

全国各类成人高考
高中起点升本、专科

数学

(文史财经类)

考点精解与应试模拟

2011
年版

付以伟 主编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国各类成人高考(高中起点升本、专科)

数学(文史财经类) 考点精解与应试模拟

Quanguo Gelei Chengren Gaokao
(Gaozhong Qidian Sheng Ben-zhuanke)

Shuxue(Wen-shi-cai-jing Lei)

Kaodian Jingjie yu Yingshi Moni

(2011 年版)

主编 付以伟

参编 王玲华

刘涤非

石晓兵
颖



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

数学(文史财经类)考点精解与应试模拟:2011年版/付以伟主

编. —北京:高等教育出版社,2011.5

全国各类成人高考·高中起点升本、专科

ISBN 978-7-04-032119-7

I. ①数… II. ①付… III. ①数学-成人高等教育-入学考试-
解题 IV. ①G723.46

中国版本图书馆 CIP数据核字(2011)第 069210号

策划编辑 李 宁
责任校对 殷 然

责任编辑 雷旭波
责任绘图 郝 林

封面设计 张 志
责任印制 田 甜

版式设计 马敬茹

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京铭传印刷有限公司
开 本 787×1092 1/16
印 张 7.75
字 数 180 000
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2011年5月第1版
印 次 2011年5月第1次印刷
定 价 15.30元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 32119-00

出版前言

为了帮助广大考生复习备考,本社根据教育部新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(高中起点升本、专科)(2011年版)》所规定的考试内容及要求,组织作者新编了这套《全国各类成人高考(高中起点升本、专科)考点精解与应试模拟(2011年版)》,亦即本版《全国各类成人高考(高中起点升本、专科)复习指导丛书(第15版)》的配套读物。本丛书包括《语文考点精解与应试模拟》、《数学(文史财经类)考点精解与应试模拟》、《数学(理工农医类)考点精解与应试模拟》、《英语考点精解与应试模拟》、《历史考点精解与应试模拟》、《地理考点精解与应试模拟》、《物理考点精解与应试模拟》和《化学考点精解与应试模拟》共8册。

本丛书具有以下几个特点:

1. 解析精要,针对性强。丛书各科的“考点精解”部分力求以精练简洁的文字及精选的历年试题来全面解说《复习考试大纲》之考试内容,并辅以解题技巧,以逆向思维的方式,力助考生把握考试内容,强化应试能力。丛书各科的模拟试卷部分亦严格按照《复习考试大纲》所规定的题型、内容和难易比例编写,全面覆盖了《复习考试大纲》的知识点。在每套模拟试卷后,不仅给出了“参考答案”,而且还设有“解题指要”,即扼要指出该题所考查的能力、解题方法及考生解题时应注意的问题等,实用性、针对性强,可使考生通过做题而举一反三、融会贯通地掌握所学知识。

2. 结构新颖,学练结合。丛书各科的内容分为上下两编;上编为考点精解,下编为应试模拟;既有理论层面(基础知识)的精讲,又有实践层面(模拟试题)的精练;学练结合,便于经过第一轮基础知识复习的考生通过对本书的学与练,巩固考纲所要求掌握的知识,从容应对考试。

3. 名师荟萃,质量可靠。本丛书的作者均为长期从事成人高考命题研究的专家、学者及一线辅导教师,他们熟谙成人高考命题的思路、原则、方法以及考生的知识基础状况,具有丰富的经验。

我们恳切希望广大读者能就本丛书的编写出版提出意见和建议,以利于今后进一步修订和完善。最后衷心祝愿广大考生取得优异成绩!

