

无穷维耦合系统的指数稳定性 分析方法

赵东霞 汪俊 著

The Exponential Stability of Infinite-Dimensional Coupled System



中国出版集团

世界图书出版公司

无穷维耦合系统的指数稳定性 分析方法

赵东霞 汪俊 著

世界图书出版公司

广州·上海·西安·北京

图书在版编目 (C I P) 数据

无穷维耦合系统的指数稳定性分析方法 / 赵东霞,
汪俊著. — 广州: 世界图书出版广东有限公司, 2015.3
ISBN 978-7-5100-9528-3

I . ①无… II . ①赵… ②汪… III . ①数学理论
IV . ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 057927 号

无穷维耦合系统的指数稳定性分析方法

策划编辑: 李 平

责任编辑: 廖才高 王梦洁

封面设计: 彭 琳

出版发行: 世界图书出版广东有限公司

地 址: 广州市新港西路大江冲 25 号

电 话: 020-84459702

印 刷: 虎彩印艺股份有限公司

规 格: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 13

字 数: 100 千字

版 次: 2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5100-9528-3/O · 0044

定 价: 38.00 元

版权所有, 翻印必究

引 言

无穷维耦合系统的镇定与控制问题是控制理论中的一个重要分支, 该方向的一些研究成果已成功应用于机器人、直升飞机与电力系统控制等实际控制工程中. 当前工程控制及航空航天领域的飞速发展也对无穷维耦合系统的基础研究提出了许多新的挑战 and 理论难题, 迫切要求控制学科领域的工作者建立有价值的科学理论和方法. 本书主要介绍如何利用算子半群理论、谱分析以及 Riesz 基方法建立无穷维耦合系统指数稳定性和参数条件分析. 根据研究内容和研究思路, 本书除绪论和结论章外分为两部分: 第一部分包括第二章至第六章, 研究一类 PDE-ODE 无穷维耦合系统的边界反馈控制与镇定问题; 第二部分是第七章, 研究基于线性化圣维南方程组的 PDE-PDE 无穷维耦合系统的 Riesz 基性质及边界反馈控制问题. 各章基本结构和内容概括如下:

第一章介绍无穷维耦合系统控制问题的研究背景和国内外研究现状, 本书的结构和主要结果, 以及书中用到的基本概念和定理等预备知识.

第二章研究单摆系统在 PDP (位置反馈和时滞位置反馈) 控制器下的镇定问题:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) \pm \frac{g}{l}y(t) = u(t), \\ u(t) = \hat{a}y(t) + \hat{b}y(t - \tau). \end{cases}$$

由于时滞可以用一阶双曲偏微分方程来刻画, 因此, 上述时滞 ODE

系统可以转化为如下 PDE-ODE 无穷维耦合系统:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + ky(t) = bv(0, t), \\ v_t(x, t) = v_x(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ v(1, t) = y(t), \end{cases}$$

其中, 一阶双曲偏微分方程可以看作是控制器, 受控 ODE 系统通过双曲 PDE 的边界输出与 PDE 系统耦合在一起. 首先, 将该耦合系统表示为 Hilbert 状态空间中的抽象发展方程的形式, 并利用算子半群理论证明系统的适定性; 其次, 采用渐近分析的技巧给出了系统算子的特征值的渐近表达式; 最后, 根据系统算子的谱界和由系统算子生成的半群的增长阶之间的关系, 以及泛函分析中的不等式放缩技巧, 验证系统的谱确定增长条件成立, 进而得出系统指数稳定当且仅当系统参数 k, b 满足不等式

$$0 < (-1)^n b < \min \{k - n^2 \pi^2, (n+1)^2 \pi^2 - k\}.$$

第三章研究控制器本身带有时间延迟时倒立摆系统的指数镇定问题. 与第二章相比, 系统含有两个时滞:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) - \frac{g}{l}y(t) = u(t - \tau), \\ u(t) = \hat{a}y(t) + \hat{b}y(t - \tau). \end{cases}$$

本章证明了系统的适定性, 给出了系统算子特征值的渐近表达式, 验证了谱确定增长条件成立, 并进一步证明了系统指数稳定当且仅当系统参数 k, a, b 满足不等式

$$k > -1, \quad -k < b < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - k, \quad -2b \cos \sqrt{b+k} < a < k - b.$$

第四章和第五章分别研究 HEAT-ODE 和 WAVE-ODE 无穷维耦合系统的镇定与控制问题, 以热方程和带有 K-V 阻尼的波动方程作为动态补偿控制器去镇定带有未知参数 k, b 的二阶 ODE 系统. 书中证明了存在一系列广义特征函数构成 Hilbert 状态空间的一组 Riesz 基, 从而建立了系统的指数稳定性. 理论研究和数值模拟结果表明, 将热方程或带有 K-V 阻尼的波动方程作为 ODE 系统的补偿控制器能够加快系统的衰减速度, 并且对系统中的参数 k, b 不再有太多限制, 只要 $k > 0, b \neq 0$. 这大大放松了对系统参数的限制条件.

