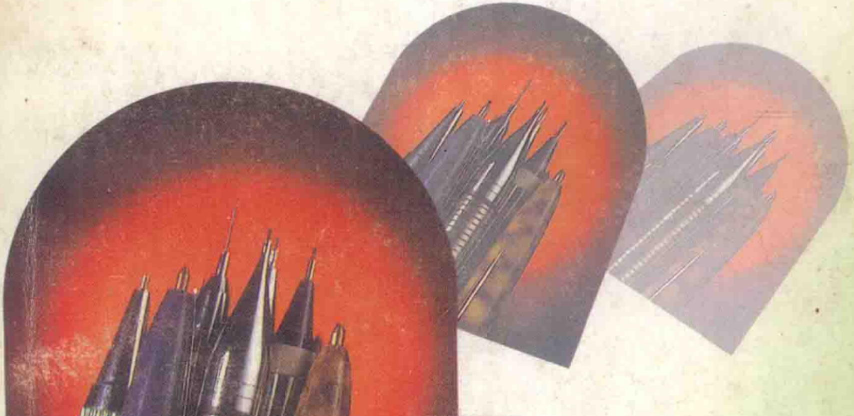
九年义务教育

全新

初中数学解难释疑

（二年级）



广东教育出版社

九年义务教育

全　新
初中数学解难释疑

（二年级）

何春　李凤仙　陈同
李安华　　肖宁

广东教育出版社

九年义务教育

全新初中数学解难释疑

（二年级）

何春　李凤仙　陈同
李安华　肖宁　编

*

广东教育出版社出版发行
广东省新华书店经销
广东省英德人民印刷厂印刷
787×1092 毫米　32 开本　6.75 印张　135,000 字
1995年 9 月第 1 版　1996 年 1 月第 2 次印刷
印数 7701－37,800 册
ISBN 7－5406－3319－0
G·3139　定价　5.20 元

出 版 说 明

本丛书是为配合九年义务教育的实施，由我社组织有关专家编写的一套初中各主要学科的辅导读物，其中包括语文，英语，数学(以上三科均为一、二、三年级各1册)，物理(二、三年级各1册)，化学(三年级1册)等，共12册.

本丛书紧扣九年义务教育初中各科教学大纲，兼顾不同层次学生的接受能力，尽可能囊括初中阶段各学科教与学两方面所遇到的主要问题，围绕重点、难点和关键点，展开解难释疑.

根据初中各学科的特点和教学要求，本丛书在内容编排上，与实际教学顺序一致，力求在教学的各个阶段上，都能及时地为师生提供必要的参考资料. 本丛书把各类问题按其性质、要求掌握的程度、解决问题的方法等，进行了科学的归类处理，各栏目既相对独立，又相互联系，师生在使用时可各取所需.

书中对问题的解析，力求深入浅出，准确明晰，当长之处则长，当短之处则短，以帮助学生解决疑难，培养兴趣，发展智力.

本丛书的编写者，都是对本学科知识很有素养的专家学者，而且他们对初中各科课程设置、教学安排的见解具有一定的权威性和指导性，相信本丛书能对广大师生的教和学有较大的裨益. 我们热切希望广大师生对本丛书多提宝贵意见，以便进一步完善.

目　录

代数部分

几何部分

代 数 部 分

第八单元　因式分解

一、学习提纲

1. 因式分解的概念

把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.

例如，等式 $am+bm+an+bn=(a+b)(m+n)$ 的左边是一个四项式，右边是两个二项式的积，从左到右的变形就是因式分解.

如果注意到从右到左的变形，容易知道，这是多项式的乘法，这说明，因式分解和多项式乘法的变形方向是相反的.

2. 因式分解的方法

（1）　提公因式法　把乘法对加法的分配律反向应用，即

$$ma+mb-mc=m(a+b-c).$$

由于多项式各项的公因式提到括号外后，括号内的多项式就变得简单，特点突出，所以，此法是作因式分解时应首先考虑使用的方法.

（2）　运用公式法　把乘法公式反向应用，就可以用于进行某些多项式的因式分解. 下面将 5 个乘法公式反向写出：

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2;$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

由上可见，它们的左边都是多项式，右边则是两个整式的乘积，因而都实现了多项式的因式分解.