高等教育出版社

2011年4月

目 录

上编 考点精解

代数	3
第一章 集合和简易逻辑	3
第二章 函数	6
第三章 不等式和不等式组	16
第四章 数列	18
第五章 导数	23
三角	28
第六章 三角函数及其有关概念	28
第七章 三角函数式的变换	31
第八章 三角函数的图像和性质	33
第九章 解三角形	35
平面解析几何	38
第十章 平面向量	38
第十一章 直线	41
第十二章 圆锥曲线	44
概率与统计初步	52
第十三章 排列、组合	52
第十四章 概率初步	55
第十五章 统计初步	57

下编 应试模拟

数学(文史财经类)模拟试卷(一)	63
数学(文史财经类)模拟试卷(一) 参考答案及解题指要	67
数学(文史财经类)模拟试卷(二)	74
数学(文史财经类)模拟试卷(二) 参考答案及解题指要	78
数学(文史财经类)模拟试卷(三)	84
数学(文史财经类)模拟试卷(三) 参考答案及解题指要	88
数学(文史财经类)模拟试卷(四)	95
数学(文史财经类)模拟试卷(四) 参考答案及解题指要	99
数学(文史财经类)模拟试卷(五)	106
数学(文史财经类)模拟试卷(五) 参考答案及解题指要	110

上编

考点精解

代 数

第一章 集合和简易逻辑

一、常见考试知识点

1. 集合的意义及其表示法

(1) 集合. 把按某种属性能确定的一些对象看成一个整体, 就形成一个集合. 每一个确定了的对象就叫做集合的一个元素.

(2) 集合表示法.

① 列举法. 把集合的元素一一列出, 并把它写在大括号内, 这种表示集合的方法就叫做列举法. 例如: 不大于 6 的正整数构成的集合就可以表示为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

② 描述法. 在大括号内, 先写出元素的一般形式, 后面画一条竖线, 竖线后写出集合元素的共同属性, 这种表示集合的方法叫做描述法. 例如: 大于 2 且小于 5 的所有实数组成的集合可表示为: $\{x | 2 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$.

③ 区间法. 介于某两个实数 a, b ($a < b$) 之间的所有实数组成的集合, 可用区间表示. 具体为:

$$(a, b) = \{x | a < x < b, a, b \in \mathbf{R}\},$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b, a, b \in \mathbf{R}\},$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b, a, b \in \mathbf{R}\},$$

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, a, b \in \mathbf{R}\}.$$

2. 交集与并集

设有两个集合 A, B .

集合 A 与 B 的交集指的是由 A, B 的共同元素组成的集合, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

集合 A 与 B 的并集指的是由 A 或 B 的元素 (即 A 和 B 的所有不同元素) 组成的集合, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

3. 充分条件、必要条件和充分必要条件

在数学中,一个数学命题常常写成“如果 A 成立,那么 B 成立”.

(1) 充分条件. 如果 A 成立,那么 B 成立,可表示为“ $A \Rightarrow B$ ”(读作“ A 推出 B ”),此时称条件 A 是 B 的充分条件.“ $A \Rightarrow B$ ”的常见等价说法有:“ A 成立能保证 B 成立”,或“只要 A 成立, B 就一定成立”等.

(2) 必要条件. 如果 B 成立,那么 A 成立,即“ $B \Rightarrow A$ ”,此时称 A 是 B 的必要条件.“ $B \Rightarrow A$ ”的常见等价说法有:“ A 是 B 成立的必不可少的条件”,或“没有 A 成立, B 就不可能成立”,或“ A 不成立, B 必不成立”等.

(3) 充分必要条件(简称充要条件). 既有“ $A \Rightarrow B$ ”,又有“ $B \Rightarrow A$ ”,可表示为“ $A \Leftrightarrow B$ ”,即 A 既是 B 的充分条件,又是 B 的必要条件,就说 A 是 B 的充分必要条件,简称充要条件.

二、常见试题与解题技巧

1. 集合、交集和并集

例 1(0801*) 设集合 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $\{4\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ (C) $\{2, 4, 6\}$ (D) $\{1, 2, 3\}$

解析 $A \cup B$ 是两个集合的并集,是由 A 的元素或 B 的元素(即 A, B 的所有不同元素)组成的集合,故选(B).

例 2(0901) 设集合 $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 3, 5\}$, 则 $M \cap N =$

- (A) $\emptyset$ (B) $\{1, 3\}$ (C) $\{5\}$ (D) $\{1, 2, 3, 5\}$

解析 $M \cap N$ 是两个集合的交集,是由两个集合的共同元素组成的集合,故选择(B).

