高等学校数学学习指导丛书

线性代数精讲精练

孙明正　邹杰涛　陈治中◎编著

与同济大学《线性代数》（第六版）同步

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

高等学校数学学习指导丛书

线性代数
精讲精练

孙明正　邹杰涛　陈治中◉编著

与同济大学《线性代数》（第六版）同步

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数精讲精练/孙明正,邹杰涛,陈治中编著. —3版. —北京:北京师范大学出版社,2015.8
(高等学校数学学习指导丛书)
ISBN 978-7-303-19104-8

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孙…②邹…③陈… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 121311 号

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京新街口外大街 19 号
邮政编码:100875
印　　刷:大厂回族自治县正兴印务有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:787 mm×1092 mm　1/16
印　　张:18
字　　数:425 千字
印　　数:1～5 000 册
版　　次:2015 年 8 月第 3 版
印　　次:2015 年 8 月第 3 次印刷
定　　价:29.00 元

策划编辑:岳昌庆　　责任编辑:岳昌庆
美术编辑:焦　丽　　装帧设计:焦　丽
责任校对:陈　民　　责任印制:陈　涛

再版前言

线性代数同微积分一样，是高等数学中两大入门课程之一，是一门非常好的工具学科，也是学习物理、力学、电路等其他课程的基础．线性代数是代数学的一个分支，主要处理线性关系问题，线性关系意即数学对象之间的关系是以一次形式来表达的．在科学研究中，许多的非线性模型通常可以被近似为线性模型，随着计算机的普及与发展，线性问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决，这样就使得线性代数在科学研究、经济、管理、工程技术等领域的应用越来越广泛．

本书是在上一版的基础上，根据同济大学数学系编的工程数学《线性代数》第六版的章节顺序，以及最新研究生入学考试线性代数的要求，进行修订而成的．全书内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．

相对于上一版，这次修订的主要工作是：

(1) 对部分章节进行了调整，使其与同济大学数学系编的工程数学《线性代数》第六版的章节基本一致．对原书中的内容、例题、习题等都做了相应的调整．

(2) 本书每一节的“重点、难点与疑点问答”是特色之一．对于学习线性代数的过程中所遇到的重点与难点，以及学习过程中容易产生歧义与疑点的地方，采用问答的形式一一作了解答与分析，从而加深了对概念的理解与掌握．这次我们结合多年的教学经验和现在学生的情况，对这部分一一梳理，使之更加通俗易懂、简单实用．

(3) 新增了大量最近十多年（更新至2015年）的考研真题，其中一些典型例题给出了多个解法．并把原书中的例题、习题重新进行了梳理，做了较大的调整．旨在通过本书的学习，帮助读者将基本概念、

基本方法理解透彻，更好地训练解题技巧及计算能力．本书能满足不同的教学与学习需求，适用范围更加广泛．

（4）本书对部分知识点重新进行了归纳与总结，补充了一些新的定理与知识点，如第一章新增了按 k 行 k 列展开的拉普拉斯定理，等等．删去了一些不常用、偏难的部分．其中的一些例题或知识点，或因为考研题中出现过相关结论，但教材中未涉及；或因为理论性较强而显得抽象；或解题技巧要求较高等原因，我们在其左上角加了 * 号，这些内容读者可根据实际情况进行选读．

本书在修订过程中，得到了北京师范大学出版社的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢．

由于水平有限，本书难免有疏漏和不妥之处，恳请读者指正．

编　者

2015 年 5 月

前言

线性代数是高等院校理工科各专业的重要基础课，它对于后续课程的学习起着至关重要的作用，同时也是研究生入学考试数学科目的基本内容，因此学好线性代数课程是非常重要的．但是由于本课程的特点是逻辑性强，比较抽象，学习者往往感到不易理解与不好掌握，解题时感到困难，本书就是希望能给广大学生与自学人员提供一个帮助，帮助他们更好地理解和掌握基本概念，通过例子与解题，更好地掌握基本方法与基本技能，从而达到本课程的基本要求．

本书按目前高等院校使用较多的同济大学编《线性代数》（第四版）的章节顺序，基本采用同步形式编写，符号、术语亦与其基本一致，个别地方改为现在较为流行的说法，在书中都加以注明．

全书分六章，每章开头是基本要求．每一节分基本内容提要，重点、难点与疑点问答，典型例题三个部分，每章最后是单元复习题．

“基本要求”是根据《线性代数课程基本要求》和研究生入学考试线性代数的基本要求编写的．

“基本内容提要”是该节基本概念与基本理论的综述．

“重点、难点与疑点问答”是作者根据多年来的教学实践与经验，指出本节的重点与难点，同时对学习过程中容易产生歧义与疑问的地方，采用问答的形式一一作了解答与分析，加深对概念的理解与掌握．

“典型例题”给出了问题的解答，部分例题还加了评注．选取的部分往年考研试题都有标注，如：“例 2（1999）”是指该题为 1999 年的考研题．

章末的“单元复习题”供练习与自测用，分填空题、单项选择题、计算与证明题三部分，并附解答与提示供参考．

本书是线性代数的同步辅导书，也是线性代数的考研辅导书，也可供教师参考.

本书的出版得到了北京师范大学出版社的大力支持和帮助，特别是王松浦同志，在此深表谢意.

