普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 工程数学
# 数学物理方程
（第二版）

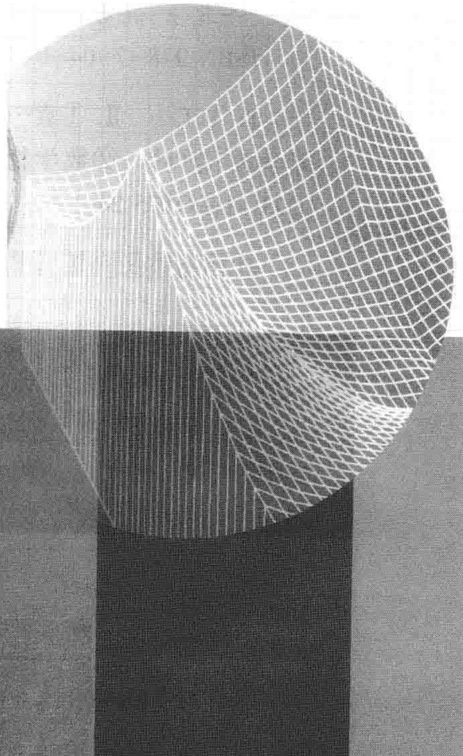
吉林大学数学学院
袁洪君　任长宇

高等教育出版社

普通高等教育"-

# 工程数学
# 数学物理方程
（第二版）

吉林大学数学学院
袁洪君　任长宇



Gongcheng Shuxue
Shuxue Wuli Fangcheng

内容提要

本书在第一版的基础上修订而成，书中主要介绍了求解数学物理方程的经典解法，包括分离变量法、积分变换法、行波法、格林函数法、特殊函数法、变分法以及差分法，并详细叙述了它们的物理意义。在本书最后一章，还介绍了偏微分方程的适定性理论。

新版在保留原来特色和风格的基础上，体系更加合理，具有更强的可读性和广泛的应用性，可作为理工科非数学类专业高年级本科生和研究生的教材，也可供从事数学物理方程方面研究的科技工作者参考。


**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学.数学物理方程/袁洪君，任长宇编.--2版.--北京：高等教育出版社，2015.7

ISBN 978-7-04-042778-3

Ⅰ.①工… Ⅱ.①袁… ②任… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材 ②数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11②O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第115868号

策划编辑 兰莹莹　责任编辑 田 玲　封面设计 赵 阳　版式设计 范晓红
插图绘制 郝 林　责任校对 窦丽娜　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市华润印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 11.5
字　　数 200千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2006年6月第1版
　　　　 2015年7月第2版
印　　次 2015年7月第1次印刷
定　　价 18.60元



本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有　侵权必究



物 料 号 42778-00

# 第二版前言

本书自2006年出版以来,至今已有9年,得到了国内同行和广大读者的广泛认可和支持,2007年被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。我们深知,一本好的教材,只有在教学实践过程中不断地充实更新,千锤百炼,才能在科学技术迅猛发展的时代满足读者的需要。借此再版之机,我们对本书第一版的内容作了如下修改:

1. 对全书的内容和文字作了进一步细致的审校、修改和充实,并适当补充了一些例题和注解。

2. 在第一章的小节3.1中增加了热传导方程的杜阿梅尔原理,在小节3.2中增加了弦振动方程的叠加原理。

3. 在第二章的§1中增加了齐次热传导方程的第一初边值问题,该节主要讨论第一初边值问题。在第二章的§2中增加了齐次弦振动方程的第二初边值问题,该节主要讨论第二初边值问题。

4. 将第二章§2中关于傅里叶积分的部分内容作了适当修改,移到第二章的§5中,并增加了傅里叶变换和拉普拉斯变换的部分内容。将§5中的内容分为傅里叶变换和拉普拉斯变换两个小节。

参加第二版修订的有袁洪君(第一、二章)、任长宇(第三至九章),袁洪君主持全书的修订工作。

本书的修订再版得到吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助,吴晓俐女士承担本系列教材修订的编务工作,在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,再加之时间仓促,书中难免还有一些错误和不妥之处,敬请读者批评指正。