例 3(1001) 设集合 $M = \{x | x \geq -3\}$, $N = \{x | x \leq 1\}$, 则 $M \cap N =$

- (A) $\mathbf{R}$ (B) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$ (C) $[-3, 1]$ (D) $\emptyset$

解析 $M \cap N = \{x | x \geq -3 \text{ 且 } x \leq 1\} = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$,

故选(C).

评注 (1) $A \cup B$ 与 $A \cap B$ 的记号不要搞错,即“ $\cup$ ”为并,“ $\cap$ ”为交.

(2) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, 而不是 $\{1, 2, 3, 2, 3, 4\}$. 这是因为一个集合中的各元素是互异的,有两个元素相同时只能取其中的一个. 另外,用列举法表示集合时,其中的元素是没有先后顺序的,即 $\{1, 2, 3, 4\}$ 与 $\{1, 3, 2, 4\}$ 这两个集合是一样的.

2. 充分条件、必要条件、充分必要条件

例 4(0605) 设甲: $x = 1$, 乙: $x^2 - x = 0$, 则

- (A) 甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件
(B) 甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件
(C) 甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件
(D) 甲是乙的充分必要条件

解析 若 $x = 1$, 则 $x^2 - x = 0$, 所以甲是乙的充分条件.

又 $x^2 - x = 0$ 时,解得 $x = 0$ 或 $x = 1$, 所以甲不是乙的必要条件,故选(A).

* 0801 是指成人高考高中起点升本、专科数学(文史财经类)考试 2008 年的第 1 题,1010 是指 2010 年的第 10 题,其余以此类推.

例 5(0708) 若 x, y 为实数, 设甲: $x^2 + y^2 = 0$, 乙: $x = 0$ 且 $y = 0$, 则

- (A) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
 (B) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
 (C) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件
 (D) 甲是乙的充分必要条件

解析 由 $x^2 + y^2 = 0$ 知 $x = y = 0$. 反之, 若 $x = y = 0$, 则 $x^2 + y^2 = 0$, 故选 (D).

例 6(0903) 设 a, b 为实数, 则 $a^2 > b^2$ 的充分必要条件为

- (A) $|a| > |b|$ (B) $a > b$ (C) $a < b$ (D) $a > -b$

解析 解法 1 $a^2 > b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$, 即 $|a| > |b|$ (利用不等式的基本性质).

解法 2 可用排除法或特殊值法. 如:

$3 > -4 \nRightarrow 3^2 > (-4)^2$, 排除 (B);

$-3 < 4 \nRightarrow (-3)^2 > 4^2$, 排除 (C);

$-3 > -4 \nRightarrow (-3)^2 > 4^2$, 排除 (D).

例 7(0804) 设甲: $x = \frac{\pi}{6}$, 乙: $\sin x = \frac{1}{2}$, 则

- (A) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
 (B) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
 (C) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件
 (D) 甲是乙的充分必要条件

解析 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, 可知 $\sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. 但当 $\sin x = \frac{1}{2}$ 时, x 的值未必是 $\frac{\pi}{6}$, 还可以是其他值,

如 $\frac{5}{6}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6}$ 等, 故选 (B).

例 8(1005) 设甲: $x = \frac{\pi}{2}$, 乙: $\sin x = 1$, 则

- (A) 甲是乙的必要条件, 但不是乙的充分条件
 (B) 甲是乙的充分条件, 但不是乙的必要条件
 (C) 甲不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件
 (D) 甲是乙的充分必要条件

解析 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. 但当 $\sin x = 1$ 时, x 的值未必是 $\frac{\pi}{2}$, 还可以是其他值, 如 $\frac{5}{2}\pi$,

$-\frac{3}{2}\pi$ 等, 故选择 (B).

评注 充要条件是数学中的重要概念, 涉及范围较为广泛. 对文史财经类考生只要求会判断是充分条件、必要条件, 或是充分必要条件, 这是每年成人高考数学的必考内容之一.

第二章 函 数

一、常见考试知识点

1. 函数的概念及常见函数的定义域

- (1) 分式函数的定义域是使分母不等于0的 x 的取值范围.
 (2) 二次根式函数的定义域是使被开方式大于或等于0的 x 的取值范围.
 (3) 对数函数的定义域是使其真数大于0的 x 的取值范围.

