普通高等教育"十二五"规划教材

工科数学精品丛书

大学生数学竞赛辅导

——高等数学题型 方法 技巧

周本虎　任耀峰　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

大学生数学竞赛辅导
——高等数学题型　方法　技巧

周本虎　任耀峰　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以“中国大学生数学竞赛大纲”为依据，主要内容包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数及国内外竞赛试题精选等八章，附录收集了首届到第六届全国大学生数学竞赛（非数学类）的预赛及决赛试题，并对部分难题给出了解答．全书对高等数学的常见题型、解题方法及技巧进行了归纳总结，对竞赛涉及的知识点进行了梳理，所选例题、习题层次分明，题型丰富．全书结构新颖、选材适当，是一部比较适用的大学生数学竞赛辅导教材．

本书是专门为大学生数学竞赛而编写的，可作为本科大学生数学竞赛培训的教材，也可作为学习高等数学的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

大学生数学竞赛辅导：高等数学题型　方法　技巧/周本虎，任耀峰主编．—北京：科学出版社，2015.7

（工科数学精品丛书）　普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-045274-0

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①周…　②任…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 176543 号

责任编辑：王雨舸/责任校对：董艳辉　肖　婷

责任印制：高　嵘/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2015 年 9 月第　一　版　印张：29 3/4

2015 年 9 月第一次印刷　字数：748 800

定价：55.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

作为一项面向本科生的全国性高水平学科竞赛，全国大学生数学竞赛为大学生提供了一个展示数学基本功和数学思维的舞台，为发现和选拔优秀数学人才并进一步促进高等学校数学课程建设的改革和发展起到了积极的作用。自 2009 年以来，该赛事已成功举办六届；第六届预赛非数学类报名人数达 5 万 3 千余人，参与高校近 600 所，目前已成为全国影响最大、参加人数最多的学科竞赛之一. 为帮助有意参加全国大学生数学竞赛的大学生复习，我们编写了这本《大学生数学竞赛辅导》，本书对准备报考全国理工类硕士研究生的大学生进行复习也有很好的指导作用.

周本虎、任耀峰、祁锐、张建军、张舒、李凌等六位编者长期工作在教学一线，对高等数学的内容有深入的研究；多年从事数学竞赛培训工作和考研辅导，有着深厚的积累和丰富的经验，在海军工程大学应用数学系的领导和同事的鼓励和帮助之下编写了本书. 在前七章中，每一章首先对本章的题型进行了归纳总结，然后分析典型例题，梳理解题方法和技巧，对习题按照难易程度分成 A，B，C 三类. 对于院校课程教学不作要求的内容，但是对竞赛大纲要求的内容给予了特别的关注. 本书有以下两个显著的特点：一是依据解题方法将涉及不同章节内容的例题放在一起，有利于开阔学生的眼界，有助于学生深入理解相关内容；二是应用题比较多，有利于提高学生分析问题解决问题的能力，有助于提高学生的数学素养.

书中题目主要来自硕士研究生入学考试试题、各类竞赛试题、高等数学中的典型习题以及编者自编的习题，题型丰富，题量充足，覆盖面广，层次分明，适合学生自学，也适合作为培训教材.

由于时间仓促，水平有限，不当之处敬请读者和同行批评指正. 邮箱为 zhoubenhu@sina.com.

编者

2015 年 6 月于海军工程大学

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、主要题型

题型 1　函数及其性质

题型 2　函数方程

题型 3　数列极限的定义

题型 4　极限的运算法则

题型 5　二阶线性齐次差分方程

题型 6　单调有界准则

题型 7　夹逼准则

题型 8　无穷小的性质及等价无穷小代换

题型 9　压缩映射原理

题型 10　利用积分求极限

题型 11　利用级数证明极限的存在性

题型 12　利用代换法求极限

题型 13　利用配项法求极限

题型 14　利用拟合法求极限

题型 15　求数列的通项

题型 16　柯西极限存在准则

题型 17　Stolz 定理

题型 18　多数列问题

题型 19　极限表达式中含参数的问题

题型 20　利用导数定义求极限

题型 21　利用微分中值定理求极限

题型 22　利用洛必达法则求极限

题型 23　利用泰勒公式求极限

题型 24　分段函数的极限

题型 25　无穷小的阶

题型 26　$\frac{*}{\infty}$ 型的洛必达法则

题型 27　不动点

题型 28　函数的连续性

题型 29　闭区间上连续函数的性质

题型 30　函数 $f_n(x)$ 的零点

二、典型例题

题型 1 函数及其性质

例 1.1 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 T 为周期的周期函数($T>0$),且在 $[0,T]$ 上严格单调增加,证明:$f(x^2)$ 不可能是周期函数.

