高等学校数学学习指导丛书

高等数学精讲精练

（下册）

陈启浩　陈文超◎编著

与同济大学《高等数学》（第七版）同步

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

高等学校数学学习指导丛书

高等数学精讲精练（下册）

陈启浩　陈文超◉编著

与同济大学《高等数学》（第七版）同步

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学精讲精练. 下册／陈启浩，陈文超编著. —4版.
—北京：北京师范大学出版社，2015.3
（高等学校数学学习指导丛书）
ISBN 978-7-303-18456-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②陈… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第024399号

营销中心电话 010-58802181 58805532
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com
电子信箱 gaojiao@bnupg.com

GAODENG SHUXUE JINGJIANG JINGLIAN XIACE
出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印 刷：大厂回族自治县正兴印务有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：184 mm × 260 mm
印 张：19
字 数：500千字
印 数：8 001 ~ 11 000册
版 次：2015年3月第4版
印 次：2015年3月第4次印刷
定 价：30.00元

策划编辑：岳昌庆 责任编辑：岳昌庆
美术编辑：焦 丽 装帧设计：耿中虎
责任校对：李 菡 责任印制：陈 涛

第四版前言

高等数学是大学工学、经济学、管理学各学科和专业的一门重要基础课，也是这些学科和专业的硕士研究生入学考试必考科目之一.

目前出版的高等数学辅导读物，其中虽不乏佳作，但多以题解“《高等数学》(同济大学)习题”或“历年硕士研究生入学试题”形式出现. 本书则是旨在引导正在学习高等数学的读者，能与课堂教学或自学同步，准确灵活地理解高等数学中的众多概念与理论，熟练掌握各种问题的解题方法和技巧，较快捷、较深入地学会高等数学这门课程；同时帮助正在复习迎接硕士研究生入学考试的读者能在较短时期内使高等数学水平有一个较大幅度的提高，从容面对数学考试.

全书按同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第六版)(高等教育出版社)各章顺序编写，共分十二章及附录(高等数学的应用、全书综合练习题及考研试题). 每章分若干节，每节都由以下三部分组成：

一、**主要内容提要**　列出该节的核心内容，即主要定义、定理及计算公式.

二、**疑问与解答**　将该节中较易混淆的概念、学习中会出现的问题以及解题方法和技巧以疑问形式提出，并结合典型例子给出解答.

三、**基础练习**　这里的练习都是基础题，旨在通过这些练习题熟悉本节的有关概念、理论及计算方法. 基础练习包括单项选择题和填空题(书后都有解答)，特别对单项选择题，在解答中不仅给出选择其中某项的理由，也给出不选择其余三项的理由.

此外，每章的最后都安排有**“主要计算方法总结”**一节(除第六章)和**综合练习**(A)、**综合练习**(B)，通过这一节的阅读和综合练习训练，将融会贯通全章的各个知识点，提高分析问题和解决问题的能力.

北京师范大学出版社理科室的编辑们对本书面世给予了热情的支持和帮助，谨此致谢.

由于水平有限，成书时间仓促，书中疏漏等不足之处恐难幸免，恳请广大读者及同行指正.

北京邮电大学教授
陈启浩

目 录

第八章 空间解析几何与向量代数

第一节　向量代数

一、主要内容提要

1　向量的基本概念

既有大小又有方向的量称为向量.

向量的大小称为模，模为 0 的向量称为零向量. 模为 1 的向量称为单位向量，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是空间直角坐标系中分别与 x 轴，y 轴及 z 轴同向的单位向量，称为空间的基本向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 方向相同且模相等，则称 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 是起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量，则 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \xlongequal{记} a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ 或 (a_x, a_y, a_z).

$\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$；当 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量时，称

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$$

为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦（其中，α, β, γ 分别是 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴正向的夹角），称 $\boldsymbol{a}^0 = \pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

2　向量运算

设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$.

(1) 向量加、减法

$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\}$.

(2) 向量数乘

$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}$（其中 λ 是数）.