2. 函数的单调性和奇偶性

(1) 单调性. 定义在某个区间上的函数 $f(x)$, x_1, x_2 是该区间上的任意两个值. 若 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为该区间上的单调增加函数; 若 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为该区间上的单调减少函数. 单调增加函数的图像是上升的, 单调减少函数的图像是下降的. 单调增加函数和单调减少函数统称单调函数. 若在一个区间上函数 $f(x)$ 是单调的, 这个区间就叫做该函数的单调区间.

(2) 奇偶性. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若 $x \in D$, 必有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 就称 $f(x)$ 为偶函数. 偶函数的图像必然关于 y 轴成轴对称图形. 若 $x \in D$, 必有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = -f(x)$ 恒成立, 就称 $f(x)$ 为奇函数. 奇函数的图像必然关于原点成中心对称图形.

3. 指数和对数

(1) 有理指数幂的概念.

① 正整数指数幂:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n\text{个}} \quad (n \in \mathbf{N}_+, \text{且 } n > 1).$$

② 零指数幂:

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

③ 负整数指数幂:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0, m \in \mathbf{N}_+).$$

④ 分数指数幂:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0, m, n \in \mathbf{N}_+, \text{且 } n > 1),$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}_+, \text{且 } n > 1).$$

(2) 幂的运算法则.

设 $a > 0, b > 0$, 且 $x, y \in \mathbf{R}$, 则有:

$$\text{① } a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

$$\text{② } (a^x)^y = a^{xy}.$$

$$\text{③ } (ab)^x = a^x b^x.$$

(3) 对数的概念和性质.

① 如果 $a^b = N$ ($a > 0, a \neq 1$), 那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数, 记作 $b = \log_a N$. 这里 a 叫做底数, N 叫做真数.

② 对数有以下基本性质:

(i) 零和负数没有对数, 即真数大于 0.

(ii) 底数的对数等于 1, 即 $\log_a a = 1$.

(iii) 1 的对数等于 0, 即 $\log_a 1 = 0$.

(iv) 以 a 为底的 a^n 的对数等于 n , 即 $\log_a a^n = n$.

(4) 对数的运算法则.

若 $M > 0, N > 0$, 则有:

① $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$.

② $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$.

③ $\log_a M^n = n \log_a M$.

④ $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ (其中 n 为大于 1 的正整数).

4. 一次函数

(1) 定义.

函数 $y = kx + b$ 叫做一次函数, 其中 k 与 b 是常数, 且 $k \neq 0$.

当 $b = 0$ 时, 函数 $y = kx$ 叫做正比例函数 (此时也说 y 与 x 成正比例).

(2) 定义域与值域.

一次函数的定义域与值域都是 $\mathbf{R}$.

(3) 图像.

正比例函数 $y = kx$ 的图像是经过原点 $(0, 0)$ 与点 $(1, k)$ 的直线. 一次函数 $y = kx + b$ 的图像是经过点 $(0, b)$ 且与直线 $y = kx$ 平行的直线, 如图 1-2-1 所示.

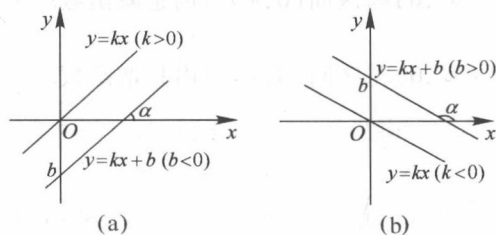


图 1-2-1

(4) 性质——单调性、奇偶性.

$y = kx + b$ 当 $k > 0$ 时在 $(-\infty, +\infty)$ 内为增函数, 即 y 值随 x 值的增大而增大, 此时直线对于 x 轴的倾斜角 α 是锐角 (如图 1-2-1(a)). $y = kx + b$ 当 $k < 0$ 时在 $(-\infty, +\infty)$ 内为减函数, 即 y 值随 x 值的增大而减小, 此时直线对于 x 轴的倾斜角 α 是钝角 (如图 1-2-1(b)).

$y = kx$ 是奇函数.

$b \neq 0$ 时, $y = kx + b$ 为非奇非偶函数.

5. 反比例函数

(1) 定义.