由于作者水平所限，错误与不妥之处，恳请广大读者与各位同行批评指正，在此先致谢意.

陈治中

2005年3月于北京

目录

第一章 行列式

本章介绍行列式的基本概念、行列式的性质、行列式的计算.本章的基本要求是：

(1) 了解行列式的概念,掌握行列式的性质.

(2) 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

第一节　n 阶行列式的定义

一、基本内容提要

1 排列及其逆序数

全排列　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为 n 个元素的全排列,简称排列,常记作 $j_1j_2\cdots j_n$.

逆序　在一个排列中,如果一个较大的数排在一个较小的数的前面,就称这两个数构成一个逆序.

逆序数　一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数常记作 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$(也可简记作 t).

奇排列和偶排列　逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

2 有关排列的主要结论

(1) n 个元素的排列共有 $n!$ 个,其中奇、偶排列各有一半；

(2) 对换改变排列的奇偶性；

(3) 任意一个排列都可经过一些对换变成标准次序排列(指自然数由小到大的排列),并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性；

(4) 任意两个 n 个元素的排列都可经过一系列对换互变,而且若这两个排列的奇偶性相同,则所做的对换次数是偶数;若这两个排列的奇偶性相反,则所做的对换次数是奇数.

3 n 阶行列式的定义

2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

即
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$
$$= \sum_{i_1i_2i_3} (-1)^{\tau(i_1i_2i_3)} a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33}.$$

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的(n 个元素)排列求和. n 阶行列式 D 表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,该项的前面带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,该项的前面带负号.

同理,n 阶行列式还可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$
$$= \sum (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

有时也把行列式 D 简记作 $D=\det(a_{ij})$,或 $D=|a_{ij}|$.

二、重点、难点与疑点问答

问 1 本节的重点和难点是什么? 应该注意哪些问题?

答 本节的重点和难点是 n 阶行列式的定义. 定义包括以下几个方面:

(1) 项数:n 阶行列式应包括 $n!$ 个项;

(2) 每项构成:位于不同行不同列的 n 个元素的乘积;

(3) 各项符号:正负各半,符号由元素下标排列的逆序数决定.

为了更好地理解 n 阶行列式的定义,可以从下面几个方面去体会:

首先,n 阶行列式的定义是 2 阶、3 阶行列式定义的推广,但这一推广必须抓住 2 阶、3 阶行列式的本质部分,这就是如上定义包括的 3 个方面,而不是表面看似简单的对角线法.

其次,要始终想到行列式是由解线性方程组引进的记号,而定义一般的 n 阶行列式首先也是为了更好地表示 n 元线性方程组的解. 实际上,在整个线性代数的学习过程中,都应该把握线性方程组这条主线,围绕解线性方程组展开讨论与学习.

最后,上述 3 条中的(1)和(2)容易从 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式,比较难确定的是从 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式时的各项符号,为此就要先讨论排列与逆序.

问 2 行列式表示什么？

答 行列式只是把 n^2 个数按 n 行 n 列排成的一个"记号"，它表示一个算式(即：$n!$ 项的代数和)，说到底行列式表示一个数.

问 3 1 阶行列式 $|a|$ 和绝对值 $|a|$ 都表示一个数，它们有什么不同？

答 规定 1 阶行列式 $|a|$ 就表示数 a；绝对值 $|a|$，当 a 大于或等于 0 时为 a，当 a 小于 0 时为 $-a$. 例如 1 阶行列式 $|-3|=-3$，而绝对值 $|-3|=3$.

问 4 为什么计算 4 阶及以上的行列式时，没有对角线法则？

答 我们定义行列式的目的之一是求解线性方程组，如果按照对角线方法去定义 4 阶及以上的行列式，在表示方程组的解时就会出现问题. 以 4 阶为例，若用类似的对角线法则去定义，那么行列式应该包括 4 正 4 负共 8 项，而按照消元法解 4 元线性方程组，它的解中分子、分母(当分母不为零时)都各有 $4!=24$ 项. 所以计算 4 阶及以上的行列式时，没有对角线法则.

问 5 项 $a_{11}a_{23}a_{33}a_{42}$ 是否是 4 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中的一项，为什么？

答 不是. 因为该项中 4 个元素虽然分别位于 1,2,3,4 行，但是其中的 a_{23} 和 a_{33} 都位于第 3 列，这是不可能的，所以它不是 D 中的一项.

问 6 两个行列式相等，它们的阶是否一定相等？

答 不一定. 因为两个行列式相等是指这两个行列式的值相等，与行列式的阶没有关系.

问 7 行列式 $|a_{ij}|$ 副对角线上的元素乘积的项 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 是否一定带负号，为什么？

答 不一定. 这是因为行列式各项的符号是由元素下标的逆序数决定的，当 $n=2,3$ 时带负号，这容易造成一种错觉，以为在任何行列式中副对角线上元素乘积的项总是带负号的，实际上，当 $n=4$ 时，由于 $\tau(4321)=6$ 是偶数，所以带正号，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\tau(4321)}abcd=abcd;$$

一般地，对于 n 阶，副对角线上元素的乘积的符号由

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

的奇偶性而定，即

$$\begin{vmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

注 上面行列式中，未标明元素处均为零，下同.

三、典型例题

1 有关排列与逆序的问题

例 1 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1)1347265；　　　　(2)$n(n-1)\cdots 21$.