(3) 数量积

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$（其中，$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，规定 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

数量积的性质：设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是向量，λ, μ 是数，则

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$；

$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$；

$(\lambda\boldsymbol{a}) \cdot (\mu\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a} \cdot \mu\boldsymbol{b}) = \mu(\lambda\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

(4) 向量积

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$(其中,$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角;$\boldsymbol{c}$ 的方向由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 按右手法则确定).

特别有

$$\begin{array}{lll}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0}, & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}, & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}, & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.\end{array}$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$(注意:相互平行的向量可以认为是共线的).

向量积的性质:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是向量,λ,μ 是数,则

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$;

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$;

$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\mu\boldsymbol{b})=\mu(\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

(5) 混合积

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

对于非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为共点三棱的平行六面体体积,从而,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为共点三棱的四面体体积为 $\frac{1}{6}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$.

混合积的性质:设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是向量,则

非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$;

当 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ 中相邻两个向量位置互换时,混合积变成相反数.

二、疑问与解答

问 1 如何判断两个非零向量相互平行与相互垂直?

答 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量.

当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行,否则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互不平行. 此外,如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都与某个非零向量平行,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行.

当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直,否则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互不垂直,但是,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都与某一非零向量垂直时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 未必平行.

问 2 对向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 成立吗?

答 等式未必成立. 例如,设 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{c}=(1,1,1)$,则由

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\{1,1,1\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(-1,1,0),$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{i}\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=(0,1,0)$$

知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

注 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

问 3 三个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件除可以表述为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$外,是否还有其他的表述?

答 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件还可以表述为:存在不全为零的常数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$成立.

问 4 我们知道,对于空间的基本向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$有

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}.$$

那么对于非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,当

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\qquad ①$$

时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是否为相互垂直的单位向量?

答 当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足①时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是三个相互垂直的单位向量.证明如下:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

同理可证 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$,即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是三个相互垂直的向量.此外,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\sin\frac{\pi}{2}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$,同理可证$|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|$,$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.所以,由$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|)^2$得$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|=1$.由此推得$|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2=1$,因此,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,即$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都是单位向量.

三、基础练习

1. 单项选择题

(1) 设向量$\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$,且$\boldsymbol{b}$是与三个坐标轴正向的夹角相等且都为锐角的单位向量,则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$分别为( ).

A. $\sqrt{3},-\frac{5}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{7}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$ B. $-\sqrt{3},-\frac{5}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{7}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$

C. $\sqrt{3},\frac{5}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{7}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$ D. $-\sqrt{3},\frac{5}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{7}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$

(2) 设$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$是按右手法则组成的相互垂直的单位向量组,则以向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$为邻边构成的平行四边形的面积为( ).

A. $\sqrt{13}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{14}$

(3) 设$\boldsymbol{a}=(1,0,0),\boldsymbol{b}=(0,1,-1),\boldsymbol{c}=(1,1,1)$,则以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为共点三棱的四面体体积$V=$( ).

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

(4) 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1$，则 $[(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$ 为（　　）.

A. 7　　B. 0　　C. 1　　D. 9

(5) 设单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，则 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 为（　　）.

A. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$　　B. $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$　　C. $\frac{3}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$　　D. $\frac{3}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

(6) 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的（　　）.

A. 充分而非必要条件　　B. 必要而非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

(7) 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 及 $\boldsymbol{b}=(0,1,-1)$ 都垂直，则当 $|\boldsymbol{x}|=1$ 时，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{x}$ 中模较小的向量为（　　），其中 $\boldsymbol{c}=(1,1,1)$.

