 个坐标轴的旋转变换，有的书中亦称为广义欧拉角变换。

（3）用绕某一轴的旋转角表示的坐标变换矩阵　如图 1-7 所示，坐标系 j 的方向可认为将坐标系 i 绕 $\boldsymbol{u}$ 轴旋转角度 φ 而得，该轴在坐标系 i 中则有一定的方向角（α, β, γ）。

为了能应用绕坐标轴旋转的矩阵公式来进行推导，应将绕 $\boldsymbol{u}$ 轴旋转的问题变成绕某坐标轴（例如 z 轴）的旋转。为此，将坐标系 i 经绕 y_i 旋转角 η，再绕 x_m 旋转 $-\lambda$ 角，两次旋转使新坐标系的 z_n 轴与所给定的轴 $\boldsymbol{u}$ 重合，如图 1-8 所示。

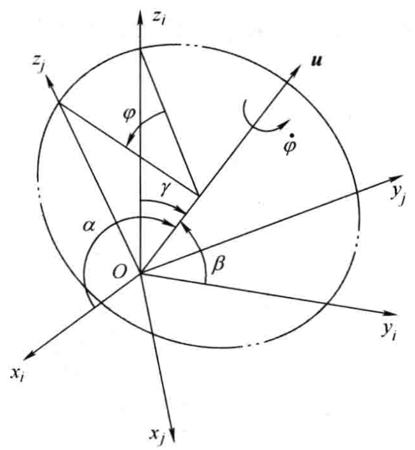

图 1-7 用绕 u 轴的旋转角表示的坐标变换

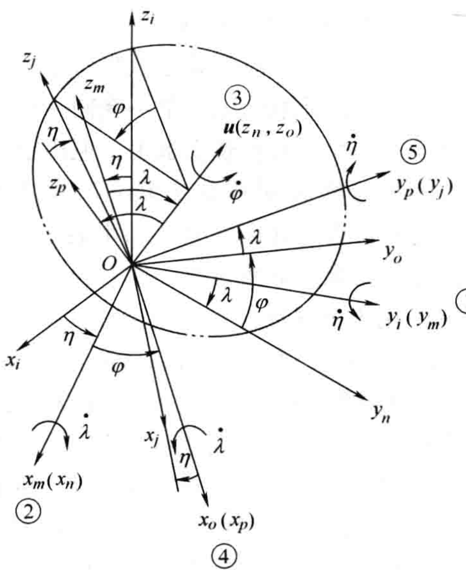

图 1-8 绕 u 轴旋转相当于五次坐标变换

绕 z_n 轴转 φ 角，再分别绕 x 轴转 λ 角，绕 y 轴旋转 $-\eta$ 角，则相当于坐标系 i 仅绕 $\boldsymbol{u}$ 轴转 φ 角至坐标系 j。因此有

$$
\begin{aligned}
[C_{ij}^{(\varphi)}] &= [C_{im}^{(\eta)}][C_{mn}^{(-\lambda)}][C_{no}^{(\varphi)}][C_{op}^{(\lambda)}][C_{pj}^{(-\eta)}] \\
&= \begin{pmatrix} \cos\eta & 0 & \sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\eta & 0 & \cos\eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & \sin\lambda \\ 0 & -\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ 0 & \sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\eta & 0 & -\sin\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\eta & 0 & \cos\eta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1-23}
$$

在构成旋转矩阵时，应予注意的是可作下述代换：

$$\sin\lambda = u_y, \sin\eta = \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + u_z^2}}, \cos\lambda = \sqrt{u_x^2 + u_z^2}, \cos\eta = \frac{u_z}{\sqrt{u_x^2 + u_z^2}}$$

因而 $\cos\lambda\sin\eta = u_x$，$\cos\lambda\cos\eta = u_z$，代入式（1-23）得

$$
[C_{ij}^{(\varphi)}] = \begin{pmatrix} u_x^2 V_\varphi + C_\varphi & u_x u_y V_\varphi - u_z S_\varphi & u_x u_z V_\varphi + u_y S_\varphi \\ u_x u_y V_\varphi + u_z S_\varphi & u_y^2 V_\varphi + C_\varphi & u_y u_z V_\varphi - u_x S_\varphi \\ u_x u_z V_\varphi - u_y S_\varphi & u_y u_z V_\varphi + u_x S_\varphi & u_z^2 V_\varphi + C_\varphi \end{pmatrix} \tag{1-24}
$$

式中，$V_\varphi = 1 - \cos\varphi$，$S_\varphi = \sin\varphi$，$C_\varphi = \cos\varphi$。

式（1-24）变为

$$
[C_{ij}^{(\varphi)}] = \left(\begin{matrix} \cos^2\alpha(1-\cos\varphi) + \cos\varphi & \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) - \cos\gamma\sin\varphi \\ \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi) + \cos\gamma\sin\varphi & \cos^2\beta(1-\cos\varphi) + \cos\varphi \\ \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi) - \cos\beta\sin\varphi & \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi) + \cos\alpha\sin\varphi \end{matrix}\right.
$$