以上各式中的 a 和 b，都可以表示任何一个代数式，所以这几个式子的应用范围极为广泛.

（3） 分组分解法　对于那些既没有公因式可以提取，又不能化归为可应用公式形式的多项式，就可以考虑应用分组分解的办法，实现分组分解的目的.

利用分组分解法的关键，在于不仅分组后的每一个组都能进行因式分解，更在于各组分解完毕后，能为整个式的进一步分解创造条件，只有这样的分组方法才是有意义的.

（4） 十字相乘法　十字相乘法，是对可以看作二次三项式的多项式的一种特殊的分解方法，下面看等式：

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

这个式子表明：当二次项的系数是 1 时，只有一次项的系数可以看作两个数的和，而常数项又恰是这两个数的积时，才能用十字相乘法进行因式分解.

而对二次项系数不是 1 的等式：

$$a_1a_2x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)$$

则表明：仅当二次三项式各项的系数满足上面的条件时，才能用十字相乘法进行因式分解.

至于是否满足这个条件，可列出关系式 $\begin{array}{ccc} a_1 & & b_1 \\ & \times & \\ a_2 & & b_2 \end{array}$ 来判断.

所以该法又叫做十字相乘法.

3. 因式分解的应用

很多数学问题的解法，都离不开代数式的运算和变形，而代数式的运算和变形最终都归结为整式的运算和变形，所以因式分解的变形有着广泛的应用.

学习了因式分解以后，不仅应熟练掌握因式分解的技能，而且应当善于应用因式分解解决问题，树立并加强应用因式分解的意识.

二、疑难解析

1. 什么是因式分解

我们已经知道，把一个多项式化为几个整式的积的形式，叫做把这个多项式因式分解. 但这只是对因式分解的最基本的了解，需要深入探讨，多加练习，才能灵活自如地掌握因式分解的方法与技巧.

(1) 分解的结果必须是整式的积.

作为多项式的因式分解的结果，必须是几个整式的积.

这样，下面的变形

$$x^2-4xy+12xy^2=x(x-4y)+12xy^2;$$

$$x^2-4xy-12xy^2=x^2-4xy(1+3y),$$

其结果虽然包括积 $x(x-4y)$ 和 $-4xy(1-3y)$，但从结果的整体来看，它们仍然是和或差的形式，所以，它们的结果仍没做到因式分解.

再看一个例子，二项式 $a-4$ 可以有如下的变形：

$$a-4=\frac{1}{a+4}(a+4)(a-4),$$

然而，因为结果是分式，所以仍不能认为这个变形是因式分解.

因此，结果的整体是不是几个整式的积的形式，是判断多项式的变形是不是因式分解的首要条件.

(2) 要注意多项式的因式分解在哪个数集中进行.

这句话的意思是说，要弄清变形前后多项式中各项的系数属于哪个数集中的数.

目前，我们进行的因式分解都是在有理数集上进行的，也就是说，我们只是对有理系数的多项式进行因式分解，分解的结果，各因式也是有理系数的整式，如

$$3ab^2-\frac{3}{4}ac^2=3a\left(b^2-\frac{1}{4}c^2\right)=3a\left(b+\frac{1}{2}c\right)\left(b-\frac{1}{2}c\right), \quad ①$$

就是在有理数范围内的分解.

但是，应当注意，我们可以进一步使得分解的结果中，各多项式各项的系数都是整数，如①式可得

$$3ab^2-\frac{3}{4}ac^2=\frac{3}{4}a(4b^2-c^2)=\frac{3}{4}a(2b+c)(2b-c),$$

这样，可以使得同一个多项式作因式分解时，结果是唯一的.

如果限定因式分解在有理数集上进行，很多多项式是不能分解的，如

$$a^2-2,\ x^2-2x-2$$

等都是不能分解的多项式. 这并不是说，它们在其它数集上也不能分解. 这一点，将在以后的学习中研讨.

(3) 多项式作因式分解后所得的各多项式，都必须是不能再分解的多项式.