第六章研究具有小世界联接的时滞环形神经网络系统的动力学性能, 并探讨小世界联接权值 c 对系统稳定性的影响. 本章给出了系统算子的特征值的渐近表达式, 验证了谱确定增长条件成立, 并进一步证明了系统的指数稳定性. 另外, 根据 Schur-Cohn 准则, 我们讨论了小世界联接权值 c 的与时滞无关的稳定性区间. 计算结果表明: 当小世界联接权值 c 属于某个区间的时候, 无论时滞值取多大, 系统始终保持稳定. 当然, 时滞值越大, 系统状态的收敛速度越慢.

第七章采用 Riesz 基方法研究基于线性化 Saint-Venant 方程的两渠道串级系统的反馈控制和指数镇定问题. 首先采用谱分析方法给出系统算子的特征值和特征函数的渐近表达式, 然后证明存在一系列广义特征函数构成 Hilbert 状态空间的一组 Riesz 基, 因此系统的谱确定增长条件成立.

第八章对已取得的研究工作进行了一个总结, 并就几个值得进一步探讨的课题进行了简要分析.

本书是在我的博士学位论文基础上修改完成的, 这里要特别感谢我的博士生导师——北京理工大学数学与统计学院王军民教授. 正是王老师的悉心指导才带领我走进无穷维系统控制这一极富魅力的研究领域, 他不厌其烦地教导我如何用科学的方法做科研, 如何选取有意义的研究课题, 并毫无保留地与我分享他丰富的生活和科研经验. 没有王老师的指导和鼓励, 这项工作是无法顺利完成的. 感谢中北大学理学院的领导, 他们对青年教师的支持和帮助使我受益匪浅. 感谢世界图书出版公司的编辑, 以及其他在此书出版过程中做了大量工作的同志们. 本书的出版还得到国家自然科学基金数学天元专项基金(11426207) 的资助.

由于笔者水平有限, 书中难免存有纰漏之处, 恳请读者提出宝贵意见.

著 者

2015 年 3 月

于中北大学

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究基础和研究意义	1
1.2 无穷维耦合系统的研究进展	2
1.3 研究内容和结果	12
1.4 基本概念和理论基础	16
第二章 单摆系统在 PDP 控制器下的谱分析.....	23
2.1 单摆系统与 PDP 控制器简介.....	23
2.2 系统 (2.1.10) 的适定性.....	28
2.3 系统算子的谱分析.....	33
2.4 本征向量的非基性质	46
2.5 谱确定增长条件和指数稳定性.....	50
2.6 数值应用.....	56
2.7 本章小结.....	56
第三章 具有两个时滞的倒立摆系统的指数稳定性	59
3.1 模型的建立	59
3.2 系统 (3.1.4) 的适定性	60
3.3 系统算子的谱分析	67
3.4 谱确定增长条件和指数稳定性	77
3.5 数值应用.....	79
3.6 本章小结.....	79

第四章	一类 HEAT-ODE 耦合系统的稳定性分析	82
4.1	模型的建立	82
4.2	系统 (4.1.2) 的适定性	84
4.3	系统 (4.1.2) 的指数稳定性	86
4.4	数值应用	91
4.5	本章小结	91
第五章	一类 WAVE-ODE 耦合系统的稳定性分析	94
5.1	模型的建立	94
5.2	系统 (5.1.1) 的适定性	95
5.3	系统算子的谱分析	98
5.4	系统 (5.2.4) 的指数稳定性	105
5.5	数值应用	110
5.6	本章小结	111
第六章	带小世界联接的时滞环形神经网络的稳定性	112
6.1	模型分析	112
6.2	系统的适定性	114
6.3	系统算子的谱分析	117
6.4	谱确定增长条件和指数稳定性	126
6.5	小世界联接权值 c 与系统稳定性之间的关系	126
6.6	数值例子	138
6.7	本章小结	141
第七章	两渠道串级系统的反馈控制及稳定性分析	142
7.1	引言	142