编　者

2015年1月

# 第一版前言

随着计算机技术的发展,数学作为一种对实际问题模型化的方法和定量化处理信息的工具,形成了对自然科学、人文社会科学的发展起着重要推动作用的“数学技术”。这种技术的使用已经对社会的发展产生了巨大的经济效益。因此,大学数学的学习和教学越来越受到各学科的重视。理工科学生在完成微积分、线性代数和概率统计等基本数学课程的学习后,为了完成专业课程的学习,还必须学习数学物理方程等数学内容。

本书是吉林大学公共数学《工程数学》系列教材中的一册,不仅可以作为数学物理方程课程的独立教材,而且还可以作为理工科非数学专业本科生和研究生的参考书。

在本书的编写过程中我们作了以下几个方面的努力:

**1. 体现现代数学方法**。在注重数学物理方程的求解及其物理意义的同时,增加了“有限差分方法”等内容,以充实理工科学生的偏微分方程的现代研究方法。近年来,在工程力学中,“变分法”广泛而且有效地被应用,因此本书除了介绍一些经典的求解方法外,还增加了“变分法”在数学物理方程中的应用。同时,本书还体现了近些年迅猛发展和应用广泛的“偏微分方程适定性理论”的初步思想,并示范性地介绍了在工程中广泛使用的数学物理方程计算方法。

**2. 建立后续数学方法的接口**。在注重讲清数学方法的物理背景和意义的同时,还介绍了数学方法在实际问题中的应用前景和进一步的作用,为读者今后的学习、工作提供了方便。

**3. 考虑专业应用和培养动手能力**。为了增强适用性,本书充分体现偏微分方程的现代研究方法,列举了工程中的应用问题,提供了解决这些问题的数学思想,注意培养理工科学生的动手操作能力。

**4. 系统性与简洁性相结合**。在保持数学知识的系统性和严密性的同时,我们充分考虑了物理背景和应用前景的介绍。与此同时,在内容的选材和叙述方面,行文力求简洁明了。

在本书的编写过程中,得到了吉林大学教务处和数学学院的大力支持。李

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

辉来教授、吴晓俐女士对本书的编写给予了热情的支持和帮助，王军林、孙鹏、郭颖、陈明杰和姜政毅承担了本书的排版和制图工作，在教材的试用过程中，孙鹏还提出了一些宝贵的意见，在此一并致谢。

李辉来教授承担了全书的审阅工作。

由于编者水平所限，书中的错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以期不断完善。

编　者

2006 年 1 月

# 目　　录

第一章　数学物理方程概述 …… 1
§1　偏微分方程举例和基本概念 …… 1
1.1　偏微分方程举例 …… 1
1.2　基本概念 …… 2
§2　方程及定解问题的物理推导 …… 3
2.1　弦振动方程 …… 3
2.2　薄膜平衡方程 …… 5
2.3　热传导方程 …… 7
2.4　定解条件和定解问题 …… 10
§3　两个重要原理 …… 13
3.1　杜阿梅尔原理 …… 13
3.2　叠加原理 …… 16
习题一 …… 18
第二章　分离变量法和积分变换法 …… 20
§1　齐次方程的第一初边值问题 …… 20
1.1　有界弦的自由振动 …… 20
1.2　解的物理意义 …… 25
1.3　热传导方程的第一初边值问题 …… 26
§2　齐次方程的第二初边值问题 …… 28
2.1　热传导方程的第二齐边值问题 …… 28
2.2　弦振动方程的第二初边值问题 …… 30
§3　二维拉普拉斯方程 …… 32
3.1　圆域内的第一边值问题 …… 32
3.2　圆域外的第一边值问题 …… 35
§4　非齐次定解问题的解法 …… 36
4.1　非齐次方程的求解 …… 36
4.2　非齐次边界条件的处理 …… 40