A. $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$　　B. $\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

(8) 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，且它们之间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\min\{|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}t|,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t|\}\mathrm{d}t=(\quad).$$

A. $\frac{1}{8}(6\sqrt{3}-\sqrt{13})+\frac{3}{8}\ln\frac{(2+\sqrt{3})(31+7\sqrt{13})}{18}$

B. $\frac{1}{8}(6\sqrt{3}-\sqrt{13})+\frac{3}{8}\ln\frac{(2+\sqrt{3})(31-7\sqrt{13})}{8}$

C. $\frac{1}{8}(6\sqrt{3}+\sqrt{13})+\frac{3}{8}\ln\frac{(2+\sqrt{3})(31+7\sqrt{13})}{18}$

D. $\frac{1}{8}(6\sqrt{3}+\sqrt{13})+\frac{3}{8}\ln\frac{(2+\sqrt{3})(31-7\sqrt{13})}{8}$

2. 填空题

(1) 设 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=26$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=72$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ ________.

(2) 设点 A,B 的坐标分别为 $(1,1,1)$，$(3,-1,2)$，M 为 $\triangle OAB$ 的重心，则 $\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{AB}=$ ________（其中 O 为坐标原点）.

(3) 设向量 $\boldsymbol{a}=(-1,3,0)$，$\boldsymbol{b}=(3,1,0)$ 及向量 $\boldsymbol{c}$，如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 ________.

(4) 设 $\boldsymbol{x}$ 是与 yOz 平面平行且与向量 $\boldsymbol{a}=(3,4,3)$ 垂直的单位向量，则 $\boldsymbol{x}=$ ________.

(5) 设向量 $\boldsymbol{a}=(3,4,0)$，$\boldsymbol{b}=(1,2,2)$，则位于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角平分线上的单位向量为________.

(6) 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=$ ______.

(7) 设 xOy 平面上向量 $\overrightarrow{OA}=(\mathrm{e}^t\cos t,\mathrm{e}^t\sin t)$，当 t 从 0 变化到 1 时点 A 所描出的曲线的弧长 $=$ ________.

第二节　平面与空间直线

一、主要内容提要

1　平面

(1) 平面方程表示形式

平面方程有以下四种表示形式:

点法式:$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ (其中 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是该平面上的点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是该平面的法向量);

一般式:$Ax+By+Cz+D=0$ (其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 是该平面的法向量);

截距式:$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$(其中 a,b,c 分别为该平面在 x 轴,y 轴及 z 轴的截距);

三点式:$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ (其中 $M_i(x_i,y_i,z_i),i=1,2,3$ 是该平面上不共线的三点).

(2) 点到平面的距离

点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 π:$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(3) 两平面的夹角

设平面 π_i:$A_ix+B_iy+C_iy+D_i=0(i=1,2)$,则称 π_1 与 π_2 的法向量之间的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 为 π_1 与 π_2 的夹角. 于是

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\times\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

由此可知:

π_1 与 π_2 相互垂直的充分必要条件为 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. 此外,

π_1 与 π_2 相互平行的充分必要条件为$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$;

π_1 与 π_2 重合的充分必要条件为$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.

2　空间直线

(1) 空间直线方程表示形式

空间直线方程有以下三种表示形式:

点向式:$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ (其中 $M(x_0,y_0,z_0)$ 是该直线上的一点,$\boldsymbol{s}=(l,m,n)$ 是该直线的方向向量);

参数式：$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt \end{cases}$（其中 $M(x_0, y_0, z_0)$ 是该直线上的一点，$\boldsymbol{s} = (l, m, n)$ 是该直线的方向向量）；

一般式：$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$（即将直线看作两个平面的交线，其中两平面的法向量不平行）.

（2）点到空间直线的距离

点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 到空间直线 $L: \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ 的距离为

$$d = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ l & m & n \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

（3）两条空间直线的夹角

设空间直线 $L_i: \dfrac{x - x_i}{l_i} = \dfrac{y - y_i}{m_i} = \dfrac{z - z_i}{n_i}$ $(i = 1, 2)$，则称 L_1 与 L_2 的方向向量之间的夹角 $\varphi\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 为 L_1 与 L_2 的夹角. 于是

$$\cos\varphi = \frac{|l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \times \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

由此可知：

L_1 与 L_2 相互垂直的充分必要条件为 $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$. 此外，

L_1 与 L_2 相互平行的充分必要条件为 $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$；

L_1 与 L_2 重合的充分必要条件为 $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$，且 L_1，L_2 有公共点.