7.2	模型分析	144
7.3	系统算子的谱分析	157
7.4	Riesz 基性质和指数稳定性	171
7.5	本章小结	174
第八章	研究结论和工作展望	176
参考文献		179

第一章 绪论

1.1 研究基础和研究意义

分布参数系统是指状态空间的维数为无穷的系统, 这些系统主要由偏微分方程、泛函微分方程、积分微分方程、积分方程以及 Banach 空间或 Hilbert 空间中的抽象微分方程 (组) 所描述. 分布参数系统的典型实例有: 电磁场、引力场、温度场等物理场, 弹性梁型的运动体, 大型加热炉, 化学反应器中的物质分布状态等. 分布参数系统广泛应用于热工、化工、导弹、航天、航空、核裂变、核聚变等工程系统, 以及生态系统、环境系统、社会系统等.

最简单的分布参数系统的例子是由时滞常微分方程

$$\dot{y}(t) = u(t - \tau)$$

所描述的系统, 其中, $\tau > 0$ 表示时滞, 其传递函数为 $e^{-\tau}$. 显然, 这不是一个有理分式. 那么, 研究这类系统的运动, 就不能在有穷维状态空间中进行. 此外, 在系统控制中, 系统是不是无穷维的, 要看研究的问题而决定. 例如, 对于一个有质量分布的弹性飞行器, 在研究它的扭转运动时, 必须考察其内部各点的运动, 从而把它当作分布参数系统. 但在研究它的运动轨线时, 就不必逐点考虑其内部运动, 而是把质量集中到质心来分析, 即把它当作集中参数系统.

分布参数系统控制问题的研究可以追溯到上个世纪五六十年代, 迄今为止已经产生了诸如稳定性, 可控可观性, 最优控制, 边

界控制, 自抗扰控制等热门研究课题, 取得了一系列极具影响力的研究成果, 参见文献 [10, 11, 18, 23, 28–30, 34, 46, 57, 58, 74–79, 82, 85, 91, 95, 119, 123, 125, 126, 136, 143–146]. 在自动控制理论中, 通常是设计一个控制器使得系统的性能按期望的方式变化. 由控制器做出的决定是非常重要的, 在某些情况下, 控制器的决定可能会导致系统的灾难, 而在另外一些情况下, 控制器会极大地改善系统的性能. 稳定性研究是控制理论中的一个非常重要的基础研究课题, 国内外有许多专著相继出版, 例如文献 [15, 38, 50, 63, 106, 124, 128, 135], 初步形成了系统的理论体系.

随着航空及外太空技术的要求, 无穷维耦合系统的研究受到了广泛关注, 如航天器—运载火箭耦合系统 ([130]), 飞行器多通道耦合, 卫星姿态与轨迹耦合 ([141]), 以及航空发动机双转子—滚动轴承—机匣耦合系统 ([147]) 等等. 2010 年, 美国高超声速飞行器 HTV-II 由于惯性耦合问题处理不好导致滚转过大而试飞失败 ([127]), 我国也有卫星定位精度不高的历史, 其原因就是卫星姿态与运动轨迹耦合导致控制效果不理想. 这充分说明国内外在耦合问题的研究上有待进一步深入和提高. 因此, 无穷维耦合系统的镇定与控制研究具有重大的现实指导意义. 本书利用算子半群理论、谱分析方法以及 Riesz 基理论研究一类无穷维耦合系统的镇定与控制问题. 下面首先就研究对象的历史背景、发展过程及研究现状作一简单回顾, 然后简要阐述研究内容和研究成果, 最后列出本书所用到的相关数学理论和数学方法等预备知识.

1.2 无穷维耦合系统的研究进展

无穷维耦合系统是由泛函微分方程组或偏微分方程组所描述

的. 现实中的很多系统都存在着复杂的耦合现象, 比如, 电力系统中的电磁耦合, 力学系统中的流固耦合以及汽车车身的声固耦合问题, 桥梁结构动力学中的车—桥耦合系统, 重载汽车—路面—路基耦合动力系统, 明渠引排水系统等等. 近年来, 无穷维耦合系统的研究激起工程师及数学学者们的研究兴趣, 取得了一系列的研究成果. 其中, 有关 PDE—ODE 无穷维耦合系统的代表文献有 [41, 45, 46, 72, 89, 113, 114, 117, 121, 134], 有关 PDE—PDE 无穷维耦合系统的代表文献有 [10, 40, 93, 94, 107–110, 118].

