



世纪高等教育建筑环境与能源应用工程系列规划教材

计算流体力学

——典型算法与算例

(含光盘)

高歌 闫文辉 吴俊宏 李凤超 王保国 编著



 机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

免费电子课件

21 世纪高等教育建筑环境与能源应用工程系列规划教材

计算流体力学

——典型算法与算例

(含光盘)

Computational Fluid Dynamics
——Typical Algorithms and Examples

高 歌 闫文辉 吴俊宏
李凤超 王保国

编著



机械工业出版社

本书是按照理工院校少学时计算流体力学课程要求编写的一部本科生通用教材。全书分10章,主要包括:计算流体力学的发展简况及基本方程组、不可压缩流动的典型数值方法、可压缩流动对流项与时间项处理的典型方法、复杂流动问题的典型处理方法及 Gao-Yong 湍流方程组、计算流体力学中网格生成的典型方法。

本书内容重基础、重实用、少而精,反映了当前计算流体力学的最新科研成果,深入浅出,还融入了 Gao-Yong 理性湍流理论与方程组的相关内容。书中正文给出了大量的典型算例,并且在第2、3、4篇末还提供了习题(习题解答见本书所附光盘),这有利于广大学生与读者加深对基本格式的理解与认识以及全面掌握 CFD 方法。

本书可作为高等院校理工科类计算流体力学课程的本科生教材,也可作为建筑环境与能源应用工程、航空航天、动力、机械、水利工程、生物、化工、环境工程、兵器科学与技术、工程热物理及工程力学等专业研究生的教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

计算流体力学——典型算法与算例/高歌等编著. —北京:机械工业出版社, 2015. 4

21 世纪高等教育建筑环境与能源应用工程系列规划教材
ISBN 978-7-111-49626-7

I. ①计… II. ①高… III. ①计算流体力学—高等学校—教材 IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 049150 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:刘涛 责任编辑:刘涛 李超 任正一

版式设计:赵颖喆 责任校对:张晓蓉

封面设计:路恩中 责任印制:李洋

三河市国英印务有限公司印刷

2015 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·15.25 印张·367 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-49626-7

ISBN 978-7-89405-783-9 (光盘)

定价:38.00 元(含 1CD)

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线:010-88379833

读者购书热线:010-88379649

网络服务

机工官网:www.cmpbook.com

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

金书网:www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

前 言

计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 是采用现代数值计算的方法求解各类流体力学基本方程或方程组的一门实用性很强、应用面很广的科学学科。CFD 自 20 世纪 60 年代问世以来, 随着现代航空、航天、航海、兵器技术、化工、生化、微型机械以及动力、能源工业的飞速发展和全球生态环境的急剧变化, 各领域涌现出的流体力学问题极大地促进了计算流体力学数值方法的发展。CFD 的理论基础是理论流体力学、实验流体力学和现代计算数学, 它的实现需要并且依赖于现代计算机的软件与硬件环境。它可以给出各类物体绕流问题的流场分布与气动特性, 可以大大地缩短新型产品的研制周期、减少实验次数、降低研制成本。它可以模拟目前人类在地面风洞中无法实现的各种极端环境中的流体力学问题, 可以模拟原子弹与氢弹的爆炸过程、导弹与航天飞机在大气层中的飞行、宇宙星系的形成以及早期宇宙大爆炸的过程。