函数 $y = \frac{k}{x}$ 叫做反比例函数(此时也说 y 与 x 成反比例), 其中 k 是不等于零的常数.

(2) 定义域与值域.

反比例函数的定义域与值域都是

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

(3) 图像.

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像是以原点为对称中心, $y = \pm x$ 为对称轴, 上、下可与 y 轴无限靠近, 左、右可与 x 轴无限靠近的等轴双曲线. 当 $k > 0$ 时, 双曲线的两支分别在第一与第三象限(图 1-2-2(a)); 当 $k < 0$ 时, 双曲线的两支分别在第二与第四象限(图 1-2-2(b)).

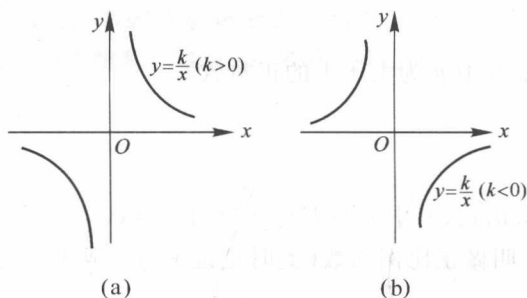


图 1-2-2

(4) 性质——单调性、奇偶性.

① $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 内是减函数.

② $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 内是增函数.

③ $y = \frac{k}{x}$ 是奇函数.

6. 二次函数

(1) 定义.

函数 $y = ax^2 + bx + c$ 叫做二次函数, 其中 a, b, c 是常数, 且 $a \neq 0$.

(2) 定义域.

二次函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

(3) 图像.

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 是顶点为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$ 的抛物线. 当 $a > 0$ 时开口向上(如图 1-2-3(a)); 当 $a < 0$ 时开口向下(如图 1-2-3(b)).

(4) 性质——单调性、最大值与最小值、奇偶性、对称性.

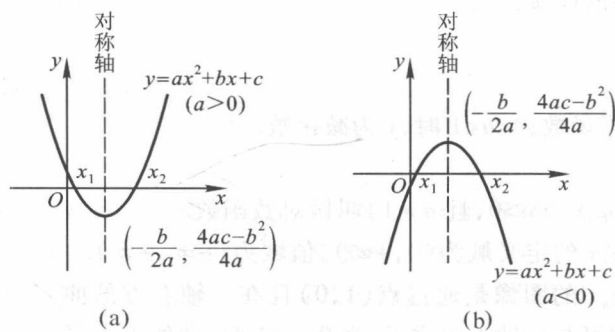


图 1-2-3

① $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上为减函数, 在区间 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上为增函数. 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 取得最小值, $y_{\text{最小值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$; y 无最大值.

此时二次函数的值域为 $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right)$.

② $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 在区间 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ 上为增函数, 在区间 $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ 上为减函数. 当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时, y 取得最大值, $y_{\text{最大值}} = \frac{4ac - b^2}{4a}$; y 无最小值.

此时二次函数的值域为 $\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$.

③ $y = ax^2$ 是偶函数.

④ 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0), (x_2, 0)$, 则对称轴方程为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

这说明对称轴方程的 x 值为两根 x_1, x_2 的平均值, 也是抛物线顶点的横坐标. 解题时注意应用.

⑤ 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $y = ax^2$ ($a > 0$) 的图像之间是平移的关系: $y = ax^2$ 的图像经左、右或上、下平移可得 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像; 反之, $y = ax^2 + bx + c$ 的图像也可经平移得到 $y = ax^2$ 的图像.

7. 指数函数和对数函数

(1) 指数函数.

① 定义. 函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做指数函数.

② 指数函数 $y = a^x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 即 $(-\infty, +\infty)$; 值域为 $\mathbf{R}^+$, 即 $(0, +\infty)$.

③ 指数函数 $y = a^x$ 的图像是通过点 $(0, 1)$ 且在 x 轴上方的曲线. 当 $a > 1$ 时, 曲线左方可与 x 轴无限靠近; 当 $0 < a < 1$ 时, 曲线右方可与 x 轴无限靠近, 如图 1-2-4 所示.