1.2.1 时滞系统的研究进展

在实际的工程系统中, 时滞是非常普遍的现象. 尽管在许多实际应用中, 时滞量很小, 但常常会影响到整个受控系统的稳定性和控制性能. 因此, 时滞效应在许多实际问题中是必须考虑的重要因素. 在众多考虑时滞效应的研究工作中, 控制系统的稳定性是一个基础性的研究问题, 受到广大专家学者的广泛关注. 二十世纪八九十年代左右, 已经产生一些突出的研究成果, 参见文献 [1, 16, 17, 32, 48, 64, 90]. 近十年来, 时滞系统的控制问题得到了进一步的发展, 涌现出大量有实际指导意义的理论研究成果, 参见文献 [12, 20, 37, 40, 67, 68, 73, 81, 120, 132, 139].

在过去几十年里, 时滞系统稳定性的分析方法大致可以分为频域法和时域法. 频域法的主要思想是通过分析特征方程根的分布来判别系统的稳定性. 由于时滞系统的特征方程为超越方程, 求其精确解会比较困难. 但是, 我们只需要研究特征根是否均为负实部. 具体来讲, 如果一个非线性时滞微分方程在平衡点 (不妨设其为方程的零解) 处的线性化时滞微分方程没有零实部的特征根, 则非线性

时滞微分方程零解的局部稳定性与其线性化方程零解的局部稳定性是一致的. 特别的, 如果线性化时滞微分方程的所有特征根都具有负实部, 则该方程的零解是渐近稳定, 从而原方程的零解也是渐近稳定的, 参见文献 [137]. 时域法主要有 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和 Lyapunov-Razumikhin 函数方法, 其主要思想是构造一个正定的 Lyapunov-Krasovskii 泛函或 Lyapunov 函数, 通过判断其导数的符号以获得系统稳定的充分条件, 它们分别是由 Krasovskii 和 Razumikhin 创立于二十世纪五十年代末, 现已成为研究时滞系统稳定性和控制器设计的主要方法.

在自动控制中, 时滞可能是由控制器造成, 也可能是人为因素造成. 时滞的出现一方面可能使得系统的状态变得不稳定, 但合适的时滞值也有可能改善系统的性能, 参见文献 [21, 36, 47, 93, 96, 111, 112, 115, 116, 129].

众所周知, 简单的位置反馈不能够获得受控系统的满意结果. 因此, 1979年, I.H. Suh 和 Z. Bien 在文献 [86] 中首次引入 PDP (位置反馈和时滞位置反馈) 控制器, 也就是用瞬时位置和时滞位置的线性组合来设计控制器:

$$u(t) = \hat{a}y(t) + \hat{b}y(t - \tau),$$

其中, $\tau > 0$ 表示时滞, 并于 1980 年证明了该控制方法明显优于传统的 PD (位移反馈和速度反馈) 控制器 [87]. 文献 [86, 87] 的研究主要基于近似计算和数值模拟. 因此, 基于 PDP 控制器的理论分析显得尤为重要.

1999 年, F.M. Atay 在文 [2] 中, 将 PDP 控制器用于镇定二阶

单摆系统, 从而得到如下系统:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) \pm \frac{g}{l}y(t) = u(t), \\ u(t) = \hat{a}y(t) + \hat{b}y(t - \tau). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

作者基于系统方程的特征根分析方法, 得到结论:

对任意时滞 τ , 系统 (1.2.1) 渐近稳定当且仅当系统参数满足不等式

$$0 < (-1)^n b < \min \{k - n^2\pi^2, (n+1)^2\pi^2 - k\}, \quad (1.2.2)$$

其中, n 为非负整数, $k = -a \pm \tau^2 g/l$, $a = \tau^2 \hat{a}$, $b = \tau^2 \hat{b}$.

2008 年, 刘波和胡海岩院士在文献 [62] 中将 PDP 控制器用于镇定包含多个自由度的线性无阻尼系统, 并利用模态解耦将系统的特征值移到左半开复平面, 从而达到系统的稳定性.