4.3 特殊的方程非齐次项处理 …… 41
§5 积分变换法 …… 43
5.1 傅里叶变换法 …… 43
5.2 拉普拉斯变换法 …… 50
习题二 …… 53
**第三章 行波法** …… 56
§1 弦振动方程的初值问题 …… 56
1.1 达朗贝尔公式 …… 56
1.2 达朗贝尔解的物理意义 …… 58
1.3 二阶偏微分方程的分类 …… 59
§2 高维齐次波动方程 …… 63
2.1 三维波动方程(平均值法) …… 63
2.2 二维波动方程(降维法) …… 65
2.3 泊松公式的物理意义 …… 66
§3 非齐次波动方程 …… 68
习题三 …… 70
**第四章 格林函数法** …… 72
§1 拉普拉斯方程边值问题的提法 …… 72
§2 调和函数 …… 74
2.1 格林公式 …… 74
2.2 拉普拉斯方程的对称解 …… 75
2.3 调和函数的基本性质 …… 76
§3 格林函数 …… 80
3.1 格林函数的定义 …… 80
3.2 格林函数的性质和物理意义 …… 81
§4 几类特殊区域问题的求解 …… 82
习题四 …… 85
**第五章 勒让德多项式** …… 87
§1 勒让德方程的导出 …… 87
§2 勒让德方程的幂级数解 …… 88
§3 勒让德多项式 …… 91
§4 勒让德多项式的母函数及其递推公式 …… 93
4.1 勒让德多项式的母函数 …… 93
4.2 勒让德多项式的递推公式 …… 95

§5　勒让德多项式的正交性 …… 96
§6　勒让德多项式的应用 …… 98
习题五 …… 102
**第六章　贝塞尔函数** …… 104
§1　贝塞尔方程的导出 …… 104
§2　贝塞尔方程的级数解 …… 105
2.1　贝塞尔方程的求解 …… 105
2.2　贝塞尔方程的通解 …… 108
§3　贝塞尔函数的母函数及递推公式 …… 109
3.1　贝塞尔函数的母函数 …… 109
3.2　贝塞尔函数的递推公式 …… 110
§4　函数展成贝塞尔函数的级数 …… 113
4.1　贝塞尔函数零点的性质 …… 114
4.2　贝塞尔函数的正交性和归一性 …… 114
4.3　展开定理的叙述 …… 116
§5　贝塞尔函数的应用 …… 117
习题六 …… 121
**第七章　变分法** …… 123
§1　泛函和泛函的极值问题 …… 123
1.1　基本概念 …… 123
1.2　变分法基本引理 …… 125
1.3　泛函极值的必要条件 …… 125
1.4　泛函极值的充分条件 …… 129
§2　泛函的条件极值问题 …… 131
2.1　泛函的条件极值及其必要条件 …… 131
2.2　应用举例 …… 133
§3　变分法应用 …… 135
3.1　泛函极值问题与边值问题 …… 135
3.2　泛函极值问题的近似解法 …… 137
习题七 …… 140
**第八章　数学物理方程的有限差分法** …… 142
§1　差分方程的构造 …… 142
§2　调和方程的差分格式 …… 144
§3　热传导方程的差分格式 …… 146

§4 波动方程的差分格式 …………………………………………………… 148
习题八 ………………………………………………………………………… 150
**第九章 定解问题的适定性** ……………………………………………… 151
§1 适定性的概念 …………………………………………………………… 151
§2 古典解的存在性 ………………………………………………………… 152
§3 古典解的唯一性和稳定性 ……………………………………………… 154
3.1 能量积分 ……………………………………………………………… 155
3.2 古典解的唯一性 ……………………………………………………… 156
3.3 古典解的稳定性 ……………………………………………………… 157
习题九 ………………………………………………………………………… 158
**附录Ⅰ 一般形式的二阶线性常微分方程固有值问题的一些结论** ………… 160
**附录Ⅱ Γ函数的定义和基本性质** ………………………………………… 162
**部分习题参考答案** ………………………………………………………… 164
**参考文献** …………………………………………………………………… 169

# 第一章　数学物理方程概述

数学物理方程主要研究从物理学及其他各门自然科学、技术科学中产生的偏微分方程.这些方程以物理理论和实际作为基础和背景,反映了各个问题、模型内部各种物理量之间的制约关系,是连接数学与自然科学及工程技术领域之间的一个重要桥梁.本章首先列举几个典型的数学物理方程,使大家对数学物理方程有所认识;然后介绍三类典型方程的物理推导;最后,阐述数学物理方程中的两个重要原理.