3　空间直线与平面的夹角

设空间直线 $L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ 及平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$，则称 L 的方向向量与 π 的法向量之间的夹角的余角 $\varphi\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 为 L 与 π 的夹角. 于是

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \times \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

由此可知：

L 与 π 相互平行的充分必要条件为 $Al + Bm + Cn = 0$；

L 位于 π 上的充分必要条件为 $Al + Bm + Cn = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. 此外，

L 与 π 相互垂直的充分必要条件为 $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

二、疑问与解答

问 1　平面方程有四种不同表示形式，它们之间如何相互转化？

答　这里用例子来说明四种表示形式之间的相互转化.

例 2.1　写出平面 $\pi: 4x-2y+z=2$ 的另三种表示形式.

解　由所给的方程可知点 $(0,0,2)$ 在 π 上，π 的法向量为 $(4,-2,1)$，所以 π 的点法式方程为 $4x-2y+(z-2)=0$；

由于 π 不通过原点，所以它的截距式方程为 $\dfrac{x}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$；

由 π 方程可知 $(0,0,2)$，$(0,-1,0)$ 及 $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ 是 π 上的三个点，且它们不共线，所以，π 的三点式方程为 $\begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & -1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 \end{vmatrix}=0$.

例 2.2　设平面 π 通过不共线的三点 $(0,1,1)$，$(1,-1,2)$，$(2,0,1)$，写出 π 的四种不同形式的方程.

解　π 的三点式方程为

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0, \qquad ①$$

由 ① 得　$x+2(y-1)+3(z-1)=0$.　（π 的点法式方程）　②

由 ② 得　$x+2y+3z-5=0$.　（π 的一般式方程）　③

由 ③ 得　$\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{\frac{5}{2}}+\dfrac{z}{\frac{5}{3}}=1$.　（$\pi$ 的截距式方程）

问 2　空间直线方程有三种不同表示形式，它们之间如何相互转化？

答　这里用例子说明三种不同表示形式之间的相互转化.

例 2.3　设空间直线 L 的点向式方程为 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$，写出 L 的其他形式的方程.

解　令 $t=\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$，则得 L 的参数式方程为

$$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=-2+2t, \\ z=1+t. \end{cases}$$

由所给方程得 L 的一般式方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2},\\ \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{z-1}{1},\end{cases}\text{即}\begin{cases}2x-y=0,\\ x-z+2=0.\end{cases}$$

例 2.4　设空间直线 L 的一般式方程为$\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\ 2x-y-10z+3=0,\end{cases}$写出 L 的其他形式的方程.

解　由于 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与平面 $x+3y+2z+1=0$ 及平面 $2x-y-10z+3=0$ 的法向量都垂直,所以可以取

$$\boldsymbol{s}=(1,3,2)\times(2,-1,-10)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=(-28,14,-7).$$

此外,点$\left(-\dfrac{10}{7},\dfrac{1}{7},0\right)$在 L 上,所以 L 的点向式方程为

$$\frac{x+\frac{10}{7}}{-28}=\frac{y-\frac{1}{7}}{14}=\frac{z}{-7}\text{ 即 }\frac{x+\frac{10}{7}}{4}=\frac{y-\frac{1}{7}}{-2}=\frac{z}{1}.$$

令 $t=\dfrac{x+\frac{10}{7}}{4}=\dfrac{y-\frac{1}{7}}{-2}=\dfrac{z}{1}$,则 L 的参数式方程为

$$\begin{cases}x=-\dfrac{10}{7}+4t,\\ y=\dfrac{1}{7}-2t,\\ z=t.\end{cases}$$

问 3　确定平面或空间直线的关键是什么?