目前, 国内外已出版了许多部非常优秀的计算流体力学方面的专著与教材, 它们的出版有力地推动了计算流体力学学科的发展, 提升了人们对 CFD 的认知与应用水平。本书是写给普通高校本科生及研究生的通用教材。全书立足于“重基础、重实用、少而精”, 坚持删繁就简的基本原则。本书既讲基本理论与数值格式的构造方法, 又讲数值求解 Navier-Stokes 方程组的全过程, 同时还特别强调数值求解过程的处理技巧。本书结合各类典型算法给出了 51 个相关算例, 并且在本书的光盘中还给出了 40 个典型例题的输入数据与详细的流场计算结果, 这对于那些十分渴望了解各类流动问题所具有的流动分布特征的读者来说是十分有用的。另外, 书中还给出了 292 篇重要参考文献, 其中有多篇是国内外著名科学家和教授们的学术专著, 这给希望进一步深造与了解相关问题的读者搭建了一个十分丰富与非常宝贵的科研阅读平台。更为重要的是, 书中第 9 章首次在教科书中给出了 Gao-Yong 湍流方程组的详细构成与求解过程, 而提出这个方程组并建立 Gao-Yong 理性湍流理论的创始人正是本书的第一作者高歌教授。显然, 以本书这种方式写作的书籍在国内外并不多见, 从这个意义上讲, 该书填补了这方面出版的空白。

本书的五位作者分别来自北京航空航天大学能源与动力工程学院、中国航空研究院新技术研究所和北京理工大学宇航学院。他们五人之中, 两位是长期工作在教学与科研第一线的老教授、老专家, 其余三位是朝气蓬勃的青年学术带头人与学术骨干; 五位作者都具有博士学位, 目前, 他们又都在中国航空研究院从事着科学研究工作。正是这样的研究与写作团队, 才使本书所编著的内容严谨、精细、实用、拓新, 符合少而精的基本原则。本书的结构十分严谨与简明, 由高歌教授牵头、王保国教授参与共同完成了全书编写大纲的编写工作。全书共 10 章, 以讲授典型算法为主, 其中第 1~3 章以及第 9 章的部分内容为不可压缩流动, 第 4~7 章以及第 9 章的部分内容为可压缩流动, 第 8 章为湍流模式, 第 9 章为 Gao-Yong 理性湍流理论, 第 10 章为网格生成。本书第 1~3 章由李凤超高级工程师编写, 第 4~

6章由吴俊宏高级工程师编写,第7~10章由闫文辉高级工程师编写;另外,高歌教授参与了第3、6、9章部分内容的编写工作,王保国教授主要承担了全书的统稿与部分算例的策划工作。本书所附光盘中的例题计算分别由闫文辉、吴俊宏和李凤超完成。书中的主要内容曾在中国航空研究院新技术研究所作为对员工的技术培训与提高的讲课内容,组织学习班多次讲授过,大家反映内容实用、精练,很受员工们的欢迎。

在本书完稿之际,作者们既感到十分欣慰但又有点不安。欣慰的是经过近两年的艰苦努力和在学习班上的多次讲授,书中内容已趋成熟,而且员工们反映很好,现在终于可以正式出版奉献给广大读者;不安的是,计算流体力学内容十分广泛,虽然本书正文与所附光盘中已结合各类典型算法的讲解,给出了91个典型算例与例题,这些算例与例题的涵盖面已相当广泛了,但仍然难以做到内容全面,适合各行业的读者学习。

本书在出版期间得到机械工业出版社,尤其是该社刘涛、李超编辑的大力支持,正是他们一丝不苟的敬业精神才使本书得以如期出版,在此我们表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,对于书中存在的一些疏漏、错误与不妥之处,恳请读者批评指正;还可以通过电子邮件(caexjs@163.com)与我们联系,以便使书中的内容不断改进、完善与提高。

作者

2015年3月28日

目 录

前言

第一篇 计算流体力学的发展简况 及基本方程组 1

第 1 章 计算流体力学的发展历程及 流动控制基本方程组 3

1.1 计算流体力学发展的主要历程 3

1.1.1 不可压缩黏性流动计算方法 的概述 3

1.1.2 可压缩流动计算方法的主要 发展历程 4

1.2 流动控制的基本方程组 5

1.2.1 微分形式的 Navier-Stokes 方程组 5

1.2.2 积分形式的 Navier-Stokes 方程组 6

1.2.3 直角笛卡儿坐标系下的 Navier-Stokes 方程组 6

1.2.4 任意曲线坐标系下 的 Navier-Stokes 方程组 11

第二篇 不可压缩流动的典型 数值方法 15

第 2 章 不可压缩黏性流动的涡量-流函 数高效算法 17

2.1 涡量-流函数方法的控制方程组 17

2.2 控制方程的有限差分离散 18

2.2.1 涡量方程的离散 18

2.2.2 流函数方程的离散 18

2.2.3 压力方程的离散 19

2.3 边界条件的处理 19

2.3.1 进口边界 19

2.3.2 出口边界 20

2.3.3 固体壁面边界 20

2.4 涡量-流函数方法的求解步骤 21

2.5 涡量-流函数方法计算实例 21

2.5.1 二维方腔顶盖驱动流动模拟 21

2.5.2 二维外掠后台阶流动模拟 24

2.5.3 二维方柱绕流模拟 25

2.5.4 二维层流边界层流动模拟 27

第 3 章 一种求解不可压缩黏性流动的 SIMPLE 通用算法 29

3.1 交错网格上控制方程的离散 29

3.1.1 压力波动问题与交错网格 29

3.1.2 控制方程的有限体积离散 30

3.2 压力修正技术 32

3.2.1 压力修正的基本思路和步骤 32

3.2.2 速度修正方程和压力修正方程 32

3.2.3 边界条件的处理 33

3.3 SIMPLE 算法的求解步骤 33

3.4 改进的 SIMPLE 算法 34

3.4.1 SIMPLER 算法 34

3.4.2 SIMPLEC 算法 35

3.4.3 PISO 算法 35

3.5 SIMPLE 系列算法计算实例 37

3.5.1 平面 Poiseuille 流动模拟 37

3.5.2 二维非定常方柱绕流模拟 38

3.5.3 SIMPLE 系列算法的比较 40

习题 41

第三篇 可压缩流动对流项与时间 项处理的典型方法 43

第 4 章 可压缩流动对流项数值格式的 几种处理方法 45

4.1 模型方程及其数学性质 45

4.1.1 线性单行波方程 45

4.1.2 热传导方程 45

4.1.3 无黏 Burgers 方程 46

4.1.4 Burgers 方程 46

4.1.5 KdV-Burgers 方程 46

4.1.6 一维 Euler 方程组 46

4.2 几个经典的差分格式 46

4.2.1 基本差分格式 47

4.2.2 Lax-Friedrichs 格式	47
4.2.3 蛙跳格式	47
4.2.4 Lax-Wendroff 格式	47
4.2.5 人工黏性方法	48
4.3 矢通量分裂方法	48
4.3.1 Steger-Warming 矢通量分裂方法	49
4.3.2 Van Leer 矢通量分裂方法	50
4.4 Roe 格式	50
4.5 Godunov 间断方法	51
4.5.1 Godunov 格式	51
4.5.2 MUSCL 格式	53
4.5.3 PPM 格式	55
4.6 TVD 格式	56
4.6.1 Harten 的二阶 TVD 格式	56
4.6.2 带通量限制因子的二阶 TVD 格式	59
4.6.3 Yee-Roe-Davis 对称性型二阶 TVD 格式	60
4.7 ENO/WENO 格式	61
4.8 间断 Galerkin 有限元方法	65
4.9 数值算例	67
4.9.1 精度分析	67
4.9.2 一维线性标量方程数值实验	68
4.9.3 一维非线性标量方程数值实验	68
4.9.4 一维气体动力学方程组数值实验	70
4.9.5 二维气体动力学方程组数值实验	74
第 5 章 可压缩流黏性项处理的高阶格式	84
5.1 物理坐标系下的 N-S 方程	84
5.2 N-S 方程组的无量纲化	85
5.3 计算坐标系下的 N-S 方程	86
5.4 薄层黏性假设	89
5.5 黏性项的离散格式	91
5.6 典型算例分析	92
5.6.1 激波-边界层相互作用算例	92
5.6.2 后台阶算例	94
5.6.3 喷管射流算例	95
第 6 章 可压缩流时间项处理的几种常用方法	98
6.1 近似因子分解方法	98
6.2 显式 Runge-Kutta 多步格式	99

6.3 双时间步方法	100
6.4 RKDG 有限元方法	101
6.5 典型算例	102
6.5.1 圆柱绕流算例	102
6.5.2 NACA0012 变攻角绕流算例	104
6.5.3 前台阶算例	106
6.5.4 双马赫反射算例	109
习题	111

第四篇 复杂流动问题的典型处理方法及 Gao-Yong 湍流方程组

第 7 章 三维黏性流动的有限体积解法	123
7.1 有限体积法概述	123
7.2 Navier-Stokes 方程组的几种通用形式	125
7.2.1 直角坐标系下的守恒型基本方程组	125
7.2.2 任意曲线坐标系下的守恒型基本方程组	127
7.3 方程组的无量纲化	130
7.4 空间离散格式	131
7.4.1 Jameson 中心差分格式	131
7.4.2 通量差分分裂 Roe 格式	132
7.5 时间积分格式	134
7.5.1 Runge-Kutta 显式时间推进法	134
7.5.2 双时间步的隐式时间离散方法	135
第 8 章 常用的几种湍流模式	137
8.1 湍流模式的发展	137
8.2 涡黏模式	138
8.2.1 零方程湍流模式	139
8.2.2 一方程湍流模式	140
8.2.3 两方程湍流模式	141
8.3 雷诺应力输运模式	146
8.4 非线性湍流模式	152
第 9 章 Gao-Yong 湍流方程组及其典型算例	154
9.1 时间平均、系综平均及 Favre 平均	154
9.2 侧偏平均、加权侧偏平均及其重要性	156
9.3 Gao-Yong 可压缩湍流方程组	158
9.3.1 平均流动基本方程组	158
9.3.2 加权侧偏平均的漂移流	

方程	159	10.1 结构化网格生成方法	192
9.4 Gao-Yong 不可压缩湍流方程组	161	10.1.1 贴体坐标概念	192
9.5 Gao-Yong 湍流方程组计算的典型算例	161	10.1.2 贴体坐标系与直角坐标系间的变换	192
9.5.1 圆射流/平面射流异常问题	162	10.1.3 代数网格生成法	194
9.5.2 平板固壁边界层及转捩	163	10.1.4 基于偏微分方程的网格生成法	197
9.5.3 二维后向台阶分离流动	166	10.1.5 网格质量要求	199
9.5.4 翼型大攻角分离流动	168	10.2 非结构化网格生成方法	200
9.5.5 翼体角偶流动	170	10.2.1 Delaunay 三角化法	200
9.5.6 激波/湍流边界层干扰流动	173	10.2.2 阵面推进法	201
9.5.7 拟序结构流动	180	10.3 自适应 Descartes 直角网格生成技术	201
9.6 小结	185	附录 光盘中习题解答的详细图目	205
习题	185	参考文献	224
第五篇 计算流体力学中网格生成的典型方法	189		
第 10 章 网格生成的几类方法	191		

第一篇 计算流体力学的发展简况 及基本方程组

第 1 章

计算流体力学的发展历程及 流动控制基本方程组

计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 是通过数值方法求解流体力学 (Fluid Dynamics)^[1-20] 控制基本方程组, 以获得流场状态离散的定量描述, 并以此去研究与预测流体运动规律的学科。早在 1946 年世界上第一台电子计算机问世之时, Von Neumann 就预言: 数值方法将会取代解析方法, 用于解决流体力学的非线性问题。随着航空、航天、航海和兵器科学的兴起, CFD 自 20 世纪诞生以来一直在蓬勃地发展, 以近些年出版的计算流体力学方面的专著与教材为例, 在国外, 如 Tannehill^[21]、Hoffmann^[22]、Peyret^[23]、Wilcox^[24]、Blazek^[25] 和 Wesseling^[26] 等著作都十分优秀; 在国内, 如参考文献 [27-41] 等的作者在 CFD 领域做了大量的工作, 它们在不同程度上反映出国内学者们所取得的丰硕成果。

1.1 计算流体力学发展的主要历程

1.1.1 不可压缩黏性流动计算方法的概述

可压缩性是指由于压力变化而引起流体密度变化的性质。按照可压缩性的大小, 可以把流动分为可压缩流动和不可压缩流动两大类。一般情况下, 液体和低速 (马赫数 $Ma < 0.3$) 气体可以假设为不可压缩流体。

在不可压缩流动中, 流体的密度为已知常数。对于作为未知变量的速度分量和压力, 只需联立求解连续方程和动量方程即可。由于压力仅出现在动量方程中, 而没有可以用来直接求解压力的控制方程, 因此如何有效获得压力场成为求解不可压缩流动的核心问题。

图 1.1 中列举了不可压缩黏性流动的主要数值解法。不可压缩黏性流动数值解法可以分为耦合式和分离式两大类^[42]。耦合式解法同时求解离散化的控制方程组, 按照需要同时求解变量范围的不同, 又可以分为全场所有变量联立求解的隐式解法、全场部分变量联立求解的显隐式解法和局部所有变量联立求解的显式解法。总体而言, 耦合式解法内存占用较多, 计算效率较低。分离式解法不直接求解联立的方程组, 而是依次、逐个地求解各变量的代数方程组。按照是否直接求解速度分量和压力, 分离式解法分为非原始变量法和原始变量法。

涡量-流函数法和涡量-速度法是两种典型的非原始变量法。顾名思义, 涡量-流函数法直接求解涡量和流函数, 而涡量-速度法直接求解涡量和各速度分量。引入涡量后, 在由动量方程构造涡量控制方程的过程中, 消去了压力项, 从而避免了求解压力场的问题。对于二维问题, 非原始变量法方程形式简单, 实施便捷, 尤其是涡量-流函数法可以少求解一个方

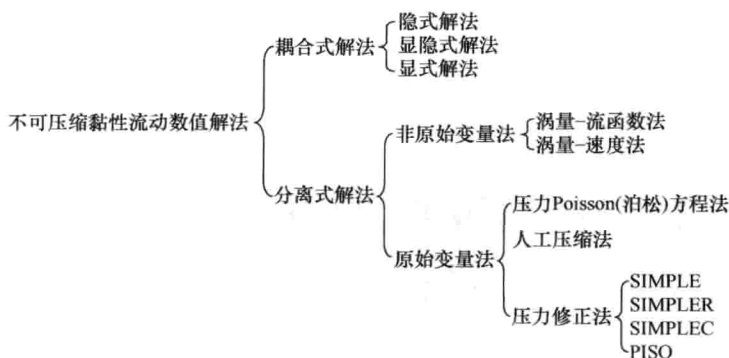


图 1.1 不可压缩黏性流动的主要数值解法

程, 计算效率高。但涡量在壁面边界上难以确定, 并且在三维流动问题中控制方程形式复杂, 因此限制了非原始变量法的使用范围。

原始变量法主要包括压力 Poisson (泊松) 方程法、人工压缩法和压力修正法等多种方法。压力 Poisson 方程法对动量方程取散度, 从而建立了关于压力的 Poisson 方程。MAC (Marker and Cell) 方法是其中的一种著名方法^[43], 该方法使用交错网格和在每个时间层内求解压力 Poisson 方程的特色被后来许多派生的方法所继续采用^[44, 45]。人工压缩法借用可压缩流动的计算方法, 引入虚拟的可压缩性, 将不可压缩形式的连续方程转变为包含人工密度的连续方程, 并通过人工状态方程逐步求解压力^[46]。由于这种方法要求的时间步长很小, 而且需要合理假设人工压缩性的大小, 因此限制了它的广泛应用。

压力修正法是目前求解不可压缩流动问题的主导方法, 适用于从二维到三维、定常到非定常、层流到湍流等各类复杂问题^[47]。该方法的基本思路是, 先假设一个压力场, 然后求解动量方程得到速度场; 由于假设的压力场未必准确, 速度场可能不满足连续方程, 因此需要根据连续方程对流场进行修正; 再由修正后的速度场和压力场, 继续迭代, 直至收敛。压力修正法主要包括 SIMPLE^[48]、SIMPLER^[49, 50]、SIMPLEC^[51] 和 PISO^[52, 53] 等多种算法。

1.1.2 可压缩流动计算方法的主要发展历程

计算流体力学^[21, 22]发展的初期, 主要先从无黏性流动做起。描述无黏性流动的 Euler (欧拉) 方程组与描述黏性流动的 Navier-Stokes (纳维-斯托克斯) 方程组相比, 两者仅相差了一些黏性项。而黏性项具有椭圆形特征, 通常采用简单的中心差分格式进行离散就能够得到很好的效果。正是由于这个特点, 使得几乎所有 Euler 方程组的数值计算方法都可以应用到 Navier-Stokes 方程组的求解中。

Euler 方程组的求解方法可以分为两大类, 即中心型格式和迎风型格式。在中心型格式计算方面, Lax 和 Wendroff 提出了在时间和空间上都具有二阶精度的显式有限差分 Lax-Wendroff 格式^[54]。该格式是建立在对时间的 Taylor (泰勒) 展开式基础上, 由于对时间二阶偏导数的存在, 使得代数运算过程比较繁琐。MacCormack 格式^[55]是 Lax-Wendroff 格式的一个变种, 但在使用时更加便捷。该格式采用了预测-校正两步方法, 并且在预测步中使用向前差分, 在校正步中使用向后差分, 所以该格式也具有二阶精度。Jameson 中心型格式^[56]是具有二阶精度的显式有限体积格式, 它使用了四阶和二阶混合形式的人工黏性。四阶人工

黏性保证了格式的收敛性,同时不影响格式的空间精度;二阶人工黏性用来抑制激波附近的振荡,使得该格式具有一定的激波捕捉能力。总体而言,中心型格式思路清晰,计算量小,但由于采用了人工黏性,数值耗散难以控制。

在迎风型格式计算方面,20世纪50年代,Godunov提出了著名的基于精确Riemann求解的一阶迎风格式^[57],为后续多种计算方法奠定了基础。70年代, Van Leer提出 MUSCL 插值方法^[58-62],将 Godunov 格式由一阶精度提高到二阶精度。80年代, Roe^[63]和 Osher^[64]分别提出两类通量差分裂 (Flux Difference Splitting, FDS) 格式。前者采用的是强间断近似关系式,后者采用的是弱间断精确关系式。在多数情况下, Roe 格式捕捉激波的能力要优于 Osher 格式。FDS 格式是近似 Riemann 求解方法,与需要精确求解 Riemann 问题的原始 Godunov 格式相比,其计算量大大减小。

同样在80年代, Steger 和 Warming^[65]、Van Leer^[66]提出了另一种迎风型格式,即矢通量分裂 (Flux Vector Splitting, FVS) 格式。其中, Steger-Warming 格式将对流矢通量按照特征值的正负进行分裂,而 Van Leer 格式按照当地马赫数进行分裂,因此 Van Leer 格式中矢通量的一阶导数在声速处连续,而 Steger-Warming 格式中的不连续性则会导致非物理解的产生。

90年代, Liou 等提出了对流迎风分裂 (Advection Upstream Splitting Method, AUSM) 格式^[67],并相继发展出一系列 AUSM 类格式^[68],其中具有代表性的是 AUSM+ 格式^[69]。该格式将压力项和对流通量分别分裂,并将线性场和非线性场分开处理。该格式兼有 Roe 格式的间断高分辨率和 Van Leer 格式的计算效率,并且能够保证在计算中标量恒为正值。

在高分辨率计算方面,1983年, Harten 提出了总变差衰减 (Total Variation Diminishing, TVD) 的概念^[70],并构造了具有二阶精度的 TVD 格式,为后续多种高分辨格式的建立奠定了基础。TVD 格式具有精度高、分辨率高、捕捉激波无振荡等优点,但是存在局部极值点精度降阶的缺陷。为了保持一致高阶精度, Harten 和 Liu 等对 TVD 格式进行改进,先后提出 ENO (Essentially Non-Oscillatory) 格式^[71]和 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) 格式^[72]。这些高分辨率格式可以出色地模拟包含激波的复杂流场,并且可以有效地抑制数值解的振荡。

1.2 流动控制的基本方程组

1.2.1 微分形式的 Navier-Stokes 方程组

流体运动应满足质量守恒、动量守恒和能量守恒三大物理学定律,因此流动控制的基本方程组包括相对应的连续方程、动量方程和能量方程,其微分形式分别为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot \Pi \quad (1.2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho H \mathbf{V}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\Pi \cdot \mathbf{V}) + \rho \dot{q} + \nabla \cdot (\kappa \nabla T) \quad (1.2.3)$$

式中, t 为时间; ρ 为密度; $\mathbf{V}$ 为速度矢量; p 为压力; T 为温度; $\mathbf{f}$ 为作用在单位质量流体

上的体积力矢量; Π 表示黏性应力张量; $\dot{q}$ 为热辐射或化学反应等原因传入单位质量流体内部的热量; κ 为热导率; E 为单位质量流体的总内能; H 为单位质量流体的总焓。 E 和 H 满足

$$E = e + \frac{V^2}{2} \quad (1.2.4)$$

$$H = E + \frac{p}{\rho} \quad (1.2.5)$$

式中, e 为单位质量流体的内能; V 为速度标量。

根据牛顿流体的本构关系, Π 满足

$$\Pi = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (1.2.6)$$

式中, λ 为第二黏度 (黏性系数); μ 为动力黏度; $\mathbf{I}$ 为单位张量; $\mathbf{E}$ 为应变率张量。

1.2.2 积分形式的 Navier-Stokes 方程组

积分形式下的连续方程、动量方程和能量方程分别为

$$\iiint_{\tau^*} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \oint_{\sigma^*} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = 0 \quad (1.2.7)$$

$$\iiint_{\tau^*} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} d\tau + \oint_{\sigma^*} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \iiint_{\tau^*} \rho \mathbf{f} d\tau + \oint_{\sigma^*} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi} d\sigma \quad (1.2.8)$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau^*} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} d\tau + \oint_{\sigma^*} \rho E(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma &= \iiint_{\tau^*} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\tau + \oint_{\sigma^*} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi}) \cdot \mathbf{V} d\sigma + \\ &\quad \iiint_{\tau^*} \rho \dot{q} d\tau + \oint_{\sigma^*} \kappa(\mathbf{n} \cdot \nabla T) d\sigma \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

式中, τ^* 为控制体; σ^* 为控制面; $\mathbf{n}$ 为单位外法线矢量; τ 为控制体内的微元体积; σ 为控制面上的微元面积; $\boldsymbol{\pi}$ 表示应力张量。

$\boldsymbol{\pi}$ 与黏性应力张量满足关系

$$\boldsymbol{\pi} = \Pi - p\mathbf{I} \quad (1.2.10)$$

1.2.3 直角笛卡儿坐标系下的 Navier-Stokes 方程组

1. 有量纲形式的基本方程组

在直角笛卡儿坐标系 (x, y, z) 下, 三维 Navier-Stokes 方程组可以写成以下统一形式:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{G}_c - \mathbf{G}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{H}_c - \mathbf{H}_v)}{\partial z} + \mathbf{S} = 0 \quad (1.2.11)$$

式中, $\mathbf{Q}$ 为守恒变量矢量; $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ 分别为三个坐标方向上的通量矢量, 下标 c 代表对流通量, 下标 v 代表黏性通量; $\mathbf{S}$ 为源项矢量。

式 (1.2.11) 中各矢量项的具体形式为

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (1.2.12)$$

$$\mathbf{F}_c = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho vu \\ \rho wu \\ \rho Hu \end{pmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho wv \\ \rho Hv \end{pmatrix} \quad (1.2.14)$$

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho Hw \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (1.2.16)$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.2.17)$$

$$\mathbf{H}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1.2.18)$$

$$\mathbf{S} = -\rho \begin{pmatrix} 0 \\ f_x \\ f_y \\ f_z \\ uf_x + vf_y + wf_z + q \end{pmatrix} \quad (1.2.19)$$

式中, u 、 v 和 w 分别为三个坐标方向上的速度分量。

黏性应力满足

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.2.20a)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (1.2.20b)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (1.2.20c)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \tau_{yx} \quad (1.2.20d)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \tau_{zx} \quad (1.2.20e)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \tau_{zy} \quad (1.2.20f)$$

对于理想气体, 其状态方程满足

$$p = \rho RT = (\gamma - 1) \rho \left[E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \quad (1.2.21)$$

式中, γ 为等熵指数 (绝热指数), R 为气体常数。

2. 无量纲形式的基本方程组

在流动模拟过程中, 通常求解无量纲形式的控制方程组^[73]。方程组无量纲化后, 可以避免各变量在量级上的巨大差异, 减小了不必要的数值误差; 引入相似参数, 减小了计算量; 易于实现相似计算, 使结果更具有通用性。

选取特征长度 L 、特征密度 ρ_∞ 、特征速度 V_∞ 、特征声速 a_∞ 、特征温度 T_∞ 和特征动力黏度 μ_∞ , 定义无量纲密度 $\tilde{\rho}$ 、速度 $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ 、压力 $\tilde{p}$ 、温度 $\tilde{T}$ 、总内能 $\tilde{E}$ 、总焓 $\tilde{H}$ 、体积力 $(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y, \tilde{f}_z)$ 、吸热量 $\tilde{q}$ 、时间 $\tilde{t}$ 和坐标 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 分别为

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad (1.2.22)$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{a_\infty}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{a_\infty}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{a_\infty} \quad (1.2.23)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho_\infty a_\infty^2} \quad (1.2.24)$$

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_\infty} \quad (1.2.25)$$

$$\tilde{E} = \frac{E}{a_\infty^2} \quad (1.2.26)$$

$$\tilde{H} = \frac{H}{a_\infty^2} \quad (1.2.27)$$

$$\tilde{f}_x = \frac{f_x L}{a_\infty^2}, \quad \tilde{f}_y = \frac{f_y L}{a_\infty^2}, \quad \tilde{f}_z = \frac{f_z L}{a_\infty^2} \quad (1.2.28)$$

$$\tilde{q} = \frac{\dot{q} L}{a_\infty^3} \quad (1.2.29)$$

$$\tilde{t} = \frac{t a_\infty}{L} \quad (1.2.30)$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}, \bar{z} = \frac{z}{L} \quad (1.2.31)$$

那么三维 Navier-Stokes 方程组可以写成以下形式:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{F}}_e - \tilde{\mathbf{F}}_v)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{G}}_e - \tilde{\mathbf{G}}_v)}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial(\tilde{\mathbf{H}}_e - \tilde{\mathbf{H}}_v)}{\partial \tilde{z}} + \tilde{\mathbf{S}} = 0 \quad (1.2.32)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\rho}\tilde{u} \\ \tilde{\rho}\tilde{v} \\ \tilde{\rho}\tilde{w} \\ \tilde{\rho}\tilde{E} \end{pmatrix} \quad (1.2.33)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_e = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}\tilde{u} \\ \tilde{\rho}\tilde{u}^2 + \tilde{p} \\ \tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{u} \\ \tilde{\rho}\tilde{w}\tilde{u} \\ \tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{u} \end{pmatrix} \quad (1.2.34)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_e = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}\tilde{v} \\ \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v} \\ \tilde{\rho}\tilde{v}^2 + \tilde{p} \\ \tilde{\rho}\tilde{w}\tilde{v} \\ \tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{v} \end{pmatrix} \quad (1.2.35)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_e = \begin{pmatrix} \tilde{\rho}\tilde{w} \\ \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{w} \\ \tilde{\rho}\tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{\rho}\tilde{w}^2 + \tilde{p} \\ \tilde{\rho}\tilde{H}\tilde{w} \end{pmatrix} \quad (1.2.36)$$