## §1　偏微分方程举例和基本概念

### 1.1　偏微分方程举例

自然科学和工程技术中,种种运动的变化发展过程与平衡现象各自遵守一定的规律.这些规律都呈现在客观的时间和空间中,因此所研究的物理量一般都是多自变量的函数,而描述这些规律通常用关于某个或某些未知多元函数及其偏导数的数学方程式或方程组.方程中含有未知多元函数及其偏导数(也可仅含有偏导数)的方程称为**偏微分方程**.描述物理规律的偏微分方程称为**数学物理方程**.

**例 1.1**　反映某一物体在某一时刻其内部某一点处温度的热传导方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \tag{1.1}$$

其中表示温度的函数 $u=u(x,y,z,t)$ 是未知函数.

**例 1.2**　如果上述热传导过程温度不随时间而变化,则描述这个定常物理过程的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z), \tag{1.2}$$

称之为泊松(Poisson)方程,它也可用来描述电场中的电势分布.

**例 1.3**　弦振动时,弦上某点 $x$ 在 $t$ 时刻的位移 $u=u(x,t)$ 所满足的方程为

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.3}$$

**例 1.4**　梁的横振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=f(x,t). \tag{1.4}$$

**例 1.5**　在以给定的围线为边界的所有曲面中,面积最小的曲面 $u=u(x,y)$ 满足方程

$$\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{1.5}$$

方程(1.5)称为极小曲面方程.

**例 1.6**　水波运动研究中,科尔泰沃赫(Korteweg)和德弗里斯(de Vries)建立的 KdV 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+cu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0. \tag{1.6}$$

方程(1.6)描述浅水波的单向运动现象,$u$ 表示相对静止水面的高度,即波幅.

**例 1.7**　复变函数中,解析函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的实部和虚部所满足的柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{1.7}$$

**例 1.8**　气体动力学中,一维非定常等熵流的气体密度 $\rho$,流速 $u$ 都是一维空间坐标 $x$ 和时间 $t$ 的二元函数,它们满足由连续性方程和动量方程所组成的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=0,\end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $c=c(\rho)>0$ 为音速.

## 1.2　基本概念

设 $u$ 是自变量 $x,y,\cdots$ 的未知函数,关于 $u$ 的偏微分方程的一般形式是

$$F(x,y,\cdots,u,u_x,u_y,\cdots)=0, \tag{1.9}$$

其中 $F$ 是关于变量 $x,y,\cdots,u,\cdots$ 的已知函数.作为偏微分方程,$F$ 应含有未知函

数 $u$ 的某个偏导数.包含在偏微分方程中的未知函数的偏导数的最高阶数称为**方程的阶**.如果一个偏微分方程关于未知函数及其所有偏导数都是线性的,即满足

$$F(u,Au)=F(u_1,Au_1)+F(u_2,Au_2)=0,$$

其中 $u=u_1+u_2$,$A$ 为偏微分算子,则称此方程为**线性偏微分方程**,如(1.1)(1.2);否则称之为**非线性偏微分方程**,如(1.5);若方程关于其所有最高阶偏导数都是线性的,而其系数不含有未知多元函数及其低阶偏导数,则称之为**半线性偏微分方程**,如(1.6);若方程关于其最高阶偏导数都是线性的,但最高阶偏导数的系数依赖于未知函数及其低阶偏导数,则称之为**拟线性偏微分方程**,例 1.8 的方程组可称之为一阶拟线性偏微分方程组.

在线性偏微分方程中,不含未知函数及其偏导数的非零项称为**非齐次项**,而含有该非齐次项的方程称之为**非齐次方程**,如(1.1)(1.2),反之不含非齐次项的方程称之为**齐次方程**,如(1.3).