答　由于平面是由其上一点与法向量确定,因此确定一个平面的关键是求出其上的一点和法向量. 同样,由于空间直线是由其上一点与方向向量确定,因此确定一条直线的关键是求出其上的一点和方向向量.

例 2.5　求过点 $M(1,2,3)$,且与空间直线 L_1:$\begin{cases}x=1,\\ y=-1+t,\\ z=2+t\end{cases}$ 和 L_2:$\dfrac{x-1}{2}=y-1=\dfrac{z+1}{2}$ 都平行的平面 π 的方程.

解　L_1 的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(0,1,1)$,L_2 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(2,1,2)$.

由于 π 通过点 $M(1,2,3)$,其法向量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(1,2,-2),$$

所以 π 的方程为

$$(x-1)+2(y-2)-2(z-3)=0,\text{即 } x+2y-2z+1=0.$$

例 2.6　设 L_1,L_2 是两条共面的空间直线,其中 L_1 的方程为$\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-5}{1}$,$L_2$ 通

过点 $M_0(2,-3,-1)$，且与 x 轴正向的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，与 z 轴正向夹角为锐角，求 L_2 的方程.

解　记 $M_1=(7,3,5)$（L_1 上的点），L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1$，L_2 的单位方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则根据题意知 $\overrightarrow{M_0M_1}=(5,6,6)$，$\boldsymbol{s}_1=(1,1,1)$，$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma>0$.

由于 L_1，L_2 共面，所以 $\overrightarrow{M_0M_1}$，$\boldsymbol{s}_1$，$\boldsymbol{s}_2=\left(\frac{1}{2},\cos\beta,\cos\gamma\right)$ 的混合积为 0，即

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}=0.$$

由此得 $\cos\beta=\cos\gamma$. 将它代入 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 得 $\cos\beta=\cos\gamma=\sqrt{\frac{3}{8}}$. 所以 $\boldsymbol{s}_2=\left\{\frac{1}{2},\sqrt{\frac{3}{8}},\sqrt{\frac{3}{8}}\right\}$. 于是，$L_2$ 的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{1}{2}}=\frac{y+3}{\sqrt{\frac{3}{8}}}=\frac{z+1}{\sqrt{\frac{3}{8}}}，\text{即}\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{\sqrt{6}}=\frac{z+1}{\sqrt{6}}.$$

问 4　我们知道，过空间直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad ①$$

或

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad ②$$

（其中，λ，μ 为不全为零的参数）. 那么，这一“平面束”意味着什么？

答　过 L 的平面束是过 L 的平面的集合，即任一过 L 的平面方程都可以适当地选取参数 λ 或 μ 而表示成 ① 或 ② 的形式；反之，对任一具有形如 ① 或 ② 的方程都表示通过 L 的平面.

要从过某条空间直线 L 的众多平面中寻找满足某些条件的平面，使用“平面束”解题往往是比较方便的.

例 2.7　设 π 是过空间直线 $L:\begin{cases}3x-2y+2=0,\\ x-2y-z+6=0\end{cases}$ 的平面，且点 $M(1,2,1)$ 到 π 的距离为 1，求 π 的方程.

解　设过 L 的平面束方程为

$$\lambda(3x-2y+2)+(x-2y-z+6)=0,$$

即

$$(3\lambda+1)x+(-2\lambda-2)y+(-z)+(2\lambda+6)=0. \qquad ①$$

由点 M 到 π 的距离为 1 知，λ 必须满足

$$1=\frac{|(3\lambda+1)+(-2\lambda-2)\times 2+(-1)+2\lambda+6|}{\sqrt{(3\lambda+1)^2+(-2\lambda-2)^2+(-1)^2}}，\text{即 } 6\lambda^2+5\lambda+1=0.$$

解此方程得 $\lambda=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$.

将 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 代入 ① 得 $x+2y+2z-10=0$；将 $\lambda=-\frac{1}{3}$ 代入 ① 得 $4y+3z-16=0$.

因此 π 的方程为 $x+2y+2z-10=0$ 或 $4y+3z-16=0$.