证 假设 $g(x)=f(x^2)$ 是以 $T_1>0$ 为周期的周期函数,则

$$f[(x+T_1)^2]=f(x^2),$$

令 $x=0$,得 $T_1^2=nT$. 再以 $x=\sqrt{(n+1)T}$ 及 $T_1=\sqrt{nT}$ 代入便得到 $(n+1)n$ 应是平方数,而这是不可能的. 所以 $f(x^2)$ 不可能是周期函数.

例 1.2 设 $f:R\to R$ 严格单调增加,f^{-1} 是其反函数,x_1 是 $f(x)+x=a$ 的根,x_2 是 $f^{-1}(x)+x=a$ 的根,求 x_1+x_2 的值.

解 因为 $f(x_1)+x_1=a$,f^{-1} 是 f 的反函数,所以

$$f^{-1}[f(x_1)]+f(x_1)=a.$$

即 $f(x_1)$ 是方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 的根.

根据已知条件,函数 $f^{-1}(x)+x$ 严格单调递增,方程 $f^{-1}(x)+x=a$ 有根必唯一. 故

$$f(x_1)=x_2,\ x_1+x_2=x_1+f(x_1)=a.$$

例 1.3 设定义在 $[0,1]$ 上的 $f(x)$ 有反函数 $f^{-1}(x)$,且 $f(x)$ 的值域为 $[0,1]$. 如果

$$f(2x-f(x))=x \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

则 $f(x)\equiv x$.

证 根据 $f^{-1}(x)=2x-f(x)$,得 $f(x)-x=x-f^{-1}(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$.

对任意的 $x_0\in[0,1]$,令 $x_n=f(x_{n-1})$ $(n=1,2,\cdots)$,则

$$x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2},\ x_n=x_0+n(x_1-x_0).$$

由于 $|x_n-x_0|\leqslant 1$,故 $|x_1-x_0|\leqslant \dfrac{1}{n}$. 从而 $f(x_0)=x_1=x_0$,即 $f(x)\equiv x$.

题型 2 函数方程

例 1.4 已知在 $x=0$ 的某邻域内有界的连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)+\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x^2$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 反复利用所给的递推公式,得

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right]\\&=\cdots\\&=x^2\left[1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}\right]+\frac{1}{2^{3n}}(-1)^n f\left(\frac{x}{2^n}\right).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,得 $f(x)=\dfrac{8}{9}x^2$.

例 1.5　设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，且满足柯西(Cauchy)方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad (x,y\in(-\infty,+\infty)).$$

若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，证明 $f(x)=cx\quad (c=f(1))$.

证　在等式中，取 $y=x$，则有 $f(2x)=2f(x)$. 进一步可以得到对任意的正整数 n，有 $f(nx)=nf(x)$. 以 $\frac{y}{n}$ 代 x，有 $\frac{1}{n}f(y)=f(\frac{y}{n})$；再以 mx 代 y（m 是正整数），得

$$\frac{m}{n}f(x)=\frac{1}{n}f(mx)=f\left(\frac{m}{n}x\right).$$

此外，由 $f(0)=0$ 以及 $y=-x$ 可知 $0=f(0)=f(x)+f(-x)$，从而

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对一切有理数 r 及实数 x，有 $f(rx)=rf(x)$. 取 $x=1$，有 $f(r)=cr,c=f(1)$.

任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，由 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x-x_0)=f(0)=0$，得

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

现在对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 取有理数列 $\{r_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x$. 于是，由 $f(r_n)=cr_n$ 及 $f(x)$ 的连续性，得 $f(x)=cx$.

题型 3　数列极限的定义

例 1.6　用肯定的语言描述数列 $\{a_n\}$ 发散.

解　数列 $\{a_n\}$ 发散就是

对 $\forall a\in R,\exists\varepsilon_0>0$，对任意正整数 $N,\exists n>N$，使得 $|a_n-a|\geqslant\varepsilon_0$.

例 1.7　（柯西命题）若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$. 其中 a 为有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$.

证　当 a 为有限数时，对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}=0$，所以对上述 $\varepsilon,\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，

$$\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|+\left|\frac{a_{N_1+1}-a}{n}\right|+\cdots+\left|\frac{a_n-a}{n}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

当 $a=+\infty$ 或 $a=-\infty$ 时的证明留给读者练习.