所谓一个 $m$ 阶偏微分方程在某区域内的**(古典)解**,是指这样的函数:它有直到 $m$ 阶的一切偏导数,且本身和这些偏导数都连续,将它及其偏导数替代方程中的未知函数及其对应的偏导数后,这个方程对其全体自变量在该区域内成为一个恒等式.

和常微分方程一样,一个偏微分方程的解通常有无穷多个,而每个解都表示一个特定的运动过程.为了从这无穷多个解中找出一个我们所研究的具体实际问题要求的解,必须考虑研究对象所处的周围环境和初始时刻的状态等其他因素对解产生的影响,从而通过在这些方面的考虑,得到一些已知条件.这样就有可能确定出一个特定解,这个解既满足方程本身又满足我们在考虑各种影响因素时所建立起来的条件.我们把这样的已知条件称为**定解条件**.定解条件联立方程称之为**定解问题**.当然,并不是每个定解问题都有解.

## §2 方程及定解问题的物理推导

这一节,我们将通过三个不同的物理模型推导出数学物理方程中三类典型的方程及其定解问题.这三类定解问题也是本书的主要研究对象.

### 2.1 弦振动方程

**物理模型** 如图 1.1,设有一根拉紧的均匀柔软细弦 $OA$,其线密度(单位长度的质量)为常数 $\rho$,长为 $l$,两端被固定在 $O$,$A$ 两点,且在单位长度上受到垂直于 $OA$ 向上的力 $F$ 作用.当它在平衡位置(取为 $x$ 轴)附近作垂直于 $OA$ 方向的微

小横向振动时,求弦上各点的运动规律.

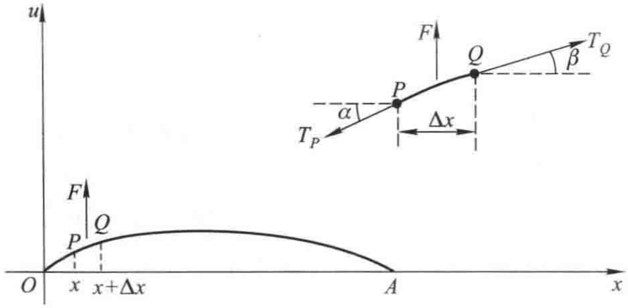



图 1.1

所谓“微小”是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,即弦在偏离平衡位置后,弦上任何一点的斜率远小于 1.所谓“横向”是指全部运动出现在一个平面上,而且弦上的点沿垂直于 $x$ 轴的方向运动.为了建立方程,我们选择如图所示的坐标系,并以 $u(x,t)$ 表示弦上 $x$ 点处在 $t$ 时刻沿垂直于 $x$ 轴方向的位移.先任意选取很小一段弦$\widehat{PQ}$,由于横向振动是微小的,故可认为弦在振动过程中并未伸长,即弧长$\widehat{PQ}$等于 $\Delta x$,则弦所受的张力大小恒为常数 $T$,即它与位置 $x$ 和时间 $t$ 均无关①.弦是柔软的,表示各点处的张力方向总是沿着弦的切线方向.

分析清楚这些情况之后,依据牛顿(Newton)第二定律,我们将要建立一个关于位移 $u(x,t)$ 的方程(组).先看弦上的受力分析:

(1) 作用在 $P$ 点的张力 $T$ 在 $u$ 轴方向的分力为 $T\sin\alpha$;

(2) 作用在 $Q$ 点上的张力 $T$ 在 $u$ 轴方向的分力为 $T\sin\beta$;

(3) 作用在$\widehat{PQ}$上,垂直于 $x$ 轴的外力为 $F\Delta x$,其中 $F=F(x,t)$ 是在 $x$ 处的外力线密度.