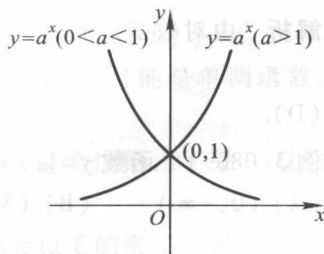


图 1-2-4

④ 指数函数 $y=a^x$ 的性质:

(i) $a^0=1, a^1=a$.

(ii) $a^x>0$ ($x \in \mathbf{R}$).

(iii) $a>1$ 时, y 为增函数; $0<a<1$ 时, y 为减函数.

(2) 对数函数.

① 定义. 函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a \neq 1$) 叫做对数函数.

② 对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$.

③ 对数函数 $y=\log_a x$ 的图像是通过点 $(1, 0)$ 且在 y 轴右方的曲线. 当 $a>1$ 时, 曲线下方可与 y 轴无限靠近; 当 $0<a<1$ 时, 曲线上方可与 y 轴无限靠近, 如图 1-2-5 所示.

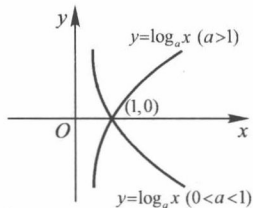


图 1-2-5

④ 对数函数 $y=\log_a x$ 的性质:

(i) $\log_a 1=0, \log_a a=1$.

(ii) 零和负数没有对数.

(iii) $a>1$ 时, y 在区间 $(0, +\infty)$ 内是增函数; $0<a<1$ 时, y 在区间 $(0, +\infty)$ 内是减函数.

二、常见试题与解题技巧

1. 求函数的定义域

例 1(0614) 函数 $f(x)=\log_3(3x-x^2)$ 的定义域是

(A) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

(B) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$

(C) $(0, 3)$

(D) $(-3, 0)$

解析 解法 1 由对数函数知, 其真数要求为正数, 所以

$$3x-x^2>0, \text{ 即 } x^2-3x<0,$$

也即

$$x(x-3)<0, \text{ 解得 } 0<x<3,$$

故选(C).

解法 2 用特殊值法进行排除.

因为 $x=1$ 时 $f(x)$ 有意义, 故 1 应在定义域内, 而 $1 \notin (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$, 所以排除(A).

同理, 因为 $1 \notin (-3, 0)$, 所以排除(D).

又 $4 \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, 但 $3 \times 4 - 4^2 < 0$, 所以排除(B), 故选择(C).

例 2(0701) 函数 $y=\lg(x-1)$ 的定义域为

(A) $\mathbf{R}$

(B) $\{x|x>0\}$

(C) $\{x|x>2\}$

(D) $\{x|x>1\}$

解析 由对数函数的定义知其真数为正数, 所以

$$x-1>0, \text{ 即 } x>1,$$

故选(D).

例 3(0809) 函数 $y=\lg x + \sqrt{3-x}$ 的定义域是

(A) $(0, +\infty)$

(B) $(3, +\infty)$

(C) $(0, 3]$

(D) $(-\infty, 3]$

解析 列出使各部分都有意义的不等式组: $\begin{cases} x>0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases}$ 解之, 即得 $0<x \leq 3$, 故选(C).

例 4(1013) 函数 $y=\sqrt{4-|x|}$ 的定义域是

(A) $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

(B) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(C) $[-4, 4]$

(D) $[-2, 2]$

解析 根据二次根式的要求,被开方式应大于或等于0,即

$$|x| \leq 4, \text{解得 } -4 \leq x \leq 4,$$

故选(C).

评注 求函数的定义域,就是求使得函数式有意义的 x 的取值范围,这是函数概念的重要组成部分,是考试的必考内容之一.这类试题的常见求解方法是根据二次根式、分式或对数函数的要求列出不等式或不等式组,从而转化为解不等式的问题.有时也可应用特殊值法进行排除(如例1).

2. 函数的性质——奇偶性和单调性

例5(0607) 下列函数中为偶函数的是

(A) $y=2^x$

(B) $y=2x$

(C) $y=\log_2 x$

(D) $y=2\cos x$

解析 从选项可知,只有 $\cos x$ 为偶函数,故选(D).