利用柯西命题可以解决下列问题：

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$.

提示：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $n\sin\dfrac{1}{n+1}<x_n<(n+2)\sin\dfrac{1}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}x_k}{n}=1\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 1.8 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

证法一 （利用变量替换）

令 $a_n=A+\alpha_n$，$b_n=B+\beta_n$，则 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to0$，$\beta_n\to0$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}\\&=AB+A\frac{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}{n}+B\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}+\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}.\end{aligned}$$

利用算术平均值的极限公式（即柯西命题），当 $n\to\infty$ 时，上式的第二、第三项趋于零. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，故 $\exists M>0$，使得 $|\alpha_n|\leqslant M$ $(\forall n\in N)$. 从而

$$0\leqslant\left|\frac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}\right|\leqslant M\frac{|\beta_n|+|\beta_{n-1}|+\cdots+|\beta_1|}{n}\to0.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB.$$

证法二 由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，知 $\{b_n\}$ 是一个有界数列，取 $M>0$，使得 $|b_n|<M$，$n=1,2,\cdots$，于是

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-\frac{b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1}{n}A\right|\\&\leqslant\left|\frac{b_n(a_1-A)+b_{n-1}(a_2-A)+\cdots+b_1(a_n-A)}{n}\right|\\&\leqslant M\frac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_1-A|+|a_2-A|+\cdots+|a_n-A|}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}=B$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}-\frac{b_n+b_{n-1}+\cdots+b_1}{n}A\right]=0.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

例 1.9 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^3)^n\mathrm{d}x$.

解 对任意 $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<1)$，存在正整数 N，对 $x\in\left[\dfrac{\varepsilon}{2},1\right]$，当 $n>N$ 时，$0<(1-x^3)^n<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 此时

$$0 \leqslant \int_0^1 (1-x^3)^n \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} (1-x^3)^n \mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^1 (1-x^3)^n \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x^3)^n \mathrm{d}x = 0$.

类似方法可证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = 0$.

例 1.10　若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n + a_{n-1}) = 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解　对任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|2a_n + a_{n-1}| < \varepsilon, \quad 即 \quad |a_n| \leqslant \frac{|a_{n-1}|}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而得

$$\begin{aligned} |a_n| &\leqslant \frac{\left(\frac{|a_{n-2}|}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + 2^{-2}|a_{n-2}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{n-N}} + \frac{|a_N|}{2^{n-N}} \quad (n > N). \end{aligned}$$

由此可得 $|a_n| \leqslant \varepsilon + \frac{|a_N|}{2^{n-N}}$ $(n > N)$. 又存在 $N_1 > N$，使得 $\frac{|a_N|}{2^{n-N}} < \varepsilon$ $(n > N_1)$. 所以

$$|a_n| < 2\varepsilon \ (n > N_1). \quad 故 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

题型 4　极限的运算法则

例 1.11　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$.

解法一　
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{i+1} + \frac{1}{2(i+2)}\right] \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \to \frac{1}{4} \quad (当\ n\to\infty\ 时). \end{aligned}$$

可得所求极限为 $\frac{1}{4}$.

解法二　$\frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)}\right]$

一般地，若 $u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m}}$，其中数 a_i $(i = 1,2,\cdots)$ 组成以 d 为公差的等差数列，则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} v_n - v_1, \quad 其中 \quad v_n = -\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_n a_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}.$$

类似方法可以得到：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k} = 2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+k^2} = 18 - 24\ln 2$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1^3+2^3+\cdots+k^3} = -12 + \frac{4}{3}\pi^2$.

题型 5 二阶线性齐次差分方程

例 1.12 如果二阶齐次线性差分方程

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \quad (n=1,2,\cdots)$$

的特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 有两个不等的实根 λ_1,λ_2,则有通解公式

$$a_n=c\cdot\lambda_1^n+d\cdot\lambda_2^n,$$

其中 c,d 为任意常数;当 a_1,a_2 已知时,可以确定常数 c,d 的值.

证 由所给条件可得 $a_{n+2}-(\lambda_1+\lambda_2)a_{n+1}+\lambda_1\lambda_2a_n=0$,即

$$\begin{aligned}a_{n+2}-\lambda_1a_{n+1}&=\lambda_2(a_{n+1}-\lambda_1a_n)=\lambda_2^2(a_n-\lambda_1a_{n-1})\\&=\cdots=\lambda_2^n(a_2-a_1).\end{aligned} \tag{①}$$

$$a_{n+2}-\lambda_2a_{n+1}=\lambda_1^n(a_2-a_1). \tag{②}$$

由 ①$\times\lambda_2-$②$\times\lambda_1$,可得

$$a_n=c\cdot\lambda_1^n+d\cdot\lambda_2^n,$$

其中 c,d 为任意常数.