由牛顿第二定律可得

① 在所设条件下,可以证明 $T(x,t)\equiv$ 常数.事实上,依据弦段$\widehat{PQ}$在 $x$ 方向上力的平衡方程 $-T(x,t)\cos\alpha+T(x+\Delta x,t)\cos\beta=0$ 以及 $|u_x|\ll 1$,得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx 1,$$

由此可见,$T(x,t)$ 不依赖于 $x$.还因为弦在振动过程中的长度

$$s=\int_0^l\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x\approx l,$$

即弦在振动过程中并未伸长,由此应用胡克(Hooke)定律可知,弦上每点张力 $T$ 的数值不随时间而变.

$$T\sin\beta - T\sin\alpha + F\Delta x = \rho\Delta x u_{tt}, \tag{2.1}$$

又 $\tan\alpha = u_x$,故

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}.$$

由于弦作微小振动,$u_x \ll 1$,即 $u_x$ 对于 1 来说可以忽略不计,则

$$\sin\alpha \approx u_x(x,t),$$

同理有

$$\sin\beta \approx u_x(x+\Delta x,t),$$

代入(2.1)式可得

$$Tu_x(x+\Delta x,t) - Tu_x(x,t) + F\Delta x = \rho\Delta x u_{tt},$$

应用微分中值定理可得

$$Tu_{xx}(\xi,t)\Delta x + F\Delta x = \rho\Delta x u_{tt},$$

其中 $\xi \in (x,x+\Delta x)$.先约去等式中的 $\Delta x$,再令 $\Delta x \to 0$,则 $\xi \to x$,即上式可写为

$$Tu_{xx}(x,t) + F = \rho u_{tt},$$

可化简为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \tag{2.2}$$

其中 $a^2 = \dfrac{T}{\rho}, f = \dfrac{F}{\rho}$.

方程(2.2)称为弦的**强迫横振动方程**.若外力消失,即 $F=0$,则方程(2.2)变为

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{2.3}$$

方程(2.3)称为弦的**自由横振动方程**.

**注** 虽然我们称(2.2)和(2.3)为弦振动方程,但在力学上,弹性杆的纵振动、管道中气体小扰动的传播以及电报方程等问题,都可以归结成上述偏微分方程(2.2)(2.3)的形式,只是其中的未知函数表示的物理意义有所不同.因此,同一个方程所反映的不只是一个物理现象,而是一类物理现象.

### 2.2 薄膜平衡方程

**物理模型** 将均匀柔软的薄膜张紧于微翘的固定框架上,除膜自身的重力作用外,无其他外力作用.由于框架的微翘,薄膜形成一曲面.求静态薄膜上各点的横向位移.

一片展平的薄膜,其厚度可忽略,设其所在的平面为 $Oxy$ 坐标面,垂直于 $Oxy$ 面的方向称为薄膜的横向.再设薄膜的面密度为常数 $\rho$,薄膜所形成的曲面方程为 $u=u(x,y)$(如图 1.2).

用分别平行于 $Oux$ 与 $Oyu$ 坐标面的平面任意截取薄膜微元 $PQRS$，它在 $Oxy$ 坐标面上的投影为四边分别平行于对应坐标轴的矩形 $P'Q'R'S'$，其顶点坐标分别为 $(x,y)$，$(x+\Delta x,y)$，$(x+\Delta x,y+\Delta y)$，$(x,y+\Delta y)$（如图 1.3）.

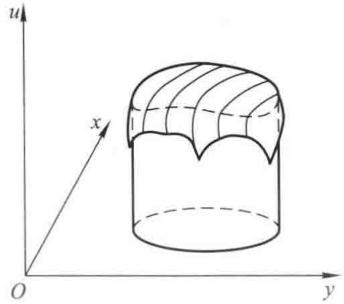



图 1.2

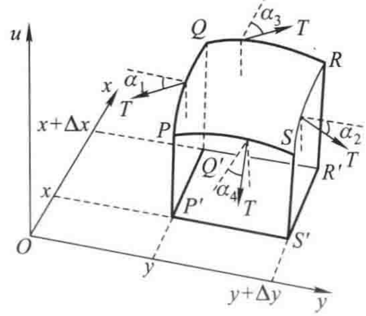



图 1.3

微元各边缘（空间曲线）的两侧薄膜之间互有拉力，沿边缘单位长度上的拉力称为张力密度，记作 $T$.在微翘的假设下，可以近似地认为张力密度 $T$ 是常数（见参考文献[3]）.根据物理学定律可知，边缘上任一点 $M$ 处的张力密度 $T$ 的方向是在点 $M$ 处的薄膜切平面内，且垂直于边缘（即在点 $M$ 处的边缘法平面内）.在薄膜平衡状态下，各作用力之间的关系沿位移 $u$ 方向的张力和重力的合力等于零.对于薄膜的任一微元都是如此.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 分别为$\widehat{PQ}$，$\widehat{RS}$，$\widehat{QR}$，$\widehat{SP}$四边上的张力密度 $T$ 与水平面所成的锐角，由于薄膜微翘，因此

