



全国硕士研究生农学门类入学考试辅导丛书

数 学

历年真题与全真模拟题解析

王来生 ◎ 主 编

第5版

足实战 把握规律

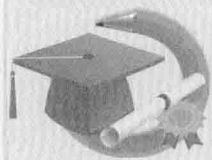
模拟演练 预测指导

考前练兵 查缺补漏



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE



全国硕士研究生农学门类入学考试

数 学

历年真题与全真模拟题解析

王来生 主编

第5版

立足实战 把握规律

模拟演练 预测指导

考前练兵 查缺补漏



中国农业大学出版社

ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题与全真模拟题解析/王来生主编. —5 版. —北京:中国农业大学出版社,
2015. 7

ISBN 978-7-5655-1305-3

I. ①数… II. ①王… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 144776 号

书 名 数学历年真题与全真模拟题解析(第 5 版)

作 者 王来生 主编

策划编辑 张 蕊

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路 2 号

电 话 发行部 010-62818525, 8625

编辑部 010-62732617, 2618

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

经 销 新华书店

印 刷 涿州市星河印刷有限公司

版 次 2015 年 7 月第 5 版 2015 年 7 月第 1 次印刷

规 格 787×1 092 16 开本 11.5 印张 274 千字

定 价 25.00 元

责任编辑 张 玉

责任校对 王晓凤 陈 莹

邮政编码 100193

读者服务部 010-62732336

出 版 部 010-62733440

e-mail cbsszs@cau.edu.cn

图书如有质量问题本社发行部负责调换

主 编 王来生(中国农业大学)

副主编 王云诚(山东农业大学)

张良云(南京农业大学)

介跃建(中国农业大学)

陈 静(中国农业大学)

周志坚(中国农业大学)

杨丽明(中国农业大学)

徐义田(中国农业大学)

甄 苓(中国农业大学)

曾善玉(中国农业大学)

梁 玥(甘肃农业大学)

前 言

为帮助农学门类考研学生系统地复习和备考,在分析历年真题及有关课程教材、吸纳各有关高校辅导老师教学经验的基础上,我们精心组织编写了《数学复习指南暨习题解析》,同时配套编写了《数学历年真题与全真模拟题解析》,希望考生能通过这套书的学习和引导,温习贯通考试内容,巩固和掌握所学知识,提高解题能力和应试技巧。

《数学历年真题与全真模拟题解析》由两部分内容组成。第一部分是 15 套考研模拟试题,同时附有详细参考答案,并进行了详解,建议考生先做模拟试题,然后再看参考答案;第二部分给出历年考研真题及参考答案,供同学复习时参考。

尽管本着为考生着想、对教学负责的态度,反复斟酌拿捏内容的广度和深度,把握例题、习题和模拟题的代表性,尽心尽力编写好这套书,但仍不免有疏漏之处,恳请各位同学及老师们批评指正,以利我们今后不断地改进和提高。

预祝各位考生取得好成绩!

编 者
2015 年 6 月

目 录

全真模拟试题及解析

模拟试题一.....	3
模拟试题二.....	6
模拟试题三.....	9
模拟试题四	12
模拟试题五	15
模拟试题六	18
模拟试题七	20
模拟试题八	23
模拟试题九	26
模拟试题十	29
模拟试题十一	32
模拟试题十二	35
模拟试题十三	38
模拟试题十四	41
模拟试题十五	44
模拟试题一参考答案及解析	47
模拟试题二参考答案及解析	52
模拟试题三参考答案及解析	57
模拟试题四参考答案及解析	62
模拟试题五参考答案及解析	66
模拟试题六参考答案及解析	70
模拟试题七参考答案及解析	75
模拟试题八参考答案及解析	80
模拟试题九参考答案及解析	85
模拟试题十参考答案及解析	91
模拟试题十一参考答案及解析	97
模拟试题十二参考答案及解析.....	101
模拟试题十三参考答案及解析.....	106
模拟试题十四参考答案及解析.....	111
模拟试题十五参考答案及解析.....	116

历年真题及解析

2008 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	123
2008 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	126
2009 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	130
2009 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	133
2010 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	139
2010 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	142
2011 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	148
2011 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	151
2012 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	157
2012 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	160
2013 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题	166
2013 年全国硕士研究生入学统一考试农学门类联考数学试题参考答案及解析	169

全真模拟试题及解析

模拟试题一

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在括号内.

(1)当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是().

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$.
(C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$.

(2)函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$ 的单调增区间是().

- (A) $(-\infty, +\infty)$. (B) $[0, +\infty)$.
(C) $(-\infty, 0]$. (D) 不存在单调区间.

(3)设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) > 0$,则下列选项中正确的是().

- (A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值. (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.
(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值. (D) 点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(4)积分 $I_1 = \iint_D \ln(x+y) d\sigma, I_2 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma, I_3 = \iint_D (x+y) d\sigma$ 的大小是(),其中 D 是

由直线 $x = 0, y = 0, x + y = \frac{1}{2}$ 和 $x + y = 1$ 所围成的区域.

- (A) $I_1 \leq I_2 \leq I_3$. (B) $I_1 \leq I_3 \leq I_2$.
(C) $I_2 \leq I_1 \leq I_3$. (D) $I_3 \leq I_2 \leq I_1$.

(5)设 A, B 均为 n 阶矩阵,满足 $AB = 0$,若 $R(A) = n - 1$,则().

- (A) $R(B) = 1$. (B) $R(B) < 1$.
(C) $R(B) \leq 1$. (D) $R(B) \geq 1$.

(6)设 A 为 n 阶方阵,则下列()不成立.

- (A) 若 A 可逆,则矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量也是矩阵 A^{-1} 的属于特征值 $\frac{1}{\lambda}$ 的特征值.
(B) A 的全部特征向量为方程 $(\lambda E - A)x = 0$ 的全部解.
(C) 若 A 存在属于特征值 λ 的 n 个线性无关的特征向量,则 $A = \lambda E$.
(D) A 与其转置矩阵 A^T 有相同的特征值.

(7)设有二维随机变量 (X, Y) ,已知 $D(X) = 9, D(Y) = 4, X, Y$ 的相关系数为 $\rho_{XY} = \frac{1}{3}$,则

$D(X - Y) = ()$.

- (A) 15. (B) 9. (C) 13. (D) 5.

(8)设 $X \sim N(1, 2^2), X_1, X_2, \dots, X_n$ 为 X 的样本,则().

- (A) $\frac{\bar{X} - 1}{2} \sim N(0, 1)$. (B) $\frac{\bar{X} - 1}{4} \sim N(0, 1)$.

$$(C) \frac{\bar{X}-1}{\sqrt{n}} \sim N(0,1).$$

$$(D) \frac{\bar{X}-1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1).$$

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在题目中的横线上.

$$(9) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}) (a, b > 0) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x) \text{ 的水平渐近线的方程为 } y = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(11) 设有长为 12 厘米的非均匀杆 AB, AM 部分的质量与动点 M 到端点 A 的距离 x 的平方成正比,杆的全部质量为 360 克. 则杆的质量表达式 $m(x) = \underline{\hspace{2cm}}$, 杆在任一点 M 处的线密度 $\rho(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$(12) \text{ 设 } z = a\sqrt{x^2 - y^2}, \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, \text{ 则全微分 } dz = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(13) \text{ 设 } \mathbf{A} \text{ 为 } 3 \text{ 阶矩阵, } \mathbf{A}^* \text{ 为其伴随矩阵, } |\mathbf{A}| = 2, \text{ 则 } ||2\mathbf{A}|\mathbf{A}^*|| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(14) \text{ 设事件 } A, B \text{ 的概率分别为 } \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \text{ 当 } A \text{ 与 } B \text{ 独立时, } P(B\bar{A}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题:15~23 小题,共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{已知 } y = \int_1^{1+\sin t} (1 + e^{\frac{1}{u}}) du, \text{ 其中 } t = t(x) \text{ 由 } \begin{cases} x = \cos 2v \\ t = \sin v \end{cases} \text{ 确定, 求 } \frac{dy}{dx}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$, 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$,

$$\text{计算定积分 } I = \int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx.$$

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}, \text{ 计算二重积分 } I = \iint_D (x + |y|) dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } x \in (-\infty, +\infty), \text{ 证明: } 1 + x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geq \sqrt{1 + x^2}.$$

(20) (本题满分 10 分)

设 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 1, 0, -1, 对应的特征向量为

$$\alpha_1 = (1, 2, 2)^T, \alpha_2 = (2, -2, 1)^T, \alpha_3 = (-2, -1, 2)^T.$$

(I) 求方阵 $\mathbf{A}$;

(II) 令 $\mathbf{P} = [-2\alpha_2, 3\alpha_3, \alpha_1]$, 求 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

(21) (本题满分 11 分)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的 3 个不同的特征值, 相应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, 试证 $\beta, \mathbf{A}\beta, \mathbf{A}^2\beta$ 线性无关.

(22)(本题满分 10 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 所围成的区域 D 中服从均匀分布, 求

(I) (X, Y) 的联合密度函数;

(II) X, Y 边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判断 X, Y 是否相互独立;

(III) $P\{Y \leq X\}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D: 0 < x < 1, |y| < x$ 内服从均匀分布, 求关于 X 的边缘密度函数及随机变量 $Z = 2X + 1$ 的方差 $D(Z)$.

模拟试题二

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在括号内.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}} - 1}$, 则().

- (A) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.
- (B) $x=0, x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.
- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
- (D) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = ()$.

- (A) $\sqrt{2\pi}$.
- (B) $\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
- (C) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- (D) $2\sqrt{\pi}$.

(3) 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个充分条件是().

- (A) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x, y) - f(0, 0)] = 0$.
- (B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$.
- (C) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} [f'_x(x, 0) - f'_x(0, 0)] = 0$, 且 $\lim_{y \rightarrow 0} [f'_y(0, y) - f'_y(0, 0)] = 0$.

(4) 函数 $f(x)$ 二阶可导, $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$ 则().

- (A) x_0 是函数 $y = f(x)$ 的极值点, $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
- (B) x_0 不是函数 $y = f(x)$ 的极值点, $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
- (C) x_0 是函数 $y = f(x)$ 的极值点, $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.
- (D) x_0 不是函数 $y = f(x)$ 的极值点, $(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(5) 与对角阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似的矩阵是().

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.
- (B) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.
- (C) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- (D) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$.

(6) 设矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩 $R(A) = n$, 则非齐次线性方程组 $AX = b$ ().

- (A) 一定无解.
- (B) 可能有解.
- (C) 一定有唯一解.
- (D) 一定有无穷多解.

(7) 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|\bar{B}) = P(A)$, 则下式中不成立的是 ().

(A) $P(A|\bar{B}) = P(A|B)$.

(B) $P(AB) = 0$.

(C) $P(B|\bar{A}) = P(B)$.

(D) $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$.

(8) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

Y X	0	1
1	0.4	0.2
2	a	b

已知 $E(XY) = 0.8$, 则 $P\{X > 2Y\} = ()$.

(A) 0.7.

(B) 0.6.

(C) 0.5.

(D) 0.4.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在题目中的横线上.

(9) 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导, $g(x)$ 在 $x=a$ 连续但不可导, 则 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 可导的充分必要条件是_____.

(10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i} = \underline{\hspace{2cm}}; \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2 + i^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 过原点的切线方程是_____.

(12) 设函数 $f(u, v)$ 连续, 交换二次积分次序 $\int_{-1}^1 d\theta \int_0^{\sqrt{1-\theta^2}} f(r, \theta) dr = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) A 是 3 阶方阵, $|A| = 2$, 则 $\left| \left(\frac{1}{2}A \right)^{-1} - 3A^* \right| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设随机变量 X, Y 相互独立, 已知 X 在 $[-2, 1]$ 上均匀分布, Y 的概率分布为

Y	-1	0	1
p	1/3	1/2	1/6

则 $P\{XY < 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, f'(0) = 2$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{2x}{1-\cos x}}$.

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \frac{ax+b}{x^2+x+1} dx$.

(17) (本题满分 11 分)

函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内大于零, 且 $xf'(x) = f(x) + \frac{3ax^2}{2}$, 又曲线 $y = f(x)$

与 $x=1, y=0$ 所围成图形的面积为 $S=2$.

(I) 求 $f(x)$;

(II) a 为何值时, 该图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

(18) (本题满分 12 分)

求函数 $f(x, y) = xy - x + y$ 在条件 $x^2 + y^2 = 5$ 下的最小值与最大值.

(19) (本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 1$, $F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq 4t^2} f(x^2+y^2) d\sigma$, ($t \geq 0$), 求 $F''(0)$.

(20) (本题满分 10 分)

设 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ 线性无关, 且与非零向量 β_1, β_2 都正交, 记 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T \end{pmatrix}$.

(I) 证明 β_1, β_2 都是线性方程组 $AX=0$ 的解;

(II) 证明 β_1 和 β_2 线性相关.

(21) (本题满分 11 分)

设实对称矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. 其中, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ 对应的特征向量为 $\xi_1 = (1, 0, 0)^T$ 和 $\xi_2 = (1, 1, 0)^T$; $\lambda_3 = 5$ 对应的特征向量为 $\xi_3 = (0, -1, 1)^T$.

(I) 求 A 的相似对角阵 Λ ;

(II) 求正交矩阵 Q , 使 $Q^T A Q = \Lambda$.

(22) (本题满分 11 分)

已知随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 且 $P\{X > 10\} = 0.5, P\{X \leq 9.96\} = 0.0227$. 设随机变量 Y 表示对 X 作三次独立重复观测中, 事件 $\{9.98 < X < 10.02\}$ 出现的次数, 已知 $\Phi(2.5) = 0.9938, \Phi(1) = 0.8413, \Phi(2) = 0.9773$. 求

(I) $P\{9.98 < X < 10.02\}$;

(II) Y 的概率分布;

(III) $P\{Y \geq 1\}$.

(23) (本题满分 10 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < 1, x < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(I) 求 X, Y 的边缘密度函数;

(II) 求 $P\{X+Y > 1\}$.

模拟试题三

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在括号内.

(1) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足().

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$.
(C) $a \leq 0, b > 0$. (D) $a \geq 0, b < 0$.

(2) 设 $y = \ln(\ln x) + \ln \pi$, 则 $y' =$ ().

- (A) $\frac{1}{\ln x}$. (B) $\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\pi}$. (C) $\frac{1}{x \ln x}$. (D) $\frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{\pi}$.

(3) 若 $f(x)$ 为连续函数且满足关系式: $\int_0^{x^3+1} f(t) dt = x^2$, 则 $f(9) =$ ().

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) 1. (C) 0. (D) -1.

(4) 已知 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f^{(n)}(0) =$ ().

- (A) $-n!$. (B) $(n-1)!$. (C) $n!$. (D) $(n+1)!$.

(5) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则().

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$. (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.
(C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$. (D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$.

(6) 若向量组 α, β, γ 线性无关, α, β, δ 线性相关, 则().

- (A) α 必可由 β, γ, δ 线性表示. (B) β 必不可由 α, γ, δ 线性表示.
(C) δ 必可由 α, β, γ 线性表示. (D) δ 必不可由 α, β, γ 线性表示.

(7) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有().

- (A) $A \supset B$. (B) $A \subset B$.
(C) $P(\bar{A}B) = 0$. (D) $P(A \cup B) > P(A)$.

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\bar{X} + kS^2$ 为 $\mu + 2\sigma^2$ 的无偏估计量, 则 $k =$ ().

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) $\frac{1}{2}$.

二、填空题:9~14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在题目中的横线上.

(9) 设曲线 $f(x) = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) =$ _____.

(10) 函数 $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ 单调减少且其图形为凸的开区间为 _____.

(11) 若 $z = z(x, y)$ 是由方程 $xe^y + ye^z + ze^x = 0$ 确定的隐函数, 则 $dz =$ _____.

(12) 设有抛物线 $x = 5y^2$ 与 $x = 1 + y^2$, 则这两条曲线所围成图形的面积 S 为 _____.

(13) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 满足如下条件:

$$R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 3, R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5) = 4,$$

则 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, -\alpha_5) = \underline{\hspace{2cm}}$. 这里 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 表示向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的秩.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $E(X-1)(X-2)=1$, 则 $EX^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)}{\sin x}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0 \\ xg(x), & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续.

(I) 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(II) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性.

(17) (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D |y-x^2| dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(18) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上存在二阶导数, 且 $f(1)=0$. 令

$$F(x) = (e^x - 1)^2 f(x), \text{ 证明:}$$

(I) 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F'(\xi)=0$;

(II) 在 $(0, 1)$ 内 $F''(x)=0$ 至少存在一个根.

(19) (本题满分 10 分)

计算 $n(n \geq 2)$ 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

(20) (本题满分 12 分)

已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x=Qy$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形.

(21) (本题满分 12 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

且事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立. 求