例 1.13 设 $f(x)$ 是定义在$(0,+\infty)$上的正值函数,且 $f[f(x)]=6x-f(x)$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 对任给的实数 $x>0$,记 $a_0=x$,以及 $a_{n+1}=f(a_n)\ (n=0,1,2,\cdots)$. 代入方程,可得

$$a_{n+2}+a_{n+1}-6a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

解其特征方程 $\lambda^2+\lambda-6=0$,得特征根为 $\lambda_1=-3,\lambda_2=2$. 所以上述差分方程的通解为

$$a_n=(-3)^nc+2^nd.$$

利用 $f(a_n)>0$ 得到 $c=0$,从而 $a_n=2^nd$. 且 $d=a_0$,又 $f(a_0)=a_1=2a_0$,即 $f(x)=2x$.

例 1.14 已知 $a_1>0,a_2>0$.

(1) 若存在数列$\{y_n\}$满足条件:

(a)$y_n>0$;(b) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$;(c)$y_n=a_1y_{n+1}+a_2y_{n+2}\ (n=1,2,\cdots)$,

证明:$a_1+a_2>1$;

(2) 若 $a_1+a_2>1$,证明:存在满足条件(a)、(b)、(c) 的数列$\{y_n\}$.

证 (1) 所给线性齐次差分方程 $a_2y_{n+2}+a_1y_{n+1}-y_n=0$ 的特征方程 $a_2\lambda^2+a_1\lambda-1=0$,有两个不等的实根 $\lambda_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}$,$\lambda_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}$,故

$$y_n=c\cdot\lambda_1^n+d\cdot\lambda_2^n.$$

注意到$|\lambda_1|<|\lambda_2|$,由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,得

$$|\lambda_1|=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2+4a_2}}{2a_2}<1, \quad 从而有 \quad a_1+a_2>1.$$

(2) 取 $y_n=\lambda_1^n$,则 $y_n=a_1y_{n+1}+a_2y_{n+2}\ (n=1,2,\cdots)$. 且

$$a_1^2+4a_2>a_1^2+4(1-a_1)=(2-a_1)^2, \quad \lambda_1<\frac{2}{a_1+|2-a_1|}<1, \quad y_n\to0.$$

利用二阶齐次线性差分方程可以解决以下问题:

(1) 设 a_1,a_2 为实数,令 $a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}\ (n=3,4,5,\cdots)$,其中 $p>0,q>0,p+q=1$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{a_2+a_1q}{1+q}$.

(2) 求斐波那契(Fibonacci) 数列的通项公式,其中 $a_1=a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,

2,⋯).

提示:$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

(3) 设$\{a_n\}$为斐波那契数列,即$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,2,\cdots)$.求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(4) 设$a_1=1,a_2=2$,且$3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0(n\geqslant 1)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(5) 设$x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=(x_n^p x_{n+1}^q)^{\frac{1}{p+q}}(p>0,q>0)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

提示:记$y_n=\ln x_n$,则$y_{n+2}=\frac{q}{p+q}y_{n+1}+\frac{p}{p+q}y_n$.

(6) 设$a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,2,\cdots)$,求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的和函数.

(7) 设$a_0=0,a_1=1,a_{n+1}=3a_n+3a_{n-1}\ (n=1,2,\cdots)$,求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$的和函数.

题型 6　单调有界准则

例 1.15　设$a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$,

$$x_n=\frac{a_1}{1+a_1}+\frac{a_2}{(1+a_1)(1+a_2)}+\cdots+\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

证　显然$\{x_n\}$单调增加,用数学归纳法可证

$$x_n=1-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}<1.$$

根据单调有界准则,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

例 1.16　设$a>0,x_1=\sqrt[3]{a},x_n=\sqrt[3]{ax_{n-1}}\ (n>1)$,证明:$\{x_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证　显然$x_n>0$.

(i) 当$0<a\leqslant 1$,则$x_1=\sqrt[3]{a}\leqslant 1,x_2=\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\leqslant\sqrt[3]{a}=x_1$.

假设$x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant 1$成立,则

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{ax_n}\leqslant\sqrt[3]{ax_{n-1}}=x_n.$$

由归纳法知,$\{x_n\}$单调减有下界($>a$).因此$\{x_n\}$收敛.

(ii) 若$a>1$,则$x_1=\sqrt[3]{a}>1$且$x_1=\sqrt[3]{a}<a,x_2=\sqrt[3]{ax_1}>\sqrt[3]{a}=x_1$.

假设$x_n>x_{n-1}$,且$x_n<a$,则

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{ax_n}>\sqrt[3]{ax_{n-1}}=x_n,\text{且 }x_{n+1}<\sqrt[3]{a\cdot a}<a.$$

由归纳法知$\{x_n\}$单调增且有上界($<a$).故$\{x_n\}$收敛.

综合(i)、(ii)知数列$\{x_n\}$收敛,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$.由$x_n=\sqrt[3]{ax_{n-1}}$得到$x_n^3=ax_{n-1}$,两边取极限有方程$x^3=ax$.解此方程并注意到$\{x_n\}$的极限$x>0$(情形(i)时$x\geqslant a>0$;情形(ii)时$x>x_1=\sqrt[3]{a}>0$),得$x=\sqrt{a}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

例 1.17　设连续函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上是正的,单调减少的,且

$$d_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x,$$

证明：数列$\{d_n\}$是收敛的.

证　由条件可得

$$d_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}[f(k)-f(x)]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

$$d_{n+1}-d_n=f(n+1)-\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

根据单调有界准则，数列$\{d_n\}$是收敛的.

例 1.18　证明：数列 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\ (n=1,2,\cdots)$ 收敛，从而有极限(此极限称为欧拉(Euler) 常数，下记为 C).

证法一　设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，利用不等式$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ (x>0)$，得

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0\quad (n=1,2,\cdots).$$

所以数列$\{a_n\}$是单调减少的；

又

$$a_1\geqslant a_n>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0\quad (n=1,2,\cdots),$$

所以数列$\{a_n\}$是有界的；根据单调有界准则，数列$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}$是收敛的.

记 $C=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$，称 $C=0.57721\cdots$ 为欧拉常数，目前还不知道它是有理数还是无理数. 有下面的公式：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n\quad (\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0).$$

证法二　设 $u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$，则

$$u_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

故得　数列$\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right\}$是收敛的.

证法三　利用例 1.17 的结果.

利用欧拉常数可以解决下列问题：

(1) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\right)$，其中 k 为正整数.

(2) 设 $H(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，记 $\varphi(n)$ 为满足 $H(k)\geqslant n$ 的最小自然数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\mathrm{e}.$$

(3) 设 $f_n(x)=x^n\ln x$，其中 n 为正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

(4) 求反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

(5) 设 $a_n=\dfrac{1}{2n+1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的敛散性。

(6) 证明：$1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{3}-1\right)+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}+\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots=\ln 3$.

(7) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{a_n}$ $(x>0)$ 的收敛域，其中 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

(8) 若将级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的项重新这样安排：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，然后接着依次取 q 个负项，如此继续下去。证明：所得新级数的和为 $\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{p}{q}$.

例 1.19　若 $y_1=\dfrac{x}{2}$，$y_n=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y_{n-1}^2}{2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1, n=2,3,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，并求该极限.

证　当 $x=0$ 时，$y_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时，用数学归纳法可证 $y_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$.

显然 $y_1>0$. 若 $y_k>0$，由 $x>y_{k-1}^2$，可得

$$y_{k+1}=\frac{4x-(x-y_{k-1}^2)^2}{8}\geqslant\frac{3x}{8}>0.$$

因此有 $y_1-y_3=\dfrac{y_2^2}{2}>0$，$y_2-y_4=\dfrac{y_3^2-y_1^2}{2}<0$，$\cdots$.

用数学归纳法可证 $y_{2n}-y_{2n+2}<0$，$y_{2n-1}-y_{2n+1}>0$ $(n=1,2,\cdots)$. 即

$$\frac{x}{2}=y_1>y_3>\cdots>y_{2n+1}>\cdots>0,\ 0<y_2<y_4<\cdots<y_{2n}<\cdots<\frac{x}{2}.$$

可见数列 $\{y_{2n-1}\}$，$\{y_{2n}\}$ 都是收敛的.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n-1}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_{2n}=b$，则

$$b=\frac{x}{2}-\frac{a^2}{2},\quad a=\frac{x}{2}-\frac{b^2}{2}\quad\left(0\leqslant a\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2},\ 0\leqslant b\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

从而得到 $a=b=\sqrt{1+x}-1$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\sqrt{1+x}-1$.

例 1.20　设数列满足 $0<a_n<1$ 及 $(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之.

证　由 $0<a_n<1$ 及 $(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{1}{4a_n(1-a_n)}\geqslant 1\quad(n=1,2,\cdots).$$

故$\{a_n\}$单调增加.由$0<a_n<1$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.记$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,将$(1-a_n)a_{n+1}>\dfrac{1}{4}$两边取极限,得$(1-a)a\geqslant\dfrac{1}{4}$,所以$a=\dfrac{1}{2}$.

例 1.21 (1) 设$c>0,x_1=a>0$,

$$x_{n+1}=\frac{c(1+x_n)}{c+x_n}\quad(n=1,2,\cdots),\tag{①}$$

那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

(2) 设$c>0,x_1=a>0,x_{n+1}=\dfrac{c+x_n}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

证 (1) 由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+x_n(c+x_{n-1})},\tag{②}$$

再由①式得,$x_n(c+x_{n-1})=c(1+x_{n-1})$,代入②式,得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+c(c+x_{n-1})}=\frac{(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})+(1+x_{n-1})}\quad(n\geqslant 2)$$

于是,由x_n的非负性,从上式,得

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{|1-c|}{1+c}|x_n-x_{n-1}|\quad(n\geqslant 2).$$

因为$\dfrac{|1-c|}{1+c}<1$,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.易求得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

(2) 令$y_n=\dfrac{1}{x_n}$,则$y_{n+1}=\dfrac{c^{-1}(1+y_n)}{c^{-1}+y_n}$.再利用(1)的结论即可.

题型 7 夹逼准则

例 1.22 判别数列$\{a_n\}$的敛散性:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}\quad(n=1,2,\cdots).$$

解 $\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}<a_n<\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$,

利用夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ln 2$.

其中可用欧拉常数得到$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

也可以利用定积分得到$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)=\ln 2$.

例 1.23 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\sin\dfrac{\pi}{k}$.

解 由$\sin x\leqslant x\leqslant\tan x$ $\left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\right)$,可知在$|x|$充分小时有

$$0\leqslant x-\sin x\leqslant\tan x-\sin x=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x}\leqslant x^2.$$

从而有

$$\sum_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{\pi}{n+k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{n+k}+\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\frac{\pi}{n+k}-\frac{\pi}{n+k}\right],$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi}{n+k}=\pi\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)=\pi\left(\ln\frac{2n}{n-1}+o(1)\right)\quad(n\to\infty),$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left[\sin\frac{\pi}{n+k}-\frac{\pi}{n+k}\right]\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi^2}{(n+k)^2}\leqslant\frac{n\pi^2}{n^2}\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n}\sin\frac{\pi}{k}=\pi\ln 2$.

注　记号 $o(1)$ 表示无穷小量，记号 $O(1)$ 表示有界量.

例 1.24　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\mathrm{d}t$.

解　应用公式 $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x\ (x>0)$，得

$$\int_0^x\frac{\pi\mathrm{d}t}{x+t}-\frac{\pi^3}{6}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^3}<\int_0^x\sin\left(\frac{\pi}{x+t}\right)\mathrm{d}t<\int_0^x\frac{\pi\mathrm{d}t}{x+t}.$$

注意到$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{x+t}=\ln 2$，$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)$，在上式中令 $x\to+\infty$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\sin\frac{\pi}{x+t}\mathrm{d}t=\pi\ln 2.$$

例 1.25　设 $f(x)>0$，在区间$[0,1]$上连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$.

证　记 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)$，则

$$x_n=\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}\leqslant M.\qquad ①$$

因 $f(x)$ 在闭区间$[0,1]$上连续，所以 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=M$.

于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，$x\in[0,1]$时，有 $M-\varepsilon<f(x)<M+\varepsilon$.

当 n 充分大时有$\frac{1}{n}<\delta$，$\exists i_0$，使得 $\left|\frac{i_0}{n}-x_0\right|<\delta$，$f\left(\frac{i_0}{n}\right)>M-\varepsilon$. 故

$$x_n=\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}\geqslant\sqrt[n]{\left(f\left(\frac{i_0}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}>(M-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt[n]{n}}.\qquad ②$$

根据 ①、② 两式，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right)^n\frac{1}{n}}=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x).$$

题型 8　无穷小的性质及等价无穷小代换

例 1.26　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n^p\sin[(\sqrt{2}+1)^n\pi]$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-\mathrm{e}}{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}}$.