$$\alpha_1\ll 1,\quad \alpha_2\ll 1,\quad \alpha_3\ll 1,\quad \alpha_4\ll 1,$$

$$|\widehat{PQ}|\approx|\widehat{RS}|\approx\Delta x,\quad |\widehat{QR}|\approx|\widehat{SP}|\approx\Delta y.$$

作用在边缘$\widehat{PQ}$与$\widehat{RS}$上的张力沿 $u$ 方向的合力为（如图 1.4）

$$\begin{aligned}&(T\sin\alpha_2-T\sin\alpha_1)\Delta x\\ \approx\ &T(\tan\alpha_2-\tan\alpha_1)\Delta x\\ =\ &T(u_y|_{y+\Delta y}-u_y|_y)\Delta x\\ \approx\ &Tu_{yy}\Delta y\Delta x.\end{aligned}$$

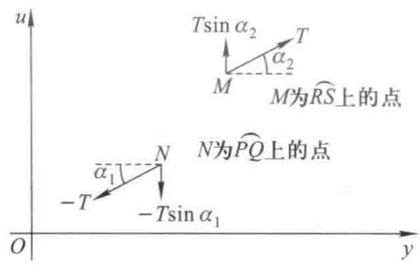



图 1.4

同理可得，作用在边缘$\widehat{QR}$与$\widehat{SP}$上的张力沿 $u$ 方向的合力为 $Tu_{xx}\Delta x\Delta y$.微元质量 $m=\rho\Delta\sigma\approx\rho\Delta x\Delta y$，其中 $\Delta\sigma$ 为微元面积.由微元力的平衡关系可得

$$T(u_{xx}+u_{yy})\Delta x\Delta y-\rho g\Delta x\Delta y=0,$$

即

$$u_{xx}+u_{yy}=\frac{\rho g}{T},$$

令 $f=\frac{\rho g}{T}$,得到

$$u_{xx}+u_{yy}=f. \tag{2.4}$$

这就是微翘的**薄膜平衡方程**.

一般地,我们称形如

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y) \tag{2.5}$$

的方程为**二维泊松方程**.

若薄膜自身的重力可忽略,即 $\rho=0$,则 $f=0$.这时方程(2.5)化为

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{2.6}$$

称之为**二维拉普拉斯(Laplace)方程**(或**调和方程**).

在三维空间中,相应的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z), \tag{2.7}$$

当 $f(x,y,z)\equiv 0$ 时,为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{2.8}$$

方程(2.7)和(2.8)分别称为**三维泊松方程**和**拉普拉斯方程**(**调和方程**).

在数学、物理学与工程技术理论中有很多典型问题都归结为求泊松方程或拉普拉斯方程的解,如热传导问题中定常温度分布、静电场的电势分布、不可压缩流体的定常无旋流场的速度位势等问题.

### 2.3 热传导方程

**物理模型** 设有一个导热物体,当此导热物体内各处的温度不一致时,热量会从高温处向低温处传递,试确定物体内部温度的分布规律.

设导热物体在 $\mathbf{R}^3$ 空间内占据的区域为 $G$,边界面为 $\partial G$,用函数 $u(x,y,z,t)$ 表示导热物体内部 $(x,y,z)$ 点处在 $t$ 时刻的温度.我们将建立温度函数 $u(x,y,z,t)$ 所满足的方程.

为了简便,不妨以固体为例.在物体 $G$ 内任意割取一个由光滑闭曲面 $S$ 所围成的区域 $D$,作为我们的研究对象.在建立方程之前,应先了解下面两个基本的热力学定律:

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com