对含有参数的时滞动力系统, 随着参数变化, 系统平衡点的稳定性可能会由稳定变为不稳定, 或者由不稳定变为稳定, 这种现象称为稳定性切换. 2000 年, 王在华教授和胡海岩院士在文献 [97] 中研究具有时滞和未知参数的高维动力系统, 并分析了当时滞值从 0 开始不断增大时, 系统稳定性的切换. 2004 年, 胡海岩院士在文献 [35] 中研究如何镇定一个线性无阻尼系统的周期振荡, 通过采用时滞位置反馈或时滞速度反馈或者二者相结合的方法, 得到了系统稳定性的充分条件. 在此基础上, 王在华教授和胡海岩院士在文献 [98] 中研究了含有多个自由度的线性无阻尼系统的镇定问题.

在神经网络系统中, 神经元之间的信息传递是有时滞存在的. 近年来, 人们对时滞神经网络的稳定性研究取得了丰硕的成果, 参见文献 [6, 12, 39, 65, 102, 131, 131].

1993 年, Jacques Bélair 在文献 [6] 中研究了时滞 Hopfield 神经网络

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f(x_j(t - \tau)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

的渐近稳定性和全局稳定性, 给出“系统渐近稳定”与“系统参数以及时滞 τ 所满足的条件”之间的充要条件关系, 并进一步讨论了由时滞引起的不稳定性和时滞对系统的动力学性能所产生的影响.

2008 年, 徐旭在文献 [102] 中研究了时滞环形神经网络系统

$$\dot{x}_i(t) = -kx_i(t) + \sum_{j=i-1}^{i+1} b_{ij} f(x_j(t - \tau_{i,j})), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

的动力学性能. 根据 Lyapunov 函数方法, 得到了系统平衡点的渐近稳定性、与时滞无关的全局稳定性准则、以及与时滞有关的全局稳定性准则. 结论表明, 当“与时滞无关的稳定性准则”不成立时, 总是可以选取合适的时滞使得系统全局渐近稳定.

小世界网络是介于规则网络与随机网络之间的一种网络形式, 通常在规则网络中引入随机不相邻节点之间的长联接获得. 研究表明, 在时滞神经网络系统中引入小世界联接能给系统带来复杂的动力学影响 [51, 55, 65, 99, 103, 105].

2003 年, 李春光与陈关荣在文献 [54] 中证明, 具有小世界联接的神经网络比规则网络容易达到稳定.

2009 年, 徐旭和王在华在文献 [104] 中表明, 小世界联接可以看成是控制系统动力性能的一个简单有效的“开关”. 该文章研究了小世界联接对系统平衡点的全局稳定性, 局部稳定性, 以及从平衡点分叉出来的周期解的稳定性的影响. 理论研究结果表明, 小世

界联接缩短了关于时滞 τ 的全局稳定性区间, 并对局部稳定性和 Hopf 分叉产生显著的影响. 数值模拟结果表明, 对不同的神经网络模型, 倍周期分叉和准周期分叉都可以引起混沌. 进一步, 还看到了一些有趣的现象, 比如, 相互分离的周期解的共存性, 相互分离的准周期解的共存性, 以及两个混沌吸引子的共存性.

1.2.2 时滞系统的研究现状

2006 年, 许跟起教授在文献 [101] 中, 首次将时滞用一阶双曲方程来刻画, 这个处理方式完全不同于之前的对时滞系统的研究 [15], 充分体现了时滞系统的无穷维特性. 之后, 文献 [25, 26, 93] 也陆续使用这一处理时滞的方法来研究具有边界输入时滞的 Schrödinger 方程或波动方程.

2010 年, M. Gugat 利用特征线方法得到: 边界观察中特定的时滞值 ($\tau = 2$) 可用于镇定弦的振荡 [21]. 2011 年, 王军民教授将该系统改写为波动方程和一阶双曲方程耦合的无穷维系统, 并证明对任意的时滞值, 该系统是一个 Riesz 谱系统, 且谱确定增长条件成立. 进而, 当时滞值等于波传播时间的偶数倍时, 作者给出了“系统指数稳定”与“反馈增益和时滞的取值范围”之间的充要条件关系.

值得指出的是, 对这一处理时滞的方法系统化的推广是美国加州大学圣地亚哥分校的 Miroslav Krstic 教授和他的研究团队, 代表文献有 [40–46, 88, 89, 121]. 文献 [45] 研究具有输入时滞的有穷维系统:

$$\dot{X} = AX + BU(t - D), \quad (1.2.3)$$

其中, $X \in \mathbb{R}^n$, (A, B) 可控, 输入信号 $U(t)$ 延迟了 D 个单位时长.