例6(0707) 下列函数中,既不是奇函数也不是偶函数的是

(A) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(B) $f(x) = x^2 + x$

(C) $f(x) = \cos \frac{x}{3}$

(D) $f(x) = \frac{2}{x}$

解析 容易判断(A)是偶函数,因为式中只有 x^2 项.而(C)是偶函数,(D)是奇函数,故只有(B)是非奇非偶函数.

例7(0806) 下列函数中,为奇函数的是

(A) $y=\log_3 x$

(B) $y=3^x$

(C) $y=3x^2$

(D) $y=3\sin x$

解析 对数函数、指数函数都是非奇非偶函数,从而排除(A)、(B). (C)中二次函数只有平方项,所以是偶函数. (D)中的正弦函数是奇函数,故选(D).

例8(1015) 设函数 $f(x) = x^2 + (m-3)x + 3$ 是偶函数,则 $m =$

(A) -3

(B) 1

(C) 3

(D) 5

解析 二次函数式中,只有在缺一次项时才是偶函数,故 $m-3=0$,即 $m=3$,选择(C).

也可利用偶函数的定义进行判断.因为 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(-x)=f(x)$,即

$$(-x)^2 + (m-3)(-x) + 3 = x^2 + (m-3)x + 3,$$

化简后,得 $2(m-3)x=0$.

因为 x 为任意实数,所以 $m-3=0$,即 $m=3$.

例9(0910) 下列函数中,在其定义域上为增函数的是

(A) $y=|x|$

(B) $y=x^2$

(C) $y=x^3$

(D) $y=x^4$

解析 从选项看,(A)、(B)、(D)都是偶函数,且定义域都是 $\mathbf{R}$,不可能是单调函数,故选(C).

评注 (1) 奇偶性和单调性是函数的基本性质,它们的定义也恰恰给出了最一般的判断方法.

(2) 简单函数的奇偶性与单调性未必都需要用定义判断.熟悉以下的事实对解题是有益的;

① 多项式函数中只有偶次项的是偶函数,只有奇次项的是奇函数(注意,常数项是 x 的零次项,应看成偶次项).

- ② 三角函数中, $\sin x, \tan x$ 是奇函数, $\cos x$ 是偶函数.
 ③ 指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 都是非奇非偶函数.
 ④ 偶函数(非零函数)不可能是单调函数.
 ⑤ 三角函数及其他周期函数在定义域内一般不是单调函数.
 ⑥ $a>1$ 时, $a^x, \log_a x$ 都是增函数; 而 $0<a<1$ 时, $a^x, \log_a x$ 都是减函数.

3. 指数运算和对数运算

例 10(0619) $\log_2 8 - 16^{\frac{1}{2}} =$ _____.

解析

$$\text{原式} = \log_2 2^3 - \sqrt{16} = 3 - 4 = -1.$$

例 11(0702) $\log_4 8 + \log_4 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^0 =$

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 0

解析

$$\text{原式} = \log_4 (8 \times 2) - 1 = \log_4 16 - 1 = \log_4 4^2 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

故选(C).

例 12(0803) $\log_2 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^0 =$

(A) 9

(B) 3

(C) 2

(D) 1

解析

$$\text{原式} = \log_2 2^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 2 - 1 = 1,$$

故选(D).

评注 (1) 对于指数运算, 应特别注意当 $a \neq 0$ 时, $a^0 = 1$.

(2) 对于对数运算, 当只有一个对数时, 应注意先将其真数写成底数的乘方, 再利用对数运算法则计算.

例如:

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3.$$

若有两个或多于两个同底的对数之和或差时, 可先根据对数运算法则化成一个对数, 再进一步计算.

例如:

$$\log_4 8 + \log_4 2 = \log_4 (8 \times 2) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2.$$

又如:

$$\log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2.$$

4. 一次函数和反比例函数

例 13(0608) 设一次函数的图像过点(1,1)和(-2,0), 则该一次函数的解析式为

(A) $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

(B) $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

(C) $y = 2x - 1$

(D) $y = x + 2$

解析 解法 1 设一次函数式为 $y = kx + b$.

因为一次函数的图像过点(1,1)和(-2,0), 所以这两个点的坐标满足一次函数式, 因此得到关于 k 和 b 的方程组: