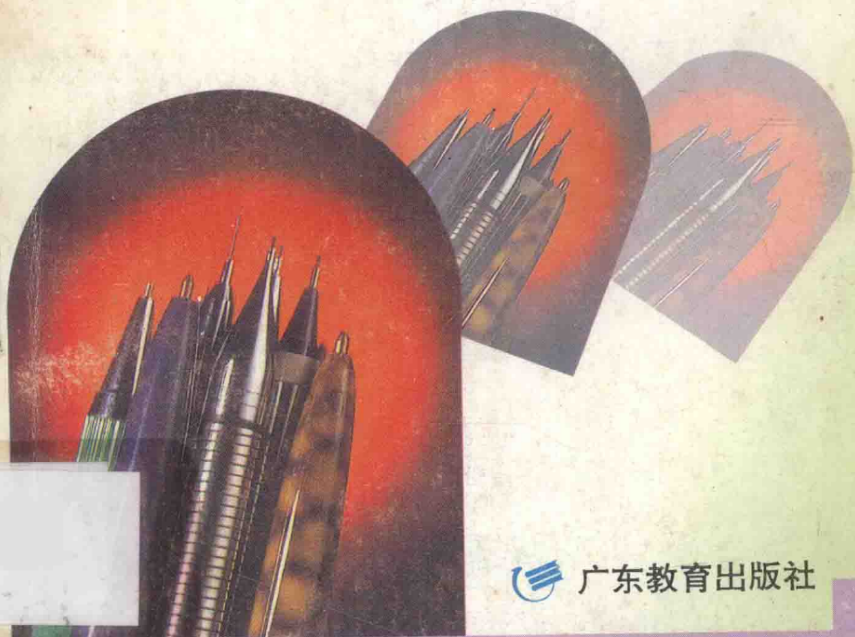


九年义务教育

全新

初中数学解难释疑

(二年级)



广东教育出版社

九年义务教育

全 新

初中数学解难释疑

(二年级)

何 春 李凤仙 陈 同

李安华 肖 宁

广东教育出版社

九年义务教育
全新初中数学解难释疑
(二年级)

何春 李凤仙 陈同 编
李安华 肖宁

*

广东教育出版社出版发行
广东省新华书店经销
广东省英德人民印刷厂印刷

787 × 1092 毫米 32 开本 6.75 印张 135,000 字

1995 年 9 月第 1 版 1996 年 1 月第 2 次印刷

印数 7701—37,800 册

ISBN 7-5406-3319-0

G·3139 定价 5.20 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与本厂联系调换.

出 版 说 明

本丛书是为配合九年义务教育的实施,由我社组织有关专家编写的一套初中各主要学科的辅导读物,其中包括语文,英语,数学(以上三科均为一、二、三年级各1册),物理(二、三年级各1册),化学(三年级1册)等,共12册.

本丛书紧扣九年义务教育初中各科教学大纲,兼顾不同层次学生的接受能力,尽可能囊括初中阶段各学科教与学两方面所遇到的主要问题,围绕重点、难点和关键点,展开解难释疑.

根据初中各学科的特点和教学要求,本丛书在内容编排上,与实际教学顺序一致,力求在教学的各个阶段上,都能及时地为师生提供必要的参考资料.本丛书把各类问题按其性质、要求掌握的程度、解决问题的方法等,进行了科学的归类处理,各栏目既相对独立,又相互联系,师生在使用时可各取所需.

书中对问题的解析,力求深入浅出,准确明晰,当长之处则长,当短之处则短,以帮助学生解决疑难,培养兴趣,发展智力.

本丛书的编写者,都是对本学科知识很有素养的专家学者,而且他们对初中各科课程设置、教学安排的见解具有一定的权威性和指导性,相信本丛书能对广大师生的教和学有较大的裨益.我们热切希望广大师生对本丛书多提宝贵意见,以便进一步完善.

目 录

代数部分

第八单元 因式分解	(3)
一、学习提纲	(3)
二、疑难解析	(5)
1. 什么是因式分解	(5)
2. 提公因式法的运用	(7)
3. 运用公式分解因式	(10)
4. 十字相乘法的运用	(12)
5. 怎样分组	(14)
6. 因式分解的结果是否唯一	(15)
三、例题选讲	(17)
四、单元自测	(23)
第九单元 分式	(26)
一、学习提纲	(26)
二、疑难解析	(29)
1. 认识分式的意义	(29)
2. 分式基本性质的应用	(30)
3. 分式中分数线的作用	(32)
4. 对照分数学习分式	(34)
5. 在分式运算中使用运算律	(36)

6. 解分式方程时出现增根的原因	(38)
三、例题选讲	(40)
四、单元自测	(47)
第十单元 数的开方	(50)
一、学习提纲	(50)
二、疑难解析	(52)
1. 从乘方入手学习开方	(52)
2. 方根个数的确定	(54)
3. 实数的有关性质	(55)
4. $\sqrt{2}$ 能写成分数吗	(56)
三、例题选讲	(57)
四、单元自测	(61)
第十一单元 二次根式	(64)
一、学习提纲	(64)
二、疑难解析	(67)
1. 理解二次根式的意义	(67)
2. 积和商的算术根的性质	(70)
3. 为什么要分母有理化	(70)
4. 二次根式的化简	(71)
5. 二次根式的和或差	(73)
6. $\sqrt{a^2}$ 和 $(\sqrt{a})^2$ 的异同	(74)
三、例题选讲	(76)
四、单元自测	(90)

几何部分

第三单元 三角形	(97)
-----------------------	------

一、学习提纲	(97)
二、疑难解析	(102)
1. 理解三角形的分类	(102)
2. 认识三角形的高线	(104)
3. 三角形三条边的构成	(106)
4. 理解三角形全等的公理	(108)
5. 怎样理解点的集合	(110)
6. 图形成轴对称和轴对称图形	(110)
7. 勾股定理及其逆定理的应用	(112)
8. 勾股定理的几何意义与证明	(113)
三、例题选讲	(115)
四、单元自测	(123)
第四单元 四边形	(126)
一、学习提纲	(126)
二、疑难解析	(131)
1. 四边形、平行四边形、梯形的分类	(131)
2. 多边形内角和定理的有趣证法	(134)
3. 理解各类四边形的定义	(135)
4. 掌握各类四边形的判定	(136)
5. 四边形问题向三角形问题转化	(137)
6. 中位线定理的应用	(139)
7. 利用四边形的性质研究三角形	(140)
三、例题选讲	(142)
四、单元自测	(150)
第五单元 相似形	(153)
一、学习提纲	(153)

二、疑难解析	(156)
1. 理解线段的比和线段成比例	(156)
2. 比例基本性质的应用	(158)
3. 理解平行线分线段成比例定理	(160)
4. 和三角形一边平行的直线	(161)
5. 相似三角形与全等三角形的判定	(164)
6. 怎样证明线段成比例	(164)
7. 直角三角形斜边上高线的作用	(166)
三、例题选讲	(168)
四、单元自测	(178)
参考答案	(182)

代 数 部 分

第八单元 因式分解

一、学习提纲

1. 因式分解的概念

把一个多项式化为几个整式的积的形式,叫做把这个多项式因式分解,也叫做把这个多项式分解因式.

例如,等式 $am + bm + an + bn = (a + b)(m + n)$ 的左边是一个四项式,右边是两个二项式的积,从左到右的变形就是因式分解.

如果注意到从右到左的变形,容易知道,这是多项式的乘法,这说明,因式分解和多项式乘法的变形方向是相反的.

2. 因式分解的方法

(1) 提公因式法 把乘法对加法的分配律反向应用,即

$$ma + mb - mc = m(a + b - c).$$

由于多项式各项的公因式提到括号外后,括号内的多项式就变得简单,特点突出,所以,此法是作因式分解时应首先考虑使用的方法.

(2) 运用公式法 把乘法公式反向应用,就可以用于进行某些多项式的因式分解.下面将 5 个乘法公式反向写出:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2;$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

由上可见,它们的左边都是多项式,右边则是两个整式的乘积,因而都实现了多项式的因式分解.

以上各式中的 a 和 b ,都可以表示任何一个代数式,所以这几个式子的应用范围极为广泛.

(3) 分组分解法 对于那些既没有公因式可以提取,又不能化归为可应用公式形式的多项式,就可以考虑应用分组分解的办法,实现分组分解的目的.

利用分组分解法的关键,在于不仅分组后的每一个组都能进行因式分解,更在于各组分解完毕后,能为整个式的进一步分解创造条件,只有这样的分组方法才是有意义的.

(4) 十字相乘法 十字相乘法,是对可以看作二次三项式的多项式的一种特殊的分解方法,下面看等式:

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

这个式子表明:当二次项的系数是 1 时,只有一次项的系数可以看作两个数的和,而常数项又恰是这两个数的积时,才能用十字相乘法进行因式分解.

而对二次项系数不是 1 的等式:

$$a_1a_2x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)x + b_1b_2 = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$$

则表明:仅当二次三项式各项的系数满足上面的条件时,才能用十字相乘法进行因式分解.

至于是否满足这个条件,可列出关系式 $\begin{array}{c} a_1 \quad b_1 \\ | \quad \diagdown \\ | \quad \diagup \\ a_2 \quad b_2 \end{array}$ 来判断.

所以该法又叫做十字相乘法.

3. 因式分解的应用

很多数学问题的解法,都离不开代数式的运算和变形,而代数式的运算和变形最终都归结为整式的运算和变形,所以因式分解的变形有着广泛的应用.

学习了因式分解以后,不仅应熟练掌握因式分解的技能,而且应当善于应用因式分解解决问题,树立并加强应用因式分解的意识.

二、疑难解析

1. 什么是因式分解

我们已经知道,把一个多项式化为几个整式的积的形式,叫做把这个多项式因式分解.但这只是对因式分解的最基本的了解,需要深入探讨,多加练习,才能灵活自如地掌握因式分解的方法与技巧.

(1) 分解的结果必须是整式的积.

作为多项式的因式分解的结果,必须是几个整式的积.这样,下面的变形

$$x^2 - 4xy + 12xy^2 = x(x - 4y) + 12xy^2;$$

$$x^2 - 4xy - 12xy^2 = x^2 - 4xy(1 + 3y),$$

其结果虽然包括积 $x(x - 4y)$ 和 $-4xy(1 + 3y)$,但从结果的整体来看,它们仍然是和或差的形式,所以,它们的结果仍没做到因式分解.

再看一个例子,二项式 $a - 4$ 可以有如下的变形:

$$a-4=\frac{1}{a+4}(a+4)(a-4),$$

然而,因为结果是分式,所以仍不能认为这个变形是因式分解.

因此,结果的整体是不是几个整式的积的形式,是判断多项式的变形是不是因式分解的首要条件.

(2) 要注意多项式的因式分解在哪个数集中进行.

这句话的意思是说,要弄清变形前后多项式中各项的系数属于哪个数集中的数.

目前,我们进行的因式分解都是在有理数集上进行的,也就是说,我们只是对有理系数的多项式进行因式分解,分解的结果,各因式也是有理系数的整式,如

$$3ab^2 - \frac{3}{4}ac^2 = 3a(b^2 - \frac{1}{4}c^2) = 3a(b + \frac{1}{2}c)(b - \frac{1}{2}c), \quad ①$$

就是在有理数范围内的分解.

但是,应当注意,我们可以进一步使得分解的结果中,各多项式各项的系数都是整数,如①式可得

$$3ab^2 - \frac{3}{4}ac^2 = \frac{3}{4}a(4b^2 - c^2) = \frac{3}{4}a(2b+c)(2b-c),$$

这样,可以使得同一个多项式作因式分解时,结果是唯一的.

如果限定因式分解在有理数集上进行,很多多项式是不能分解的,如

$$a^2-2, x^2-2x-2$$

等都是不能分解的多项式.这并不是说,它们在其它数集上也不能分解.这一点,将在以后的学习中研讨.

(3) 多项式作因式分解后所得的各多项式,都必须是不能再分解的多项式.

作因式分解时,每一步分解,都产生两个多项式的积,但它们不一定是分解因式的最终结果,必须使作为结果的积中的每一个多项式都不能再分解(在当前是指在有理数集中)时,那个积才作为因式分解的结果,如

$$a^8 - 256b^8 = (a^4 + 16b^4)(a^4 - 16b^4);$$

$$2x^2y - 12xy - 182y = 2y(x^2 - 6x - 91),$$

只得到了因式分解的中间结果,而不是最终的结果.事实上,以上两式分别应得:

$$\begin{aligned} a^8 - 256b^8 &= (a^4 + 16b^4)(a^4 - 16b^4) \\ &= (a^4 + 16b^4)(a^2 + 4b^2)(a^2 - 4b^2) \\ &= (a^4 + 16b^4)(a^2 + 4b^2)(a + 2b)(a - 2b); \end{aligned}$$

$$2x^2y - 12xy - 182y = 2y(x^2 - 6x - 91)$$

$$= 2y(x - 13)(x + 7),$$

以上才是最终的结果.

思考题

- 1.1 什么叫做因式分解?
- 1.2 作因式分解时(这里指在有理数集上进行的因式分解),对分解的最终结果有哪些要求?
- 1.3 怎样做才能使分解的结果有唯一的形式?

2. 提公因式法的运用

(1) 怎样确定多项式各项的公因式?

在运用提公因式法进行因式分解时,应注意避免下面的情况发生,如

$$8a^3x^3 - 36a^5x^2 - 12a^4x^4 = 4a^3(2x^3 - 9a^2x^2 - 3ax^4) \quad ①$$

或
$$12ab^2(a-b)^2 - 9a^3b^2(a-b)^3$$

$$=3ab^2[4(a-b)^2-3a^2(a-b)^3]. \quad ②$$

以上两个变形过程都没有完成,原因在于没有能正确地确定多项式中各项的公因式.

应当按照下面的原则来确定公因式:

① 当系数是整数时,应把各项系数的最大公约数,作为公因式的系数;

② 无一遗漏地把各项都含有的字母的最低次幂,作为公因式的因式;

③ 要注意,有时我们把整式中多次出现的相同多项式的幂看作某个字母的幂,如②式中 $(a-b)^2$ 和 $(a-b)^3$ 看作 m^2 和 $m^3(m=a-b)$,那么原来的整式就可以看作多项式

$$12ab^2m^2-9a^3b^2m^3,$$

而 $m^2=(a-b)^2$ 仍应是其公因式中的一个因式,不应遗漏.

(2) 一个多项式经过提公因式的变形后,它的项数是否会减少?

一般地说,多项式经过提公因式的变形以后,所得整式的积的形式是:

$$n \text{ 项式} = \text{公因式} \times \text{新的 } n \text{ 项式}.$$

如果变形前后多项式没有公因式时,项数既不增加,也不会减少.即便是公因式和多项式的某一项完全相同,或只有符号不同时,这一项“全部提取”,这一项也不会“消失”,而只能写为1或-1.

这一点,如果把变形步骤写完整,就可以一目了然,如

$$\begin{aligned} & 24x^3+16x^2y-8x^2 \\ &= 8x^2 \cdot 3x + 8x^2 \cdot 2y - 8x^2 \cdot 1 \\ &= 8x^2(3x+2y-1). \end{aligned}$$

(3) 有条件时,应注意促进非公因式向公因式的转化.

多项式 $(a-b)^2+3(b-a)^3$ 有公因式吗?

应该说,在现有的形式下,它的各项没有公因式,但是由于

$$(a-b)^2=(b-a)^2,$$

$$(b-a)^3=[-(a-b)]^3=-(a-b)^3,$$

所以可以使这些表面看来不是公因式的因式,转化为公因式,从而促进分解因式的进行.例如,可以有下面不同的因式分解法:

$$\begin{aligned}(a-b)^2+3(b-a)^3 \\ = (b-a)^2+3(b-a)^3 = (b-a)^2(1+3b-3a)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}(a-b)^2+3(b-a)^3 \\ = (a-b)^2-3(a-b)^3 = (a-b)^2(1-3a+3b).\end{aligned}$$

不难看出,两个结果是相同的.

思考题

- 2.1 你认为“公因式”可能是怎样的代数式?它是怎样组成的?
- 2.2 当多项式的某一项本身就是公因式,或某一项的相反数是公因式时,提出公因式后,这一项将发生什么情况?
- 2.3 当两个幂的底数是相反数时,它们可能化为同底数的幂吗?在转化的过程中,应遵循怎样的规律?