作因式分解时，每一步分解，都产生两个多项式的积，但它们不一定是分解因式的最终结果，必须使作为结果的积中的每一个多项式都不能再分解（在当前是指在有理数集中）时，那个积才作为因式分解的结果，如

$$a^8-256b^8=(a^4+16b^4)(a^4-16b^4);$$

$$2x^2y-12xy-182y=2y(x^2-6x-91),$$

只得到了因式分解的中间结果，而不是最终的结果. 事实上，以上两式分别应得：

$$\begin{aligned}a^8-256b^8&=(a^4+16b^4)(a^4-16b^4)\\&=(a^4+16b^4)(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)\\&=(a^4+16b^4)(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x^2y-12xy-182y&=2y(x^2-6x-91)\\&=2y(x-13)(x+7),\end{aligned}$$

以上才是最终的结果.

思考题

1.1 什么叫做因式分解？

1.2 作因式分解时（这里指在有理数集上进行的因式分解），对分解的最终结果有哪些要求？

1.3 怎样做才能使分解的结果有唯一的形式？

2. 提公因式法的运用

（1） 怎样确定多项式各项的公因式？

在运用提公因式法进行因式分解时，应注意避免下面的情况发生，如

$$8a^3x^3-36a^5x^2-12a^4x^4=4a^3(2x^3-9a^2x^2-3ax^4) \quad ①$$

或 $12ab^2(a-b)^2-9a^3b^2(a-b)^3$

$$=3ab^2[4(a-b)^2-3a^2(a-b)^3]. \qquad ②$$

以上两个变形过程都没有完成，原因在于没有能正确地确定多项式中各项的公因式.

应当按照下面的原则来确定公因式：

① 当系数是整数时，应把各项系数的最大公约数，作为公因式的系数；

② 无一遗漏地把各项都含有的字母的最低次幂，作为公因式的因式；

③ 要注意，有时我们把整式中多次出现的相同多项式的幂看作某个字母的幂，如②式中$(a-b)^2$和$(a-b)^3$看作m^2和$m^3(m=a-b)$，那么原来的整式就可以看作多项式

$$12ab^2m^2-9a^3b^2m^3,$$

而$m^2=(a-b)^2$仍应是其公因式中的一个因式，不应遗漏.

(2) 一个多项式经过提公因式的变形后，它的项数是否会减少？

一般地说，多项式经过提公因式的变形以后，所得整式的积的形式是：

$$n\text{ 项式}=\text{公因式}\times\text{新的 }n\text{ 项式}.$$

如果变形前后多项式没有公因式时，项数既不增加，也不会减少. 即便是公因式和多项式的某一项完全相同，或只有符号不同时，这一项“全部提取”，这一项也不会“消失”，而只能写为1或-1.

这一点，如果把变形步骤写完整，就可以一目了然，如

$$\begin{aligned}&24x^3+16x^2y-8x^2\\=&8x^2\cdot 3x+8x^2\cdot 2y-8x^2\cdot 1\\=&8x^2(3x+2y-1).\end{aligned}$$

(3) 有条件时，应注意促进非公因式向公因式的转化.

多项式 $(a-b)^2+3(b-a)^3$ 有公因式吗？

应该说，在现有的形式下，它的各项没有公因式，但是由于

$$(a-b)^2=(b-a)^2,$$

$$(b-a)^3=[-(a-b)]^3=-(a-b)^3,$$

所以可以使这些表面看来不是公因式的因式，转化为公因式，从而促进分解因式的进行. 例如，可以有下面不同的因式分解法：

$$\begin{aligned}&(a-b)^2+3(b-a)^3\\&=(b-a)^2+3(b-a)^3=(b-a)^2(1+3b-3a)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&(a-b)^2+3(b-a)^3\\&=(a-b)^2-3(a-b)^3=(a-b)^2(1-3a+3b).\end{aligned}$$

不难看出，两个结果是相同的.

思考题

2.1 你认为“公因式”可能是怎样的代数式？它是怎样组成的？

2.2 当多项式的某一项本身就是公因式，或某一项的相反数是公因式时，提出公因式后，这一项将发生什么情况？

2.3 当两个幂的底数是相反数时，它们可能化为同底数的幂吗？在转化的过程中，应遵循怎样的规律？